KABV WEERGAWE 1.1

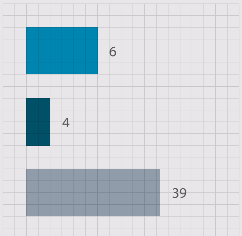
GRAAD 10 WISKUNDE ONDERWYSERSGIDS

GESKRYF DEUR SIYAVULA EN VRYWILLIGERS

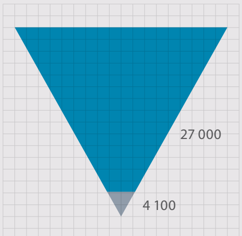
EVERYTHING MATHS DEUR

SIYAVULA

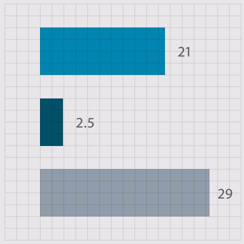
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING



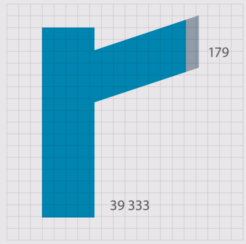
- Trigonometry exercises in this book
- Geometry exercises in this book
- Algebra exercises in this book



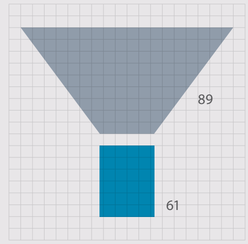
- Litres of ink used in the production of all the grade 10, 11 and 12 textbooks
- Litres of glue used in the production of all the grade 10, 11 and 12 textbooks



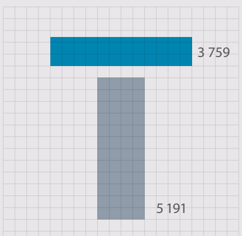
- Breadth of this book (cm)
- Depth of this book (cm)
- Height of this book (cm)



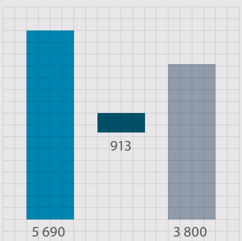
- Number of words used in this book
- Number of pages



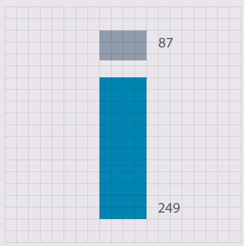
- Hours spent being taught this book
- Hours spent doing homework from this book



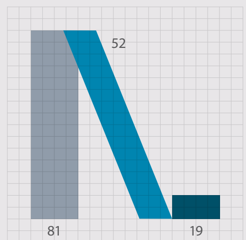
- Length of pages side by side (cm)
- Length of pages top to bottom (cm)



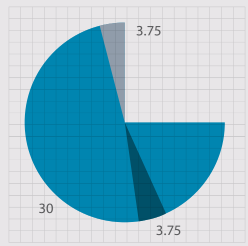
- How many times student scratches head while reading this book
- How many times student picks nose while reading this book
- How many times student clicks pen while reading this book



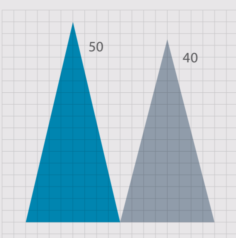
- Number of females who helped write this book
- Number of males who helped write this book



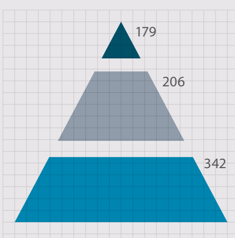
- Masters students who contributed to this book
- Honours students who contributed to this book
- Undergraduate students who contributed to this book



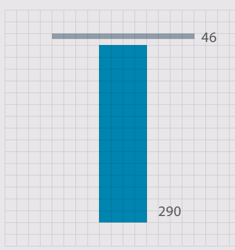
- Hours spent getting book to school per week
- Hours spent getting book home per week
- Hours spent with book in class per week



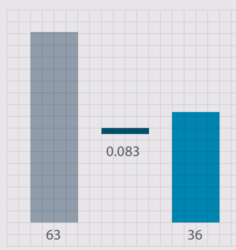
- Average size of class being taught from this book
- Average age of a maths teacher teaching from this book



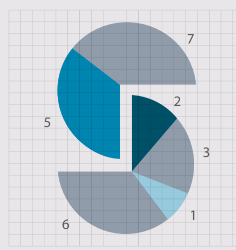
- Number of pages in Grade 12 Maths textbook
- Number of pages in Grade 11 Maths textbook
- Number of pages in Grade 10 Maths textbook



- Number of Afrikaans volunteers who helped write this book
- Number of English volunteers who helped write this book



- Number of hours spent conceptualising this cover
- Number of hours it takes to manufacture this book
- Number of hours spent designing this cover



- Weekly UCT hackathons that contributed to this book
- Small office hackathons that contributed to this book
- Afrikaans hackathons that contributed to this book
- Virtual hackathons that contributed to this book

basic education
Department:
Basic Education
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

OLDMUTUAL

EVERYTHING MATHS

GRAAD 10 WISKUNDE

ONDERWYSERSGIDS

KABV WEERGAWE 1.1

DEUR SIYAVULA EN VRYWILLIGERS

LYS VAN SKRYWERS

Siyavula Education

Siyavula Education is a sosiale onderneming wat in 2012 gestig is met kapitaal en ondersteuning van die *PSG Group* Beperk, die *Shuttleworth Foundation* en, vanaf 2014, die *Omidyar Network*. Die Everything Maths and Science reeks is deel van 'n groeiende versameling van hulpbronne geskep en vryliks beskikbaar gestel is deur Siyavula. Vir meer inligting oor die skryf en verspreiding van hierdie titels besoek:

www.siyavula.com
info@siyavula.com
021 469 4771

Siyavula Skrywers

Luke Kannemeyer; Alison Jenkin; Marina van Zyl; Dr Carl Scheffler

Siyavula en DBE span

Heather Williams; Nkosilathi Vundla; Bridget Nash; Ewald Zietsman; William Buthane Chauke; Leonard Gumani Mudau; Sthe Khanyile; Josephine Mamaroke Phatlane

Siyavula en Free High School Science Text bydraers

Dr Mark Horner; Dr Samuel Halliday; Dr Sarah Blyth; Dr Rory Adams; Dr Spencer Wheaton

Iesrafeel Abbas; Sarah Abel; Taskeen Adam; Ross Adams; Tracey Adams; Dr Rory Adams; Andrea Africa; Wiehan Agenbag; Ismail Akhalwaya; Matthew Amundsen; Ben Anhalt; Prashant Arora; Bianca Bôhmer; Amos Baloyi; Bongani Baloyi; Raymond Barbour; Caro-Joy Barendse; Katherine Barry; Dr Ilsa Basson; Richard Baxter; Tara Beckerling; Tim van Beek; Lisette de Beer; Prof Margot Berger; Jessie Bester; Mariaan Bester; Jennifer de Beyer; Dr Sarah Blyth; Sebastian Bodenstein; Martin Bongers; Dr Thinus Booysen; Ena Bosman; Janita Botha; Pieter Botha; Gareth Boxall; Stephan Brandt; Hannes Breytenbach; Alexander Briell; Wilbur Britz; Graeme Broster; Craig Brown; Michail Brynard; Richard Burge; Christina Buys; Jan Buys; George Calder-Potts; Biddy Cameron; Eleanor Cameron; Mark Carolissen; Shane Carollisson; Richard Case; Sithembile Cele; Alice Chang; William Buthane Chauke; Faith Chaza; Richard Cheng; Fanny Cherblanc; Saymore Chifamba; Lizzy Chivaka; Dr Christine Chung; Dr Mareli Claasens; Brett Cocks; Zelmari Coetzee; Phillipa Colly; Roché Compaan; Willem Conradie; Stefaan Conradie; Deanne Coppejans; Rocco Coppejans; Gary Coppin; Tim Craib; Dr Andrew Craig; Tim Crombie; Dan Crytser; Jock Currie; Dr Anne Dabrowski; Laura Daniels; Gareth Davies; Mia de; Tariq Desai; Sandra Dickson; Sean Dobbs; Buhle Donga; William Donkin; Esmi Dreyer; Matthew Duddy; Christel Durie; Fernando Durrell; Dr Dan Dwyer; Frans van Eeden; Kobus Ehlers; Alexander Ellis; Tom Ellis; Dr Anthony Essien; Charl Esterhuysen; Andrew Fisher; Dr Philip Fourie; Giovanni Franzoni; Sanette Gildenhuys; Olivia Gillett; Ingrid von Glehn; Tamara von Glehn; Nicola Glenday; Lindsay Glesener; Kevin Godby; Dr Vanessa Godfrey; Terence Goldberg; Dr Johan Gonzalez; Saaligha Gool; Hemant Gopal; Dr Stephanie Gould; Umeshree Govender; Dr Ilse le Grange; Heather Gray; Lynn Greeff; Jaco Greyling; Martli Greyvenstein; Carine Grobbelaar; Suzanne Grové; Eric Gulbis; Dr Tom Gutierrez; Brooke Haag; Kate Hadley; Alex Hall; Dr Samuel Halliday; Asheena Hanuman; Dr Melanie Dymond Harper; Ebrahim Harris; Dr Nicholas Harrison; Neil Hart; Nicholas Hatcher; Jason Hayden; Laura Hayward; Thomas Haywood; Dr William P. Heal; Pierre van Heerden; Dr Fritha Hennessy; Dr Colleen Henning; Anna Herrington; Shaun Hewitson; Millie Hilgart; Grant Hillebrand; Malcolm Hillebrand; Gregory Hingle; Nick Hobbs; Chris Holdsworth; Dr Benne

Holwerda; Dr Mark Horner; Robert Hovden; Mfandaidza Hove; Jennifer Hsieh; George Hugo; Dr Belinda Huntley; Laura Huss; Prof Ed Jacobs; Prof Gerrie J Jacobs; Hester Jacobs; Kim Jacobs; Stefan Jacobs; Rowan Jelley; Grant Jelley; Alison Jenkin; Clare Johnson; Dr Zingiswa Jojo; Francois Jooste; Dominic Jordan; Luke Jordan; Cassiem Joseph; Tana Joseph; Corli Joubert; Dr Fabian Jutz; Brian Kamanzi; Clare Kampel; Herman Kamper; Dr Lutz Kampmann; Luke Kannemeyer; Simon Katende; Natalia Kavalenia; Rabia Khan; Dr Setshaba D Khanye; Sthe Khanyile; Nothando Khumalo; Paul Kim; Lizl King; Mariola Kirova; Jannie Kirsten; Melissa Kistner; James Klatzow; Dr Jennifer Klay; Andrea Koch; Grove Koch; Paul van Koersveld; Bishop Komolafe; Dion Kotze; Dr Timo Kriel; Lara Kruger; Sihle Kubheka; Andrew Kubik; Luca Lategan; Henri Laurie; Dr Jannie Leach; Nkoana Lebaka; Dr Marco van Leeuwen; Dr Tom Leinster; Ingrid Lezar; Annatjie Linnenkamp; Henry Liu; Pamela Lloyd; Dr Kevin Lobb; Christopher Loetscher; Linda Loots; Michael Loseby; Bets Lourens; Chris Louw; Amandla Mabona; Malothe Mabutho; Stuart Macdonald; Dr Anton Machacek; Tshepo Madisha; Batsirai Magunje; Dr Komal Maheshwari; Sello Makgakga; Dr Erica Makings; Judah Makonye; Michael Malahe; Dr Peter Malatji; Masoabi Malunga; Kosma von Maltitz; Shanaaz Manie; Masilo Mapaila; Adriana Marais; Paul Maree; Bryony Martin; Nicole Masureik; Jacques Masuret; John Mathew; Dr Will Matthews; Chiedza Matuso; Thulani Mazolo; Stephen McBride; JoEllen McBride; Abigail McDougall; Kate McGrath; Ralf Melis; Nikolai Meures; Margaretha Meyer; Riana Meyer; Zalisile Mgidi; Dr Duncan Mhakure; Filippo Miatto; Jenny Miller; Rossouw Minnaar; Abdul Mirza; Colin Mkhize; Mapholo Modise; Carla Moerdyk; Tshwarelo Mohlala; Relebohile Molaoa; Marasi Monyau; Asogan Moodaly; Jothi Moodley; Robert Moon; Calvin Moore; Bhavani Morarjee; Talitha Mostert; Gabriel Mougoue; Kholofelo Moyaba; Nina Gitau Muchunu; Leonard Gumani Mudau; Christopher Muller; Helgard Muller; Johan Muller; Caroline Munyonga; Alban Murewi; Kate Murphy; Emmanuel Musonza; Tom Mutabazi; David Myburgh; Johann Myburgh; Kamie Naidu; Nolene Naidu; Gokul Nair; Vafa Naraghi; Bridget Nash; Eduan Naudé; Polite Nduru; Tyrone Negus; Theresa Nel; Annemarie Nelmapius; Huw Newton-Hill; Buntu Ngcebetsha; Dr Mapula Ngoepe; Nadia Niemann; Sarah Niss; Towan Nothling; Nkululeko Nyangiwe; Tony Nzundu; Jacquin October; Thomas O'Donnell; Dr Markus Oldenburg; Marieta Oliver; Riaz Omar; Dr Bob Osano; Helena Otto; Adekunle Oyewo; Dr Jaynie Padayachee; Poveshen Padayachee; Dr Daniel Palm; Masimba Paradza; Clare Patrick; Quinton Paulse; Dave Pawson; Justin Pead; Nicolette Pekeur; Carli Pengilly; Roseinnes Phahle; Josephine Mamaroke Phatlane; Seth Phatoli; Joan Pienaar; Petrus Pieterse; Sirika Pillay; Jacques Plaut; Johan du Plessis; Tabitha du Plessis; Jaco du Plessis; Dr Craig Pournara; Barry Povey; Andrea Prinsloo; David Prinsloo; Joseph Raimondo; Sanya Rajani; Prof. Sergey Rakityansky; Kim Ramatlapana; Alastair Ramlakan; Thinus Ras; Dr Matina J. Rassias; Ona Rautenbach; Dr Jocelyn Read; Jonathan Reader; Jane Reddick; Robert Reddick; Trevishka Reddy; Dr Matthew Reece; Chris Reeders; Brice Reignier; Razvan Remsing; Dr Liezel Retief; Adam Reynolds; Laura Richter; Max Richter; Sean Riddle; Dr David Roberts; Christopher Roberts; Helen Robertson; Dr William Robinson; Evan Robinson; Christian Roelofse; Raoul Rontsch; Dr Andrew Rose; Katie Ross; Karen Roux; Dr Maritha le Roux; Jeanne-Mariè Roux; Karen Roux; Mark Roux; Bianca Ruddy; Heinrich Rudman; Nitin Rughoonauth; Katie Russell; Farhana Motala Safi; Steven Sam; Jason Avron Samuels; Rhoda van Schalkwyk; Christo van Schalkwyk; Dr Carl Scheffler; Peter Schutte; Nathaniel Schwartz; Duncan Scott; Helen Seals; Relebohile Sefako; Sandra Serumaga-Zake; Paul Shangase; Cameron Sharp; Ian Sherratt; Ryman Shoko; Dr James Short; Cho Hee Shrader; Roger Sieloff; Thaneshree Singh; Brandon Sim; Bonga Skozana; Bradley Smith; Greg Solomon; Zamekile Sondzaba; Nicholas Spaull; Margaret Spicer; Hester Spies; Dr Andrew Stacey; Dr Jim Stasheff; Mike Stay; Nicol Steenkamp; Nicky Stocks; Dr Fred Strassberger; Mike Stringer; Stephanie Strydom; Abdulhuck Suliman; Bianca Swart; Masixole Swartbooi; Ketan Tailor; Tshenolo Tau; Tim Teatro; Ben Thompson; Shen Tian; Xolani Timbile; Dr Francois Toerien; René Toerien; Liezel du Toit; Nicola du Toit; Dr Johan du Toit; Robert Torregrosa; Jimmy Tseng; Theresa Valente; Alida Venter; Pieter Vergeer; Rizmari Versfeld; Nina Verwey; Mfundo Vezi; Mpilonhle Vilakazi; Katie Viljoen; Adele de Villiers; Daan Visage; Wetsie Visser; Alexander Volkwyn; Nkosilathi Vundla; Dr Karen Wallace; John Walmsley; Duncan Watson; Helen Waugh; Leandra Webb; Dr Dawn Webber; Michelle Wen; Dr Rufus Wesi; Francois Wessels; Wessel Wessels; Leandi van der Westhuizen; Neels van der Westhuizen; Sabet van der Westhuizen; Dr Alexander Wetzler; Dr Spencer Wheaton; Vivian White; Mark Whitehead; Dr Gerald Wigger; Harry Wiggins; Heather Williams; Wendy Williams; Julie Wilson; Timothy Wilson; Andrew Wood; Emma Wormauld; Dr Sahal Yacoob; Jean Youssef; Ewald Zietsman; Johan Zietsman; Marina van Zyl

EVERYTHING MATHS

Ons dink oor die algemeen aan Wiskunde as 'n vak oor getalle, maar eintlik is Wiskunde 'n taal. As ons dié taal leer praat en verstaan kan ons baie van die natuur se geheime ontdek. Net soos ons iemand se taal moet verstaan om meer van hom/haar te leer, moet ons wiskunde gebruik om meer te leer van alle aspekte van die wêreld 'n of dit nou fisiese wetenskappe, lewenswetenskappe of selfs finansies of ekonomie is.

Die vernaamste skrywers en digters het 'n gawe om woorde só te gebruik dat hulle mooi en inspirerende stories kan vertel. Net so kan ons wiskunde gebruik om konsepte te verduidelik en nuwe dinge te skep. Baie van die moderne tegnologie wat ons lewens beter en makliker maak, is afhanklik van wiskunde. DVDs, Google soektogte en bankkaarte wat met 'n PIN werk, is maar net ën paar voorbeelde. Woorde het nie ontstaan om stories te vertel nie, maar die bestaan daarvan maak dit moontlik. Net so is die wiskunde wat gebruik is om hierdie tegnologie te ontwikkel, nie spesifiek vir hierdie doel ontwikkel nie. Die uitvinders kon egter bestaande wiskundige beginsels gebruik wanner en waar die toepassing daarvan nodig was.

Trouens is daar nie 'n enkele faset van die lewe wat nie deur wiskunde geraak word nie. Baie van die mees gesogte beroepe is afhanklik van wiskunde. Siviele ingenieurs gebruik wiskunde om te bepaal hoe om die beste, nuwe ontwerpe te maak. Ekonome gebruik wiskunde om te beskryf en voorspel hoe die ekonomie sal reageer op sekere veranderinge. Beleggers gebruik wiskunde om die prys van sekere soorte aandele te bepaal of om die risiko verbonde aan sekere beleggings te bereken. Wanneer sagteware-ontwikkelaars programme soos Google skryf, gebruik hulle baie van die wiskundige algoritmes om die programme bruikbaar maak.

Selfs in ons daaglikse lewens is wiskunde oral - in die afstand wat ons aflê, tyd en geld. Ons kan ook in kuns, ontwerp en musiek die invloed van wiskunde sien, veral in die proporsies en musikale klanke. Hoe beter ons vermoë om wiskunde te verstaan, hoe beter ons vermoë om die natuur en die skoonheid daarvan te waardeer. Wiskunde is daarom nie net 'n abstrakte dissipline nie, dit omarm logika, simmetrie, harmonie en tegnologiese vooruitgang.
Meer as enige ander taal is wiskunde oral en universeel in sy toepassing.

BORG

Hierdie handboek is ontwikkel met behulp van korporatiewe sosiale beleggingsfondse van die *Old Mutual Foundation*.

EVERYTHING MATHS & SCIENCE

Die *Everything Maths and Science*-reeks dek Wiskunde, Fisiese Wetenskappe, Lewenswetenskappe en Wiskundige Geletterdheid.

Die Siyavula ***Everything Science*** handboeke

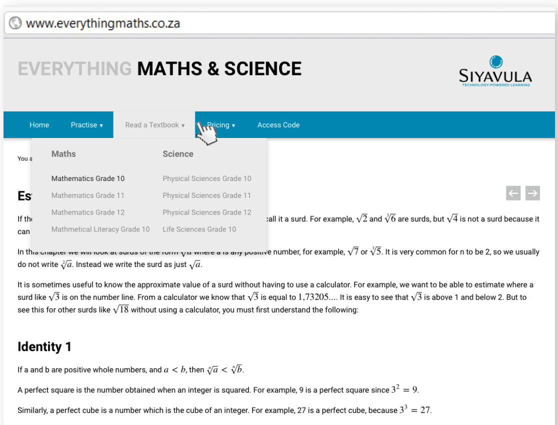
Die Siyavula ***Everything Maths*** handboeke

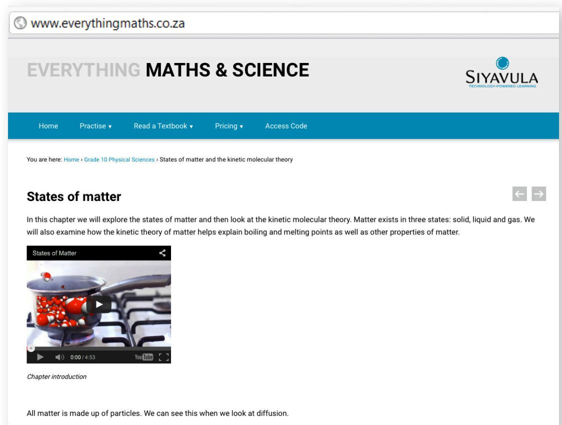
DIGITALE HANDBOEKE

LEES AANLYN

Sien hoe die handboeke lewe kry op die internet. Nie net het jy toegang tot al die inhoud van die gedrukte weergawe nie, maar die aanlynweergawe bied ook videos, voorleggings en simulasies om jou 'n meer omvattende leerervaring te gee.

www.everythingmaths.co.za

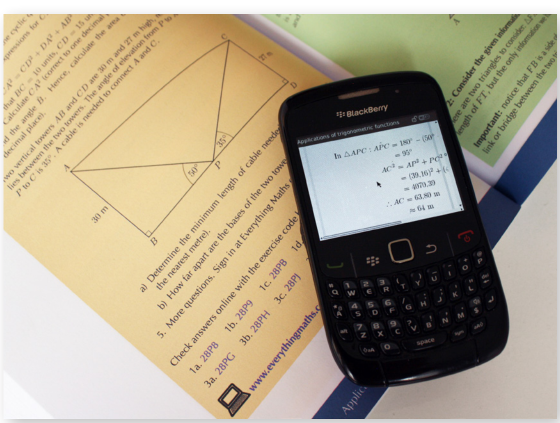


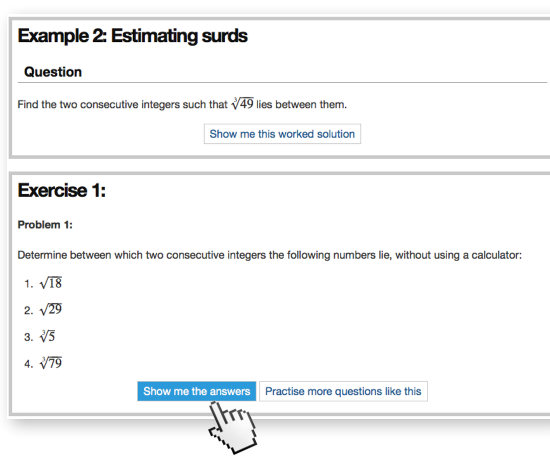


KONTROLEER JOU ANTWOORDE AANLYN OF OP JOU FOON

Op soek na die antwoorde? Jy kan die hele uitgewerkte oplossing vir enige van die vrae in die handboek vind deur sy *shortcode* ('n 4-syfer kombinasie van letters en syfers) in die soekboksie op die web- of mobi-tuiste in te tik.

www.everythingmaths.co.za or m.everythingmaths.co.za



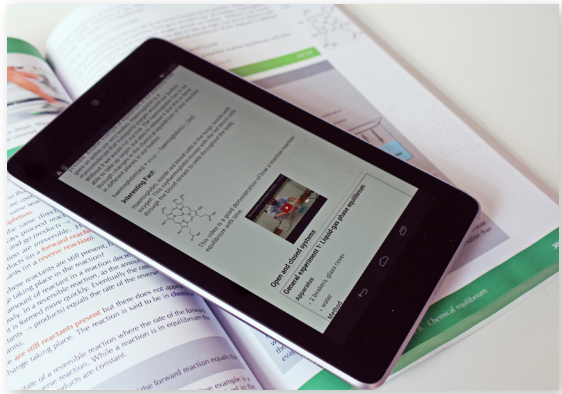


SELFOON & TABLET

RESPONSIEWE WEBWERF

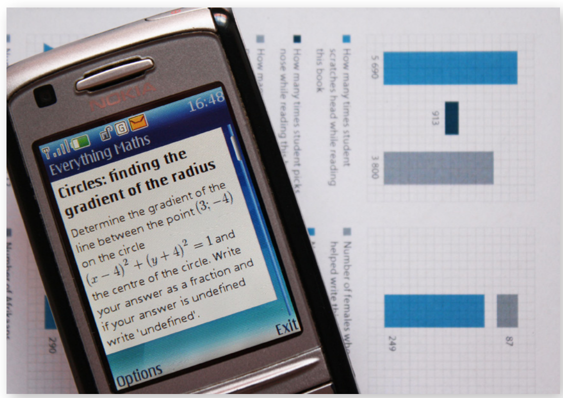
As jy `n slimfoon of tablet het, sal elke blad op ons webwerf automaties aanpas by die toestel (spesifiek die grootte, vorm, en kwaliteit van die skerm) wat jy gebruik. Geniet `n maklik leesbare teksboek terwyl jy aan die beweeg is, enige tyd, enige plek.

www.everythingmaths.co.za



MOBI

Moenie stres as jy nie `n slimfoon het nie. Jy kan hierdie teksboek op jou ouer toestel ook lees. Jy sal automaties na die mobi-webwerf geneem word. Jy kan dit ook direk lees by: ***m.everythingmaths.co.za***



LAAI AF OP JOU TABLET

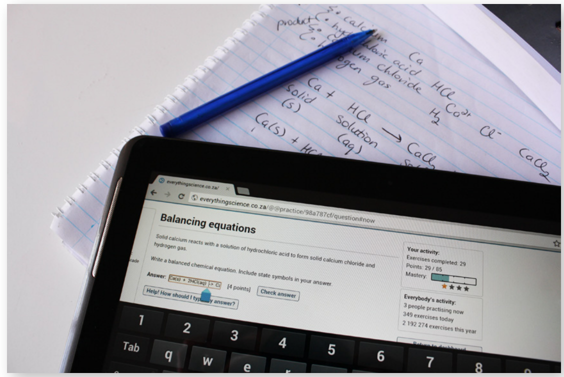
Jy kan 'n digitale PDF kopie van die ***Everything***-reeks handboeke op jou rekenaar, tablet, iPad en Kindle aflaai.

www.everythingmaths.co.za

OEFEN SLIM

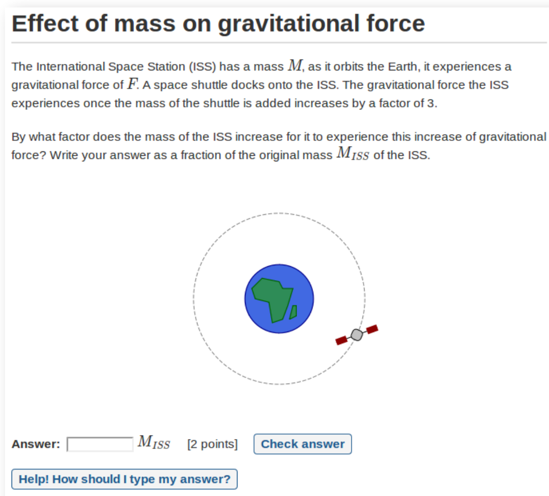
OEFEN AANLYN & OP JOU FOON VIR TOETSE EN EKSAMENS

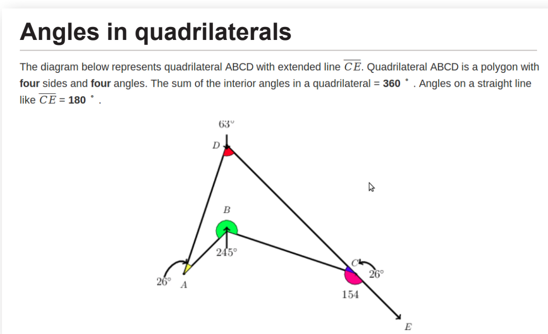
Om goed te doen in toetse en eksamens moet jy oefen, maar dit is soms moeilik om te weet waar om te begin en hoe om ou eksamenvraestelle in die hande te kry.



Intelligent Practice is 'n aanlyn Wiskunde- en Wetenskapoefendiens wat jou toelaat om vrae op die regte moeilikheidsgraad vir jou te oefen en dan die antwoorde dadelik na te gaan!

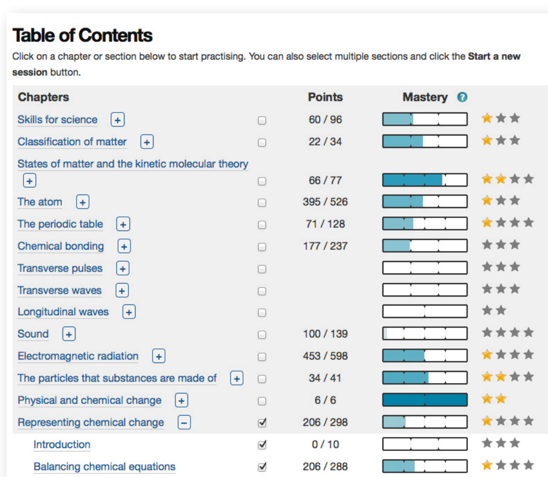
Oefen vrae soos hierdie deur te registreer by ***everythingmaths.co.za***





JOU PANEELBORD

Jou persoonlik paneelbord op Intelligent Practice help jou om rekord te hou van jou werk. Jy kan jou vordering en bemeestering van elke onderwerp in die boek dophou en dit gebruik om jou leerwerk te bestuur en jou swakpunte uit te lig. Jy kan ook jou paneelbord gebruik om jou onderwysers, ouers, universiteite of beursinstansies te wys wat jy die afgelope jaar gedoen het.



__Intelligent Practice__ is net in Engels beskikbaar.

Inhoudsopgawe

HOOFSTUK 0

Wiskunde - Onderwysers gids

0.1 Blog posts

Algemene blogs

- Educator's Monthly - Education News and Resources (http://www.teachersmonthly.com)
  - "We eat, breathe and live education! "
  - "Perhaps the most remarkable yet overlooked aspect of the South African teaching community is its enthusiastic, passionate spirit. Every day, thousands of talented, hard-working educators gain new insight from their work and come up with brilliant, inventive and exciting ideas. Educator's Monthly aims to bring educators closer and help them share knowledge and resources.
  - Our aim is twofold ...
    * To keep South African educators updated and informed.
    * To give educators the opportunity to express their views and cultivate their interests."
- Head Thoughts – Personal Reflections of a School Headmaster (http://headthoughts.co.za/)
  - blog by Arthur Preston
  - "Arthur is currently the headmaster of a growing independent school in Worcester, in the Western Cape province of South Africa. His approach to primary education is progressive and is leading the school through an era of new development and change."

Wiskunde blogs

- CEO: Circumspect Education Officer - Educating The Future
  - blog by Robyn Clark
  - "Mathematics teacher and inspirer."
  - http://clarkformaths.tumblr.com/
- dy/dan - Be less helpful
  - blog by Dan Meyer
  - "I'm Dan Meyer. I taught high school math between 2004 and 2010 and I am currently studying at Stanford University on a doctoral fellowship. My specific interests include curriculum design (answering the question, "how we design the ideal learning experience for students?") and teacher education (answering the questions, "how do teachers learn?" and "how do we retain more teachers?" and "how do we teach teachers to teach?")."
  - http://blog.mrmeyer.com
- Without Geometry, Life is Pointless - Musings on Math, Education, Teaching, and Research
  - blog by Avery
  - "I've been teaching some permutation (or is that combination?) of math and science to third through twelfth graders in private and public schools for 11 years. I'm also pursuing my EdD in education and will be both teaching and conducting research in my classroom this year."
  - http://mathteacherorstudent.blogspot.com/
- Overthinking my teaching - The Mathematics I Encounter in Classrooms
  - blog by Christopher Danielson
  - "I think a lot about my math teaching. Perhaps too much. This is my outlet. I hope you find it interesting and that you'll let me know how it's going."
  - http://christopherdanielson.wordpress.com
- A Recursive Process - Math Teacher Seeking Patterns
  - blog by Dan
  - "I am a High School math teacher in upstate NY. I currently teach Geometry, Computer Programming (Alice and Java), and two half year courses: Applied and Consumer Math. This year brings a new 21st century classroom (still not entirely sure what that entails) and a change over to standards based grades."

- http://dandersod.wordpress.com

- Think Thank Thunk – Dealing with the Fear of Being a Boring Teacher
  - blog by Shawn Cornally
  - "I am Mr. Cornally. I desperately want to be a good teacher. I teach Physics, Calculus, Programming, Geology, and Bioethics. Warning: I have problem with using colons. I proof read, albeit poorly."
  - http://101studiostreet.com/wordpress/

0.2 Oorsig

Voor 1994 het daar 'n aantal verskillende onderwysdepartemente en kurrikula bestaan volgens die skeiding wat so duidelik was tydens die apartheid era. As 'n gevolg het die kurrikulum self een van die politiese ikone van vryheid of onderdrukking geword. Sedertdien het die regering en politieke leiers probeer om een kurrikulum te ontwikkel, wat die nasionale agenda van demokratiese vryheid en gelykheid ondesteun, deur die kennis, vaardighede en waardes wat ons leerders moet leer and toepas op die voorgrond te stel, sodat hulle op 'n betekenisvolle manier kan deelneem in die samelewing as burgers van 'n vry land. Die Nasionale Kurrikulumverklaring (NKV) Graad R–12 (DBE, 2012) dien dus volgende doelwitte:

- om leerders toe te rus met die kennis, vaardighede end waardes benodig vir selfverwesenliking en betekenisvolle deelname in die samelewing as burgers van 'n vry land, ongeag hulle sosio-ekonomiese agtergrond, ras, geslag, fisiese of intellektuele vermoë;
- om toegang to hoër onderrig te verskaf;
- om die oorgang van leerders vanaf onderwysinstellings na die werkplek te fasiliteer; en
- om werkgewers met 'n voldoende profiel van leerdersbevoegdhede te verskaf.

Alhoewel dit verhef is tot die status van 'n politiese ikoon, bly die kurrikulum 'n instrument. Die vaardighede van 'n onderwyser word benodig om hierdie istrument te interpreteer en operasionaliseer in die klaskamer. Die kurrikulum self kan nie die doelwitte hierbo gelys bereik sonder dat die gemeenskap van kurrikulumspesialiste, ontwikkelaars van onderwysmateriaal, onderwysers en assessore die prosess, om die voorgenome kurrikulum die geïmplementeerde kurrikulum te maak, ondersteun en daartoe bydra nie. 'n Kurrikulum kan slaag of misluk, afhangende van die implementering en ongeag die voorgenome beginsels of potensiaal op papier daarvan. Daarom is dit belangrik dat belanghebbendes van die kurrikulum vertroud is en ooreenstem met die volgende beginsels waarop die NKV gebaseer is:

Beginsel	**Implementering**
Sosiale Transformasie	Die regstelling van wanbalanse van die verlede. Die verskaffing van gelyke geleenthede vir almal.
Aktiewe en Kritiese Leer	Aanmoediging van 'n aktiewe en kritiese benadering tot leer. Vermyding van oormatige onkritiese memorisering van gegewe waarhede.
Diepgaande Kennis en Vaardighede	Leerders behaal minimum standaarde van kennis en vaardighede, soos bepaal vir elke graad in elke vak.
Vordering	Inhoud en konteks toon progressie van eenvoudig na kompleks.
Sosiale en Omgewingsgeregtigheid en Menseregte	Praktyke soos in die Grondwet omskryf is, verweef in die onderrig en leer van elk van die vakke.
Waardering vir Inheemse Kennissisteme	Erken die ryk geskiedenis en erfenis van hierdie land.
Geloofwaardigheid, Gehalte en Doeltreffendheid	Verskaffing van onderrig wat wêreldwyd vergelykbaar is i.t.v. kwaliteit.

Hierdie gids is bedoel om waarde en insig toe te voeg tot die bestaande Nasionale Kurrikulum vir Graad 10 Wiskunde, in lyn met die doelwitte en beginsels daarvan. Daar word gehoop dat dit u as die opvoeder sal help om die voorgenome kurrikulum te optimeer en implementeer.

Kurrikulumvereistes en doelwitte

Die belangrikste doelwitte van die kurrikulum hou verband met die leerders wat uit ons opvoedkundestelsel kom. Opvoeders is die belangrikste rolspelers in die uitvoering van die voorgenome kurrikulum. Die kwaliteit van die leerder wat deur hierdie stelsel beweeg, sal egter die bewys wees dat die kurrikulum soos wat dit bedoel en geïmplementeer is, ook sy doelwitte bereik het. Hierdie doelwitte en beginsels beoog om leerders te produseer wat in staat is:

- om probleme te identifiseer en op te los en om besluite te neem deur kritiese en kreatiewe denke;
- om doeltreffend te werk as individue en met ander as lede van 'n span;
- om hulself en hul aktiwiteite verantwoordelik en doeltreffend te organiseer en bestuur;

- om inligting te versamel, te analiseer, te organiseer en krities te evalueer;
- om effektief te kommunikeer deur gebruik te maak van visuele, simboliese en/of taalvaardighede in verskillende vorme;
- om wetenskap en tegnologie doeltreffend en krities te gebruik met verantwoordelikheid teenoor die omgewing en die gesondheid van ander; en
- om begrip van die wêreld as ’n stel verwante stelsels te toon deur te herken dat die kontekste van probleme nie in isolasie bestaan nie.

Die bogenoemde punte kan opgesom word as ’n onafhanklike leerder wat krities en analities kan dink, in staat is om effektief met lede van ’n span te werk, en probleme kan identifiseer en oplos deur middel van effektiewe besluitneming. Dit is ook die uitkoms waarna binne opvoedkundige navorsing verwys word as die “hervormde” benadering eerder as die “tradisionele” benadering waaraan baie opvoeders meer gewoond is. Tradisionele praktyke het hul rol en kan nie heeltemal ten gunste van hervormde praktyke daargelaat word nie. Maar, ten einde meer onafhanklike en wiskundige denkers te produseer, moet die hervorming ideologie deur opvoeders ingeneem word in hul optrede as onderwysers. Hier is ’n tabel wat kan help om u dominante instruksionele praktyk te identifiseer en u probeer help om dit aan te pas (indien nodig), om meer gebalanseerd en in lyn met die hervorming benadering, soos voorgestel deur die NKV, te wees.

	Tradisionele Versus Hervormde Praktyke
Waardes	**Tradisioneel** – fokus op onderrigmateriaal, korrektheid van leerders se antwoorde en wiskundige geldigheid van metodes. **Hervorm** – patrone vind, konsepte verbind, wiskundig kommunikeer en probleemoplossing.
Onderrigmetodes	**Tradisioneel** – verklarend, oordrag van inligting, baie oefen en herhaling, stap vir stap bemeestering van algoritmes. **Hervorm** – Geleide ontdekkingsmetodes, eksplorasie, modellering. Hoë vlak van redenasie is sentraal.
Groepering van Leerders	**Tradisioneel** – oorheersend gelyksoortige groepering. **Hervorm** – oorheersend gemengde vermoëns.

Die vak wiskunde verskaf uiter aard ruim geleentheid om te voldoen aan die hervormde doelwitte. Die definisie van wiskunde moet verstaan en omhels moet word deur die opvoeders betrokke by die onderrig en die leer van die vak. In die navorsing is dit goed gedokumenteer dat ons opvattings oor wat wiskunde is, ’n invloed het op ons benadering tot die onderrig en leer van die vak.

Drie sienings van wiskunde word hier aangebied. Die instrumentalistiese siening van wiskunde aanvaar die standpunt dat wiskunde ’n versameling feite, reëls en vaardighede is wat gebruik word as ’n middel vir ’n doelwit, sonder dat daar noodwendig ’n verband is tussen hierdie komponente. Die Platonistiese siening van wiskunde is dat die vak ’n statiese, maar verenigde liggaam van sekere kennis is, waarbinne wiskunde ontdek word eerder as om geskep te word. Die probleemoplossing siening van wiskunde is dat dit ’n dinamiese, voortdurend ontwikkelende veld van menslike skepping en uitvinding is wat op sigself ’n kulturele produk is. Wiskunde word dus beskou as ’n proses van ondersoek, eerder as ’n voltooide produk. Die resultate bly voortdurend oop vir hersiening. Een voorgestel is dat ’n hiërargiese orde bestaan binne hierdie drie aansigte, met die instrumentalistiese siening op die laagste vlak en die probleemoplossing siening op die hoogste vlak.

Volgens die NKV:

Wiskunde is die studie van hoeveelheid, struktuur, ruimte en verandering. Wiskundiges soek patrone, formuleer nuwe veronderstellings en vestig aksiomatiese stelsels deur die streng deduktiewe afleiding vanaf toepaslik gekose aksiomas en definisies. Wiskunde is ’n menslike aktiwiteit wat deur alle kulture beoefen is, vir duisende jare reeds. Wiskundige probleemoplossing stel ons in staat om die wêreld rondom ons (fisies, sosiaal en ekonomies) te verstaan en, belangrikste van alles, om te leer om kreatief te dink.

Dit stem goed ooreen met die probleemoplossing siening van wiskunde en mag dalk sommige van ons instrumentalistiese of Platonistiese sienings, as ’n statiese versameling van kennis, feite, reëls en vaardighede wat geleer en toegepas moet word, uitdaag. Die NKV probeer om so ’n benadering te ontmoedig en moedig wiskunde-onderwysers aan om op ’n dinamiese en kreatiewe manier hulle leerders as wiskundiges te betrek by ’n proses van studie, begrip, redenering, probleemoplossing en kommunikasie. Hieronder is ’n lys wat u kan help om u lesse aktief te ontwerp in ’n poging om die NKV definisie van wiskunde te omhels en om nader te beweeg aan ’n probleemoplossing konsepsie van die onderwerp. Die aanvaarding van so ’n benadering tot die onderrig en leer van wiskunde sal op sy beurt bydra tot die implementering en realisering van die voorgenome kurrikulum, in terme van die kwaliteit van die leerders wat uit die onderwysstelsel kom.

Aktiwiteit	Voorbeeld
Leerders neem deel aan die oplossing van kontekstuele probleme wat verband hou met hul lewens en vereis dat hulle 'n probleem interpreteer en dan 'n geskikte wiskundige oplossing te vind.	Leerders word gevra om uit te werk watter busdiens die goedkoopste is, gegee die tariewe en die afstand wat hulle wil reis.
Leerders raak betrokke by die oplos van probleme van 'n suiwer wiskundige aard, wat hoërorde denke en die toepoassing van kennis (ni standaard probleme) benodig.	Leerders word gevra om 'n grafiek te teken. Hulle het nog nie 'n spesifieke tekentegniek (byvoorbeeld vir 'n parabool) geleer nie, maar het geleer om die tabelmetode te gebruik om reguit lyne te teken.
Leerders kry geleentheid om oor betekenis te redeneer.	Leerders bespreek hul begrip van konsepte en strategieë vir die oplossing van probleme met mekaar en met die onderwyser.
Leerders word geleer end gevra om situasies op verskeie ekwivalente maniere te verteenwoordig (wiskundige modellering).	Leerders verteenwoordig dieselfde data met behulp van 'n grafiek, 'n tabel en 'n formule om die data voor te stel.
Leerders doen individueel wiskundige ondersoeke in die klas, gelei deur die onderwyser waar nodig.	Elke leerder kry 'n wiskundige probleem (byvoorbeeld om die aantal priemgetalle minder as 50 te vind) wat ondersoek moet word en die oplossing neergeskryf moet word. Leerders werk onafhanklik.
Leerders werk saam as 'n groep/span om ondersoek in te stel of 'n wiskundige probleem op te los.	'n Groep word opdrag gegee om saam te werk aan 'n probleem wat vereis dat hulle patrone in data ondersoek, om veronderstellings te maak en 'n formule vir die patroon te vind.
Leerders doen oefeninge om hulle kennis van konsepte te konsolideer en verskeie vaardighede te bemeester.	Voltooiing van 'n oefening wat roetine prosedures benodig.
Leerders kry geleenthede om die wisselwerking tussen verskillende aspekte van wiskunde te sien en om te sien hoe die verskillende uitkomste verwant is.	Terwyl leerders deur meetkunde probleme werk, word hulle aangemoedig om gebruik te maak van algebra.
Leerders word gevra om probleme vir hulle onderwyser en klasmaats op te stel.	Leerders word gevra 'n algebraïese woordsom op te stel (waarvan hulle ook die oplossing ken), vir die persoon wat langs hulle sit om op te los.

Oorsig van die onderwerpe

Oorsig van onderwerpe en hulle relevansie:

1. Funksies	**Relevansie**
Werk met verwantskappe tussen veranderlikes in terme van numeriese, grafiese, woordeliekse en simboliese voorstellings van funksies. Leerders moet gemaklik tussen hierdie voorstellings (tabelle, grafieke, woorde en formules) kan omskakel. Sluit in lineêre en sommige kwadratiese polinome funksies, eksponensiële funksies, sommige rasionale funksies en trigonometriese funksies. Genereer soveel moontlike grafieke as wat nodig is, aanvanklik deur punt-vir-punt stipping, ondersteun deur beskikbare tegnologie. Maak en toets ververonderstellings en veralgemeen vervolgens skuif en die parameter wat 'n vertikale strek en/of 'n refleksie rondom die x-as teweegbring. Probleemoplossing en grafiekwerk wat die voorgeskrewe funksies betrek.	Funksies vorm 'n sentrale deel van leerders se wiskundige begrip en redenasie-proseese in algebra. Dit is ook uitstekende geleentheid vir kontekstuele wiskundige modelleringsvrae.

2. Getalpatrone, rye en reekse	**Relevansie**
Ondersoek getalpatrone wat lei tot die soort waar daar 'n konstante verskil tussen opeenvolgende terme is en die algemene term dus lineêr is.	Baie wiskunde wentel rondom die identifisering van patrone.

3. Finansies, groei en krimping	**Relevansie**
Gebruik eenvoudige en saamgestelde groei formules $A = P(1 + in)$ en $A = P(1 + i)^n$ om probleme op te los (insluitend rente, huurooreenkomste, inflasie, bevolkingsgroei en ander aldaagse lewensegte probleme). Die implikasies van flukturenede buitelandse wisselkoerse.	Die wiskunde van finansies is baie relevant vir daaglikse en langtermyn finansiële besluite wat leerders sal moet maak vir beleggings, lenings, spaar, begrip van wisselkoerse en die invloed daarvan wêreldwyd.

4. Algebra	Relevansie
Verstaan dat reele getalle irrasionaal of rasionaal kan wees. Vereenvoudig uitdrukkings deur gebruik te maak van die eksponensiële wette vir rasionale eksponente. Stel vas tussen watter twee heelgetalle 'n eenvoudig wortelvorm is. Ronde reele getalle af tot 'n toepaslike akkuraatheisgraad (tot 'n gegewe aantal desimale). Manipuleer algebraïese uitdrukkings deur: 'n tweeterm met 'n dreiterm te vermenigvuldig; drieterme; die verskil en som van twee derdemagte te faktoriseer; te faktoriseer deur groepering in pare en vereenvoudig; optel en aftrek van algebraïese breuke met derdemagte as noemers (beperk tot die som en verskil tussen derdemagte). Los op: lineêre vergelykings; kwadratiese vergelykings; lettervergelykings (verandering van die onderwerp van die formule); eksponensiële vergelykings; lineêre ongelykhede; stelsel van lineêre vergelykings en woordprobleme.	Algebra verskaf die grondslag vir wiskundige leerders om te beweeg van numeriese berekeninge na veralgemeende operasies, vereenvoudiging van uitdrukkings, oplos van vergelykings en gebruik van grafieke en ongelykhede vir oplossing van kontekstuele probleme.

6. Waarskynlikheid	Relevansie
Verheid die relatiewe frekwensie van 'n eksperimentele uitkoms met die teoretiese waarskynlikheid van die uitkoms. Venn-diagramme as 'n hulpmiddel om waarskynlikheidsprobleme op te los. Onderling uitsluitende gebeurtenisse en komplementere gebeurtenisse. Die aard van enige twee gebeurtenisse A en B: $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$.	Hierdie onderwerp is nuttig vir die ontwikkeling van goeie logiese redenasievermoë en vir die opvoeding van leerders in terme van werklike lewenskwessies soos dobbelary en die slaggate daarvan.

7. Euklidiese Meetkunde en Meting	Relevansie
Hersien basiese beginsels wat 'n vorige grade vasgele is. Ondersoek lynsegmente wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind. Einskappe van spesiale vierhoeke. Los probleme op wat volume en oppervlaktes van soliede figure behels (vanuit vorige grade) sowel as sfere, piramides, keels en kombinasies van hierdie voorwerpe.	Die denkprosesse en wiskundige vaardighede met betrekking tot die bewys van veronderstellings en die indentifisering van valse veronderstellings is meer relevant as om die inhoud te studeer. Die oppervlakte en volume in praktiese kontekste soos die ontwerp van kombuise, die teël en verf van kamers, die ontwerp van verpakking, ens. is relevant tot die huidige en toekomstige lewens var leerdeers.

8. Trigonometrie	Relevansie
Definisie van die trigonometriese verhoudings $\sin\theta$, $\cos\theta$ en $\tan\theta$ in reghoeke driehoeke. Brei die definisies van $\sin\theta$, $\cos\theta$ en $\tan\theta$ uit tot $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. Lei af en gebruik waardes van die trigonometriese verhoudings (sonder gebruik van 'n sakrekenaar) vir die spesiale hoeke $\theta \in \{0^\circ\ ;\ 30^\circ\ ;\ 45^\circ\ ;\ 60^\circ\ ;\ 90^\circ\ ;\ \}$ Definieer die resiproke van die trigonometriese verhoudings. Los probleme in twee- en driedimensionele figure op.	Trigonometrie het versleie gebruike in die samelewing, bv. in navigasie, musiek, geografie en die ontwerp en konstruksie van geboue.

9. Analytiese Meetkunde	Relevansie
Stel meetkundige figure in 'n Cartesise koordinaartstelsel voor lei af en pas vir enige twee punte ($x_1; y_1$ en $x_2; y_2$), 'n formule toe vir die berekening van: die afstand tussen die twee punte; die gradiënt van die lynsegment wat die twee punte verbind; voorwaardes vir ewewydige en loodregte lyne; en die koordinaart van die middelpunt van die lynsegment wat die twee punte verbind.	Hierdie afdeling verskaf 'n verdere toegepassing vir leerders se algebraïese en trigonometriese interaksie met die Cartesise vlak. Kunstenaars en die ontwerp en uitleg industrieë maak dikwels gebruik van die inhoud en denkprosesse van hierdie wiskundige onderwerp.

10. Statistiek	Relevansie
Versamel, organiseer en interpreteer eenveranderlike numeriese data om die volgende vas te stel: maatstawwe van sentrale neiging; vyf getal opsomming; mond-en-snor diagramme; en maatstawwe van verspreiding.	Mense word daagliks gekonfronteer met die interpretasie van data wat deur die media verskaf word. Dikwels word data bevooroordeeld of wanvoorgestel binne 'n sekere konteks. In enige soort navorsing is die insameling en hantering van data kernprosesse. Hierdie onderwerp help ook leerders op om meer sosiaal en polities opgevoed te wees ten opsigte van die media.

Wiskunde onderwysers moet ook verseker dat die volgende belangrike spesifieke doelwitte en algemene beginsels toegepas word in wiskunde-aktiwiteite in alle grade:

- Sakrekenaars mag slegs gebruik word om die standaard numeriese berekeninge uit te voer en berekeninge wat met die hand gedoen is, te kontroleer

- Werklike probleme geïntegreer word in alle afdelings, om wiskundige modellering te behou as 'n belangrike fokuspunt van die kurrikulum
- Ondersoeke gee leerders die geleentheid om hul vermoë om meer metodies te wees, om te kan veralgemeen, en om veronderstellings te kan ontwikkel en regverdig en/of bewys.
- Gepaste benaderings- en afrondingsvaardighede moet geleer word en voortdurend aangemoedig word in aktiwiteite.
- Die geskiedenis van wiskunde moet ingewerk word in projekte en take, waar moontlik, om die menslike aspek en ontwikkelende aard van wiskunde te illustreer.
- Kontekstuele probleme moet kwessies met betrekking tot gesondheid, maatskaplike, ekonomiese, kulturele, wetenskaplike, politieke en omgewingskwessies insluit, waar moontlik.
- Konseptuele begrip van "wanneer" en "hoekom" moet ook deel vorm van die tipes probleme.
- Onderrig vir gemengde vermoëns vereis dat opvoeders in staat is om leerders uit te daag en remediërende ondersteuning aan te bied, waar nodig.
- Wanpersepsies wat deur assessering blootgestel word, moet hanteer en reggestel word met behulp van vrae ontwerp deur opvoeders.
- Probleemoplossing en kognitiewe ontwikkeling moet sentraal wees tot alle wiskunde onderrig en leerwerk, sodat leerders hulle kennis doeltreffend kan toepas.

Toekenning van onderrigtyd:

Tydstoekenning vir Wiskunde per week: 4 ure en 30 minute bv. ses 45 minuut periodes per week.

Kwartaal	Onderwerp	Aantal weeks
Kwartaal 1	Algebraiese uitdrukkings	3
	Eksponente	2
	Getalpatrone	1
	Vergelykings en ongelykhede	2
	Trigonometrie	3
Kwartaal 2	Funksies	4
	Trigonometriese funksies	1
	Euklidiese meetkunde	3
	Half-jaar eksamens	3
Kwartaal 3	Analitiese meetkunde	2
	Finansies en groei	2
	Statistiek	2
	Trigonometrie	2
	Euklidiese meetkunde	1
	Meting	1
Kwartaal 4	Waarskynlikheid	2
	Hersiening	4
	Eksamens	3

Sien bladsy 18 van die Kurrikulum- en Assesseringsbeleidsraamwerk vir die volgordebepaling en tempo van onderwerpe.

0.3 Assesering

"Opvoeder assessering is deel van die alledaagse onderrig en leerwerk in die klaskamer. Opvoeders hou besprekings met leerders, lei hulle in hul werk, vra en beantwoord vrae, neem waar, help, moedig aan en daag uit. Daarbenewens merk en hersien hulle geskrewe en ander vorme van werk. Deur middel van hierdie aktiwiteite is hulle voortdurend besig om meer uit te vind oor hulle leerders se vermoëns en prestasies. Hierdie kennis lig dan planne in vir toekomstige werk. Opvoeder assessering behels hierdie deurlopende proses. Dit moet nie gesien word as 'n afsonderlike aktiwiteit wat noodwendig die gebruik van ekstra take of toetse vereis nie."

Soos die aanhaling hierbo suggereer, behoort assessering opgeneem te word as deel van die klaskamerpraktyk, eerder as 'n afsonderlike aktiwiteit. Navorsing gedurende die afgelope tien jaar dui aan dat leerders 'n gevoel kry van wat hulle weet en nie weet nie, van wat hulle hieromtrent kan doen en hoe hulle hieroor voel, vanaf gereelde klaskamerassessering en onderwyser terugvoer. Die onderwyser se persepsies van en benadering tot assessering (beide formele en informele assessering) kan 'n invloed hê op die klaskamerkultuur, wat geskep word met betrekking tot die leerders se verwagtinge van en prestasie in assesseringstake. Literatuur oor klaskamerassessering onderskei tussen twee verskillende doelwitte van assessering: assessering van leer en assessering vir leer.

Assessering van leer is geneig om 'n meer formele assessering te wees en assesseer hoeveel leerders geleer het, of op 'n bepaalde punt in die jaarlikse onderrigplan verstaan. Die NKV bied omvattende riglyne oor die soorte en hoeveelheid van formele assessering wat moet plaasvind binne die onderrigjaar, om die skoolgebaseerde assesseringspunt saam te stel. Die skoolgebaseerde assesseringspunt dra 25% by tot die finale persentasie van 'n leerder se promosiepunt; die einde van die jaar eksamen bepaal die ander 75% van die jaarlikse promosiepunt. Daar word van leerders verwag om 7 formele assesseringstake vir hul skoolgebaseerde assesseringspunt te hê. Die aantal take en hul gewig in die graad 10 wiskunde kurrikulum is hieronder opgesom:

Take			Gewigstoekening (persent)
Skool-gebaseerde Assessering	Kwartaal 1	Toets	20
		Projek/Ondersoek	10
	Kwartaal 2	Projek/Toets	10
		Half-jaar eksamens	30
	Kwartaal 3	Toets	10
		Toets	10
	Kwartaal 4	Toets	10
Skool-gebaseerde Asseseringspunt			100
Skool-gebaseerde Asseseringspunt (as ’n persent van vorderingspunt)			25%
Eindeksamen			75%
Vorderingspunt			100%

Die volgende is ’n kort verduideliking van elk van die assesseringstake ingesluit in die assesseringsprogram hierbo

Toets

Alle wiskunde-opvoeders is vertroud met hierdie vorm van formele assessering. Die toetse sluit ’n verskeidenheid van items/vrae in wat die onderwerpe dek wat reeds voor die toets aangebied is. Die nuwe NKV bepaal ook dat wiskundetoetse vrae wat betrekking het op die volgende vier tipes kognitiewe vlakke insluit:

Kognitiewe vlakke	Beskrywing	Gewigstoekening (persent)
Kennis	Feite herroep Identifisering van die korrekte formules op die inligtingsblad (geen verandering van die onderwerp). Die gebruik van wiskundige feite. Toepaslike gebruik van wiskundige woordeskat.	20
Roetine prosedures	Skatings en toepaslike afronding van getalle Bewyse van voorgeskrewe stellings en afleiding van formules. Identifisering en die direkte gebruik van korrekte formules op die inligtingsblad (geen verandering van die onderwerp) Doen bekende prosedures. Eenvoudige toepassings en berekeninge wat min stappe behels. Afleiding uit gegewe inligting mag betrokke wees. Identifikasie en die gebruik (insluitend die verandering van die onderwerp) van korrekte formules. Oor die algemeen soortgelyk aan die wat in die klas ervar word.	35
Komplekse prosedures	Probleme behels komplekse berekenings en/of hoër redenasie. Daar is dikwels nie ’n duidelike pad na die oplossing. Probleme hoef nie gebaseer te wees op ’n werklike konteks nie. Kan die vorming van beduidende verbinddings tussen verskillende voorstellings behels. Verreis konseptuele begrip. Vereis konseptuele begrip.	30
Probleemoplossing	Voorheen ongesiende nie-roetine probleme (wat nie noodwendig moeilik is nie). Hoër orde begrip en prosesse is dikwels betrokke. Kan die vermoë om die probleem in sy samestellende dele op te breek, vereis.	15

Die uiteensetting van die toetse oor die vier kwartale van die NKV assesseringsprogram word as volg opgesom:

Kwartaal 1: Een toets van ten minste 50 punte en een uur.

Kwartaal 2: Een toets/opdrag van ten minste 50 punte en een uur.

Kwartaal 3: Twee toets van ten minste 50 punte en een uur.

Kwartaal 4: Een toets van ten minste 50 punte en een uur.

Projekte/Ondersoeke

Ondersoeke en projekte bestaan uit oop vrae wat denkprosesse inisiëer en ontwikkel. Die aanleer en ontwikkeling van probleem-vaardighede is 'n noodsaaklike deel van ondersoeke en projekte. Hierdie take bied leerders die geleentheid om ondersoek in te stel, inligting te versamel, resultate te tabuleer, veronderstellings te maak, en hierdie veronderstellings te regverdig of bewys. Voorbeelde van ondersoeke en projekte en moontlike assesseringskale word aangegee in die volgende afdeling oor assessering ondersteuning. Die NKV assesseringsprogram dui aan dat slegs een projek of ondersoek (van ten minste 50 punte) per jaar ingesluit moet word. Alhoewel die projek/ondersoek in die eerste kwartaal aangegee word van die assesseringsskedule, kan dit ook in die tweede kwartaal gedoen word.

Opdragte

Die NKV sluit die volgende take in as goeie voorbeelde van opdragte:

- Oopboe toets
- Vertalingsopdrag
- Foute identifiseer en verbeter
- Korter ondersoek
- Joernaalinskrywing
- Breinkaart (ook bekend as 'n metacog)
- Olimpiade (eerste ronde)
- Wiskunde-handleiding oor 'n hele onderwerp
- Wiskunde tutoriaal op meer komplekse probleemoplossings vrae

Die NKV assesseringsprogram vereis dat 'n opdrag(van ten minste 50 punte) in die tweede kwartaal gegee word. Dit kan 'n kombinasie wees van 'n paar van die voorbeelde hierbo. Meer inligting oor hierdie voorgestelde voorbeelde van opdragte en moontlike assesseringsrubrieke word in die volgende afdeling oor assesseringsondersteuning gegee.

Eksamens

Opvoeders is goed vertroud met hierdie summatiewe vorm van assessering wat gewoonlik tweekeer per jaar gedoen word: die middel-van-die-jaar eksamens en einde-van-jaar eksamens. Dit is soortgelyk aan toetse, maar dek 'n groter verskeidenheid van onderwerpe wat voltooi is voor elke eksamen. Die NKV bepaal dat elke eksamen die vier kognitiewe vlakke sal dek volgens hul aanbevole gewigte soos saamgevat in die afdeling oor toetse. Die volgende tabel gee 'n opsomming van die vereistes en inligting van die NKV vir die twee eksamens.

Eksamen	Punte	Uiteensetting	Inhoud en puntverspreiding
Middel-van-die-jaar eksamens	100 50 + 50	Een vraestel van 2 uur (100 punte) of Twee vraestel - 1 uur (50 punte) en die ander 1 uur (50 punte)	Onderwerpe voltooi
Einde-van-die-jaar eksamen	100	Vraestel 1: 2 uur	Algebra, vergelykings (en ongelykhede) (30 ± 3) Getalpatrone en rye (15 ± 3) Finansies en groei (10 ± 3) Funksies en grafieke (30 ± 3) Waarskynlikheid (15 ± 3)
Einde-van-die-jaar eksamen	100	Vraestel 2: 2 uur	Statistiek (15 ± 3) Analyties meetkunde (15 ± 3) Trigonometrie (40 ± 3) Euklidiese meetkunde en meting (30 ± 3)

In die jaarlikse opsommende onderrigplan van die NKV in Wiskunde vir Graad 10, verskaf die pasaanduider afdeling 'n gedetailleerde model van die voorgestelde onderwerpe wat gedek moet word in elke week van elke kwartaal en die gepaardgaande formele assessering.

Assesering **vir** leer is geneig om meer informeel te wees en fokus op die toepassing van assessering in die loop van die daaglikse klaskameraktiwiteite. Dit sluit in:

1. Nasien van huiswerk
2. Basislynasseserings
3. Diagnostiese assessering
4. Groepwerk
5. Klasbesprekings

6. Mondelinge aanbiedings
7. Self-assessering
8. Eweknie-assessering

Hierdie aktiwiteite word uitgebrei in die volgende afdeling oor assesseringsondersteuning en voorgestelde assesseringskale word voorsien. Waar formele assessering geneig is om die leerder te beperk tot skriftelike assesseringstake, is die informele assessering nodig is om leerders se vordering in verbale wiskundige redenasie- en kommunikasievaardighede te evalueer en aan te moedig. Dit bied ook 'n minder formele assesseringsomgewing wat leerders toelaat om hulleself openlik en eerlik te assesseer, om verantwoordelikheid te neem vir hul eie leer, sonder die swaar las van die prestasie (of punte) komponent. Die assessering-vir-leer aktiwiteite moet ten minste een keer 'n week ingesluit word in die klaskamer-aktiwiteite (as deel van' n les) om te verseker dat die opvoeder in staat is om voortdurend die leerders se begrip van die onderwerpe wat gedek is en hulle doeltreffendheid te evalueer. Dit bemagtig ook die opvoeder om enige moontlike tekortkominge in sy of haar eie onderrig van die onderwerpe te identifiseer.

Assessering ondersteuning

'n Verskeidenheid van verduidelikings, voorbeelde en voorgestelde assesseringskale vir die assessering van leer (formele vorme van assessering) en die assessering vir leer (informele vorme van assessering), wat in die vorige afdeling genoem is, word in hierdie afdeling uiteengesit.

Basislynasseserings

Basislyn- of grondlynassessering is 'n metode vir die vasstelling van:

- die voorkennis waaroor ‘n leerder beskik
- 'n leerder se vlak van kennis oor 'n spesifieke leerarea
- die vaardigheids- en toepassingsvlak wat ‘n leerder toon
- ‘n leerder se vlak van begrip van die verskillende leerareas

Dit is nuttig vir ‘n opvoeder om te weet wat ‘n leerder se individuele vertrekpunt is, ten einde hom/haar te help na 'n meer gevorderde vlak en om sodoende vordering maak. Dit help ook voorkom dat groot "gapings" bestaan in leerders se kennis soos wat hulle beweeg deur die onderwysstelsel. Uitkomsgebaseerde onderwys is 'n meer leerder-gesentreerde benadering as waaraan ons in Suid-Afrika gewoond is; dus moet die klem moet nou verskuif na die vlak van elke individuele leerder, eerder as dié van die hele klas.

Die basislynassessering dien ook as ‘n maatstaf om leerders in staat te stel om meer verantwoordelikheid vir hulle eie leer te neem en hulle eie vordering te monitor. In die tradisionele assesseringstelsel daal die swakker leerders dikwels van 'n gemiddeld van 40% in die eerste kwartaal tot 'n gemiddeld van 30% in die vierde kwartaal as gevolg van 'n toename in die werkslading. Hulle toon dus geen duidelike vordering nie. Basislynassessering gee inligting oor die vlakke wat verbeter kan word en soos die leerder vorder deur 'n afdeling van die werk, kan aangetoon word of die leerder meer kennis, begrip en vaardigheid in daardie gebied verwerf.

Diagnostiese assessering

Dit word gebruik om uit te vind of enige spesifieke probleme bestaan ten opsigte van 'n afdeling van die werk ten einde die leerder te voorsien van toepaslike addisionele hulp en leiding. Die assessering help die opvoeder en die leerder om probleemareas, misverstande, wanopvattings en foutiewe gebruik en interpretasie van notasie te identifiseer.

'n Paar punte om in gedagte te hou:

- Probeer om nie te veel konsepte te toets binne 'n enkele diagnostiese assessering nie.
- Wees selektief in die tipe vrae wat jy kies.
- Diagnostiese assesserings moet met 'n sekere struktuur in gedagte ontwerp word. As 'n opvoeder moet jy besluit presies watter uitkomste jy wil assesseer en die inhoud van die assessering dienooreenkomstig struktureer.
- Die beoordeling is anders gemerk ander toetse wat die punt is nie die fokus nie, maar eerder die tipe foute wat die leerder gemaak het.

Die beoordeling word anders gemerk as ander toetse want die punt is nie die fokus nie, maar eerder die tipe foute wat die leerder gemaak het.

0: dui aan dat die leerder nie die konsep onder die knie het nie en dat daar 'n fundementele wiskundige probleem bestaan.

1: dui aan dat die leerder 'n idee het van die inhoud, maar nie ware begrip van die inhoud of die notasie toon nie.

2: dui op getuienis van 'n mate van begrip deur die leerder, maar verdere konsolidasie is steeds 'n vereiste.

3: dui op 'n duidelike bewys dat die leerder die konsep verstaan en die notasie korrek kan gebruik.

Sakrekenaar werkblad: assessering van diagnostiese vaardighede

1. Bereken:
   a) $242 + 63 =$
   b) $2 - 36 \times (114 + 25) =$
   c) $\sqrt{144 + 25} =$
   d) $\sqrt[4]{729} =$
   e) $-312 + 6 + 879 - 321 + 18\,901 =$
2. Bereken:
   a) $\frac{2}{7} + \frac{1}{3} =$
   b) $2\frac{1}{5} - \frac{2}{9} =$
   c) $-2\frac{5}{6} + \frac{3}{8} =$
   d) $4 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} =$
   e) $\left(\frac{9}{10} - \frac{8}{9}\right) \div \frac{3}{5} =$
   f) $2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) =$
   g) $\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{4}{16}} =$

Self-assessering rubriek:

Naam:

Vraag	**Antwoord**	**ja**	**nee**	**Indien nee, volgorde neer waarin die sleutels gedruk is**
1a				
1b				
1c				
1d				
1e				
Subtotaal				
2a				
2b				
2c				
2d				
2e				
Subtotaal				
Totaal				

Opvoeder-assessering rubriek:

Tipe vaardigheid	**Bemeester**	**Benodig oefening**	**Probleem**
Verhoging na 'n mag			
Vind 'n wortel			
Berekeninge met breuke			
Hakies en volgorde van berekeninge			
Skattings en hoofreken-kontrole			

Riglyne vir assessering van sakrekenaarvaardighede:

Tipe vaardigheid	Onderafdeling	Vrae
Verhoging tot 'n mag	Vierkante en derdemagte Hoer orde magte	1a, 2f 1b
Vind 'n wortel	Vierkants en derdermagswortels Hoer order wortels	1c, 2g 1d
Berekeninge met breuke	Basiese erekeninge Gemengde getalle Negatiewe getalle Kwadree breuke Vierkantswortel van breuke	2a, 2d 2b, 2c 1e, 2c 2f 2g
Hakies en volgende van berekeninge	Korrekte gebruik van hakies of volgorde van berekenininge	1b, 1c, 2e, 2f, 2g
Skattings en hoofrekenkontrole	Algeheel	Almal

Voorgestelde riglyn vir die toekenning van algehele vlakke

Vlak 1

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Die leerder toon nie voldoende hoofrekenskatting en -kontrole vaardighede nie.

Vlak 2

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants-en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.
- Leerder toon 'n mate van hoofrekenskatting en –kontrole tegnieke.

Vlak 3

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen op die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants-en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is ook in staat om hoër-orde magte en wortels te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.
- Leerder werk korrek met negatiewe getalle.
- Leerder is in staat om hakies te gebruik in sekere berekeninge, maar verstaan nog nie ten volle die volgorde van bewerkings wat die sakrekenaar geprogrammeer is om uit te voer nie, vandaar die behoefte aan hakies.
- Leerder is in staat om moontlike foute en probleme in hul berekeninge te identifiseer, maar het hulp nodig om die probleem op te los.

Vlak 4

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen op die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants-en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is ook in staat om hoër-orde-magte en wortels te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.
- Leerder werk korrek met negatiewe getalle.
- Leerder is in staat om korrek te werk met hakies en om die noodsaaklikheid en die gebruik van hakies en die "= sleutel" in berekeninge reg te hanteer volgens die aard van 'n wetenskaplike sakrekenaar.
- Leerder is in staat om moontlike foute en probleme in hul berekeninge te identifiseer en om oplossings hiervoor te vind ten einde by 'n "meer geloofwaardige" antwoord uit te kom.

Ander kort diagnostiese toetse

Dit is kort toetse wat klein hoeveelhede herroeping en toepassing van kennis op 'n dag-tot-dag basis assesseer. Sulke toetse kan vrae oor een of 'n kombinasie van die volgende insluit:

- Definisies
- Stellings

- Meetkunderprobleme
- Formules
- Toepassings
- Gekombineerde vrae

Oefeninge

Dit behels enige werk uit die handboek of 'n ander bron wat aan die leerder gegee word deur die opvoeder om in die klas óf tuis te voltooi. Opvoeders moet leerders aanmoedig om nie mekaar se werk te kopieer nie en moet oplettend en noukeurig wees in die nagaan van hierdie werk. Dit word aanbeveel dat hierdie tipe werk gemerk/gekontroleer sal word met behulp van 'n kontrolelys (hieronder) om die proses vir die opvoeder te bespoedig.

Die punte wat behaal word deur die leerder vir 'n spesifieke stuk werk moet nie gebaseer wees op korrekte of verkeerde antwoorde nie, maar verkieslik op die volgende:

1. die poging van die leerder om antwoorde te produseer.
2. die kwaliteit van die regstellings aan werk wat voorheen verkeerd was.
3. die vermoë van die leerder om die inhoud van 'n paar geselekteerde voorbeelde (hetsy skriftelik of mondeling) te verduidelik.

Die volgende rubriek kan gebruik word om klas- of huiswerkoefeningete assesseer:

Kriteria	**Prestasie-aanduiders**		
	2	**1**	**0**
Werk gedoen	Al die werk gedoen	Gedeeltelik voltooi	Geen werk gedoen
Werk netjies gedoen	Werk netjies gedoen	Sekere werk nie netjies gedoen nie	Slordig en deurmekaar
Regstellings gedoen	Deurgaans alle regstellings gedoen	Ten minste helfte van die restellings gedoen	Geen restellings gedoen
Korrekte wiskundige metode	Deurgaans	Soms	Glad nie
Begrip van wiskundige tegnieke en prosses	Kan konsepte en prosese akkuraat verduidelik	Verduidelikings is dubbelsinnig en nie gefokus nie	Verduidelikings is verwarrend of irrelevant

Joernaalinskrywings

'n Joernaalinskrywing is 'n poging deur 'n leerder om in geskrewe woorde uit te druk wat in Wiskunde gebeur. Dit is belangrik om in staat wees om 'n wiskundige probleem en die oplossing daarvan in die geskrewe taal te verwoord. Dit kan op verskillende maniere gedoen word:

- Vandag in wiskunde het ons geleer...
- Skryf 'n brief aan 'n vriend wat siek was om te verduidelik wat vandag gebeur het in die klas.
- Verduidelik die denkproses agter die poging om 'n spesifieke wiskundeprobleem op te los, bv. skets die grafiek va $y = x^2 - 2x^2 + 1$ en verduidelik hoe om so 'n grafiek te teken.
- Gee 'n oplossing vir 'n probleem, besluit of dit korrek is, en indien nie, verduidelik die moontlike probleme wat ervaar word deur die persoon wat die verkeerde oplossing geskryf het.

'n Joernaal is 'n waardevolle hulpmiddel wat die opvoeder in staat stel om wiskundige wanopvattings van die leerders te identifiseer. Die nasien van hierdie soort oefening kan gesien word as subjektief, maar 'n rubriek kan die taak vereenvoudig.

Die volgende rubriek kan gebruik word om joernaalinskrywings te merk. Die assesseringsrubriek moet aan leerders gegee voor die taak gedoen word.

Taak	**Bevoegd (2 punte)**	**Ontwikkel nog (1 punt)**	**Nog nie ontwikkel (0 punte)**
Voltooi binne tydsbeperking?			
Korrektheid van die verduideliking?			
Korrekte en toepaslike gebruik van wiskundige taal?			
Is die konsep korrek geinterpreteer?			

Vertalings

Vertaling assesseer die leerder se vermoë om woorde te vertaal in wiskundige notasie of om 'n verduideliking van wiskundige konsepte in woorde te gee. Dikwels wanneer leerders wiskundige taal en notasie korrek kan gebruik, toon hulle 'n groter begrip van die konsepte.

Byvoorbeeld:

Skryf die letter van die korrekte uitdrukking langs die ooreenstemmende nommer:

x word met 10 vermeeder	a)	xy
Die produk van x en y	b)	$x-2$
Die som van ’n sekere getal en dubbel daardie getal	c)	x^2
Helfte van ’n sekere getal vermenigvuldig met homself	d)	$\frac{1}{2}\times 2$
Twee minder as x	e)	$x+x+2$
’n Sekere getal vermenigvuldig met homself	f)	x^2

Groep werk

Een van die beginsels in die NKV is om leerders te produseer wat in staat is om effektief te werk in groepsverband. Leerders vind dit oor die algemeen moeilik om te doen, daarom moet hulle aangemoedig word om in klein groepies te werk. Dikwels ontwikkel leerders ‘n beter begrip van konsepte en prosesse wanneer hulle met bystand van hulle maats werk. Slim leerders vind hierdie tipe taak gewoonlik moeilik, en tog is dit belangrik dat hulle leer hoe om te help en effektief te kommunikeer met ander leerders.

Breinkarts of metacogs

’n Metacog of ”breinkaart” is ’n nuttige hulpmiddel. Dit help om idees te koppel en verbindings te vorm van sake wat andersins onverwant voorgekom het. ’n Breinkaart kan gebruik word aan die begin of einde van ’n afdeling ten einde leerders ’n oorsigtelike perspektief van die werk te gee, of as ’n herinnering aan ’n gedeelte van die werk wat reeds afgehandel is. Dit moet beklemtoon word dat dit nie ’n opsomming is nie. Ongeag hoe jy dit gebruik, dit is ’n geleentheid wat ’n leerder gegee word om navorsing te doen in ’n bepaalde veld en te kan toon dat hy/sy ‘n begrip het van die betrokke afdeling.

Dit is ’n oopboek vorm van assessering en leerders kan enige materiaal gebruik wat hulle voel sal kan help. Daar word voorgestel dat hierdie aktiwiteit geoefen word, met behulp van ander onderwerpe, voor ’n breinkaart-toets voorgelê word vir portefeulje-assessering.

Na voltooiing van die beinkaart, moet die leerders in staat wees om insiggewende vrae daaroor te beantwoord. Dit is wat ‘n breinkaart onderskei van ’n gewone opsomming van ’n afdeling van die werk. Leerders moet verwys na hul breinkaart wanneer die vrae beantwoord word, maar mag nie verwys na enige verwysingsmateriaal nie. Hier is ’n paar riglyne om aan leerders te gee waaraan voldoen moet word wanneer ‘n breinkaart saamgestel word, sowel as twee voorbeelde om leerders te help om aan die gang te kom . ’n Assesseringsrubriek word ook voorsien. Dit moet beskikbaar gestel word aan die leerders voor hulle begin om hulle breinkaarte saam te stel. Op die volgende bladsy is ’n modelvraag vir ’n breinkaart, asook ’n paar voorbeelde van vrae wat gevra kan word binne die konteks van die samestelling van ‘n breinkaart oor analitiese meetkunde.

’n Basiese breinkaart word op die volgende wyse saamgestel:

- Skryf die titel/onderwerp van die vak in die middel van die bladsy en trek ’n sirkel daar rondom.
- Vir die eerste hoofopskrif van die onderwerp, trek ’n streep uit die sirkel in enige rigting, en skryf die opskrif bo of onder die lyn.
- Vir die sub-opskrifte van die hoofopskrif, trek lyne vir elke onderafdeling uit die eerste lyn en benoem elkeen.
- Vir individuele feite, trek lyne uit die toepaslike opskrif.

’n Metacog (breinkaart) is ’n mens se persoonlike eiendom. Sodra iemand verstaan hoe om die basiese struktuur saam te stel, kan hulle hulle eie kodering en konvensies ontwikkel om dinge verder te neem, byvoorbeeld hoe om verbande en skakels tussen feite aan te toon. Die volgende wenke kan opvoeders en leerders help om die doeltreffendheid van hul breinkaarte te verbeter:

- Gebruik die enkele woorde of eenvoudige frases vir meer inligting. Oortollige woorde kompliseer die breinkaart en neem onnodige tyd om neer te skryf.
- Gebruik drukskrif: aanmekaar- of onduidelike skrif lees moeiliker en is minder aantreklik om na te kyk.
- Gebruik kleur om verskillende idees te skei - dit sal jou brein help om verskillende idees van mekaar te onderskei waar nodig, en help met visualisering van die breinkaart vir maklike herroepping. Kleur help ook om organisasie te wys.
- Gebruik simbole en diagramme/sketse waar van toepassing. As ’n simbool iets vir jou beteken en meer inligting oordra as woorde, gebruik dit. Prente/foto’s help ook om inligting te onthou.

- Gebruik vorms, sirkels en raampies om brokkies inligting met mekaar te verbind - dit is 'n bykomende hulpmiddels om die groepering van inligting voor te stel.

Gebruik die konsep van analitiese meetkunde as jou onderwerp en konstrueer 'n breinkaart (of metacog) met al die inligting (insluitend terminologie, definisies, formules en voorbeelde) wat jy ken oor die onderwerp van analitiese meetkunde. Moontlike vrae om die leerder te vra na voltooiing van die breinkaart:

- Verduidelik kortliks wat die wiskunde onderwerp van analitiese meetkunde behels.
- Identifiseer en verduidelik die afstandformule, die afleiding daarvan en die gebruik daarvan op jou breinkaart.
- Hoe verskil of stem die berekening van gradiënt in analitiese meetkunde ooreen met die benadering wat gebruik word om die gradiënt te bereken wanneer daar met funksies gewerk word?

'n Voorgestelde eenvoudige rubriek vir nasien van 'n breinkaart:

Taak	**Bevoegd (2 punte)**	**In ontwikkeling (1 punt)**	**Nog nie ontwikkel 1 punte)**
Betyds voltooi			
Hoofopskrifte			
Korrekte teorie (Formules, definisies, terminologie, ens.)			
Verduidelikking			
Leesbaarheid			

10 punte vir die vrae wat gemerk is met behulp van die volgende skaal:

0 - geen poging of 'n totaal verkeerde poging is gemaak

1 - 'n korrekte poging is aangewend, maar die leerder het nie die korrekte antwoord gekry nie

2 - 'n korrekte poging is aangewend en die antwoord is korrek

Ondersoeke

Ondersoeke bestaan uit oop vrae wat denkprosesse inisieer en uitbrei. Die aanleer en ontwikkeling van probleemoplossingsvaardighede is 'n noodsaaklike deel van die uitvoer van ondersoeke.

Dit word voorgestel dat 2 - 3 uur toegelaat word vir hierdie taak. Gedurende die eerste 30 - 45 minute behoort leerders aangemoedig te word om te praat oor die probleem, punte van verwarring uit te klaar, en die aanvanklike hipoteses met ander te bespreek. Die finale skriftelike weergawe moet individueel gedoen word en moet ongeveer vier bladsye beslaan.

Assessering van ondersoeke kan terugvoer of voordragte deur groepe of individue oor die resultate insluit, terwyl die volgende in gedagte gehou word:

- gebruik 'n logiese volgorde in die oplossing van probleme
- die pre-kennis wat nodig is om die probleem op te los
- die korrekte gebruik van wiskundige taal en notasie
- doelgerigtheid van die oplossing
- die kwaliteit van die geskrewe en mondelinge aanbieding

Enkele voorbeelde van voorgestelde assesseringskale ingesluit is op die volgende paar bladsye, gevolg deur 'n seleksie van onderwerpe vir moontlike ondersoeke. Die volgende riglyne moet aan leerders voorsien word voordat hulle 'n ondersoek begin:

Algemene instruksies aan leerders

- Jy kan enige van die gegewe projekte of ondersoeke kies (kyk modelvraag oor ondersoeke).
- Volg die instruksies wat saam met elke taak gegee word noukeurig aangesien dit beskryf hoe die finale produk aangebied moet word.
- Julle mag die probleem in groepe bespreek om kwessies uit te klaar, maar elke individu moet sy/haar eie weergawe op skrif stel.
- Kopiëring van mede-leerders sal meebring dat die taak gediskwalifiseer word.

- Jou opvoeders is 'n bron van hulp vir jou, en al sal hulle nie antwoorde of oplossings verskaf nie, kan hulle genader word vir wenke.

Die ondersoek moet ingehandig word op die datum deur jou opvoeder bepaal. Dit moet ten minste die volgende bevat:

- 'n beskrywing van die probleem
- 'n bespreking van die manier waarop jy te werk gaan om die probleem te hanteer
- 'n beskrywing van die finale resultaat met 'n toepaslike motivering oor die geldigheid van die oplossing
- persoonlike refleksies wat wiskundige of ander lesse wat geleer is, insluit, sowel as die gevoelens wat ervaar is in die ondersoek van die probleem.
- die geskrewe weergawe moet aantreklik en netjies aangebied word op sowat vier A4-bladsye.
- hoewel die gebruik van tegnologie in die aanbieding aangemoedig word, moet die wiskundige inhoud en prosesse die hooffokus bly.

Hier is 'n paar voorbeelde van 'n moontlike rubriek wat gebruik kan word vir die nasien van die ondersoek:

Vlak van prestasie	Kriteria
4	• Bevat 'n volledige antwoord. • Duidelike, samehangende, ondubbelsinnige en elegante verduideliking. • Sluit duidelike en eenvoudige diagramme in waar van toepassing. • Toon begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer die belangrikste elemente van die vraag. • Sluit voorbeelde en teenvoorbeelde in. • Gee sterk ondersteunende argumente. • Gaan verder as die vereistes van die probleem.
3	• Bevat 'n volledige antwoord. • Verduideliking minder elegant, minder volledig. • Toon begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer die belangrikste elemente van die vraag. • Gaan nie verder as die vereistes van die probleem nie.
2	• Bevat 'n onvolledige antwoord. • Verduideliking is nie logies en duidelik nie. • Toon 'n mate van begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer sommige van die belangrikste elemente van die vraag. • Bied argumente aan, maar onvolledig. • Sluit diagramme in, maar onvanpas of onduidelik.
1	• Bevat 'n onvolledige antwoord. • Laat belangrike dele van die vraag of die hele vraag en antwoord weg. • Bevat groot foute. • Gebruik onvanpaste strategieë.
0	• Geen sigbare antwoord of poging.

Mondelinge Assessering

'n Mondelinge assessering behels dat die leerder aan die hele klas of 'n groep of die opvoeder verduidelik wat hy/sy verstaan van 'n konsep of 'n probleem of spesifieke vrae beantwoord. Die fokus hier is op die korrekte gebruik van wiskundige taal deur die leerders; die bondigheid en logiese volgorde van die verduidelikings, sowel as hul kommunikasievaardighede.

Mondelinge gedoen kan op 'n aantal maniere gedoen word:

- 'n Leerder verduidelik die oplossing van 'n huiswerkprobleem wat deur die opvoeder gekies is.
- Die opvoeder vra die leerder 'n spesifieke vraag of 'n stel vrae om seker te maak dat die leerder verstaan en evalueer die leerder op sy/haar verduideliking.
- Die opvoeder neem 'n groep leerders waar wat interaksie het met mekaar en assesseer die leerders op hul bydraes en verduidelikings binne die groep.
- 'n Punt word toegeken aan die groep as geheel, op grond van die antwoord wat enige lid van die groep gee op 'n vraag.

'n Voorbeeld van 'n merkrubriek vir 'n mondeling:

1 - die leerder het die vraag verstaan en probeer om dit te beantwoord

2 - die leerder gebruik die korrekte wiskundige taal

2 - die verklaring van die leerder volg 'n logiese progressie

2 - die leerder se verduideliking is bondig en akkuraat

2 - die leerder toon 'n begrip van die konsep wat verduidelik is

1 - die leerder demonstreer goeie kommunikasievaardighede

Maksimum punt = 10

'n Voorbeeld van 'n eweknie-assesseringsrubriek vir 'n mondeling:

My naam:

Naam van persoon wat ek assesseer:

Kriteria	**Punt toegeken**	**Maksimum punt**
Korrekte antwoord		2
Helderheid en verduideliking		3
Korrektheid van verduideliking		3
Bewyse van begrip		2
Totaal		10

HOOFSTUK 1

Algebraïese uitdrukkings

1.1 Inleiding

- Inhoud wat gedek word in hierdie hoofstuk sluit begrip in van die klassifikasie van getalle as rasionaal of irrasionaal, skatting van die waarde van wortelvorme, afronding, faktorisering en vereenvoudiging.
- Hierdie hoofstuk verskaf baie kernvaardighede wat leerders sal toepas op die res van wiskunde. Maak seker dat leerders voldoende beheer het oor die vaardighede wat gedek word in hierdie hoofstuk.
- Afronding van reëele getalle is 'n belangrike vaardigheid wat leerders dikwels sal gebruik. Maak seker dat leerders heeltemal gemaklik is met hierdie vaardigheid.
- Faktorisering vorm die fondament vir die oplos van vergelykings. Leerders behoort gemaklik te wees met die faktorisering van tweeterme en drieterme.
- Faktorisering behoort die tipes in te sluit wat in graad 9 behandel is, sowel as drieterme, groepering in pare en die som en verskil van twee derdemagte.

1.2 Die reële getalstelsel

1.3 Rasionale en irrasionale getalle

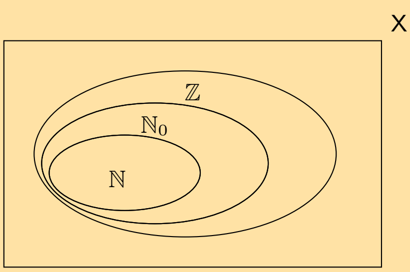
Desimale getalle

Skakel eindigende desimale om na rasionale getalle

Skakel repeterende desimale om in rasionale getalle

Exercise 1 – 1:

1. Die figuur toon die Venn diagram vir die spesiale versamelings $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ en $\mathbb{Z}$.



a) Waar pas die getal $-\frac{12}{3}$ in die diagram?
Oplossing:
Vereenvoudig die breuk: $-\frac{12}{3} = -4$
-4 is 'n heelgetal, so dit val in die versameling $\mathbb{Z}$

b) In die volgende lys is daar twee vals bewerings en een waar bewering. Watter een van die bewerings is **waar**?
   i. Elke heelgetal is 'n natuurlike getal.
   ii. Elke natuurlike getal is 'n telgetal.
   iii. Daar is geen desimale in die telgetalle nie.

Oplossing:

Oorweeg elke opsie noukeurig:

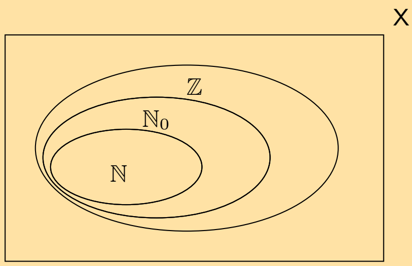
i. Daar is heelgetalle wat nie in die natuurlike getalle val nie (alle negatiewe getalle), so dit is onwaar.

ii. Die natuurlike getalle is $\{1; 2; 3; 4; \ldots\}$ en heelgetalle is $\{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ (die sirkel $\mathbb{N}$ is binne $\mathbb{N}_0$), so as 'n getal 'n natuurlike getal is, moet dit 'n heelgetal wees. Dit is waar.

iii. Heelgetalle $\{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ neem toe in stappe van 1, so daar kan nie enige desimale getalle in die heelgetalle wees nie. Hierdie hersiening is onwaar.

Net (ii) is waar.

2. Die figuur toon die Venn diagram vir die spesiale versamelings $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ en $\mathbb{Z}$.



a) Waar pas die getal $-\frac{1}{2}$ in die diagram?

Oplossing:

$-\frac{1}{2}$ is in die eenvoudigste vorm, dus is dit nie in $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ of $\mathbb{Z}$ nie. Dit is in die ruimte tussen die reghoek en die buitenste ovaal.

b) In die volgende lys is daar twee vals bewerings en een waar bewering. Watter een van die bewerings is **waar**?

i. Elke heelgetal is 'n natuurlike getal.

ii. Elke telgetal is 'n heelgetal.

iii. Daar is geen desimale in die telgetalle nie.

Oplossing:

Oorweeg elke opsie noukeurig:

i. Daar is heelgetalle wat nie in die natuurlike getalle val nie (alle negatiewe getalle), so dit is onwaar.

ii. Die telgetalle is $\{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$ en die heelgetalle is $\{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ (die sirkel $\mathbb{N}_0$ is binne $\mathbb{Z}$) so as 'n getal 'n telgetal is, moet dit 'n heelgetal wees. Dit is waar.

iii. Heelgetalle $\{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ neem toe in stappe van 1, so daar kan nie enige desimale getalle in die heelgetalle wees nie. Hierdie hersiening is onwaar.

Net (ii) is waar.

3. Sê of die volgende getalle reëel, nie-reëel of ongedefinieerd is.

a) $-\sqrt{3}$

Oplossing:

$-\sqrt{3}$ het geen minus teken onder die vierkantswortel (die minus is voor die wortel), is nie verdeel deur nul, so dit is reëel.

b) $\frac{0}{\sqrt{2}}$

Oplossing:

$\frac{0}{\sqrt{2}}$ het geen minus teken onder die vierkantswortel nie, is nie verdeel deur nul, so dit is reëel.

c) $\sqrt{-9}$

Oplossing:

$\sqrt{-9}$ het 'n minus teken onder die vierkantswortel so dit is nie-reëel.

d) $\frac{-\sqrt{7}}{0}$

Oplossing:

$\frac{-\sqrt{7}}{0}$ het deling deur nul en daarom is dit ongedefinieerd.

e) $-\sqrt{-16}$

Oplossing:

$-\sqrt{-16}$ het 'n minus teken onder die vierkantswortel so dit is nie-reëel.

f) $\sqrt{2}$

Oplossing:

$\sqrt{2}$ het geen minus teken onder die vierkantswortel nie, is nie verdeel deur nul, so dit is reëel.

4. Sê of die volgende getalle rasionaal of irrasionaal is. As die getal rasionaal is, sê of dit 'n natuurlike getal, 'n telgetal of 'n heelgetal is.

a) $-\frac{1}{3}$

Oplossing:

$-\frac{1}{3}$ is rasionaal. 'n Breuk van heelgetalle is 'n rasionale getal.

b) 0,651268962154862...

Oplossing:

0,651268962154862... is irrasionaal. Dit kan nie vereenvoudig word tot 'n breuk van heelgetalle nie.

c) $\frac{\sqrt{9}}{3}$

Oplossing:

$\frac{\sqrt{9}}{3}$ is rasionaal, 'n heelgetal, 'n telgetal en 'n natuurlike getal. 'n Heelgetal is 'n rasionale getal.

d) π^2

Oplossing:

π^2 is irrasionaal. Dit kan nie vereenvoudig word tot 'n breuk van heelgetalle nie.

e) π^4

Oplossing:

π^4 is irrasionaal. Dit kan nie vereenvoudig word tot 'n breuk van heelgetalle nie.

f) $\sqrt[3]{19}$

Oplossing:

$\sqrt[3]{19}$ is irrasionaal. Dit kan nie vereenvoudig word tot 'n breuk van heelgetalle nie.

g) $\left(\sqrt[3]{1}\right)^7$

Oplossing:

$\left(\sqrt[3]{1}\right)^7$ is rasionaal, 'n heelgetal, 'n telgetal en 'n natuurlike getal. Dit kan geskryf word as 'n heelgetal.

h) $\pi + 3$

Oplossing:

π is irrasionaal. 3 is rasionaal (dit is 'n telgetal). Enige rasionele getal bygevoeg om enige irrasionele getal is irrasioneel.

Dus $\pi + 3$ is irrasionaal.

i) $\pi +$ 0,858408346

Oplossing:

π is irrasionaal. 0,858408346 is rasionaal (dit is 'n eindigende desimaal). Enige rasionele getal bygevoeg by enige irrasionele getal is irrasioneel.

Dus $\pi +$ 0,858408346 is irrasionaal.

5. As a 'n heelgetal is, b 'n heelgetal is en c is irrasionaal, watter van die volgende is rasionale getalle?

a) $\frac{5}{6}$

Oplossing:

$\frac{5}{6}$ is rasionaal.

b) $\frac{a}{3}$

Oplossing:

Aangesien a'n heelgetal is, is $\frac{a}{3}$ rasionaal.

c) $\frac{-2}{b}$

Oplossing:

Aangesien b'n heelgetal is, is $\frac{-2}{b}$ rasionaal.

Let op dat b nie 0 kan wees nie, want dit maak die breuk ongedefinieerd.

d) $\frac{1}{c}$

Oplossing:
Aangesien c irrasionaal is, is $\frac{1}{c}$ irrasionaal.

6. Vir elk van die volgende waardes van a, sê of $\frac{a}{14}$ rasionaal of irrasionaal is.

   a) 1
   Oplossing:
   $\frac{a}{14} = \frac{1}{14}$ is rasionaal.

   b) -10
   Oplossing:
   $\frac{a}{14} = \frac{-10}{14}$ is rasionaal.

   c) $\sqrt{2}$
   Oplossing:
   $\frac{a}{14} = \frac{\sqrt{2}}{14}$ is irrasionaal.

   d) 2,1
   Oplossing:
   $\frac{a}{14} = \frac{2,1}{14}$ is rasionaal.

7. Oorweeg die volgende lys van getalle:

$$-3\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{-1}\ ;\ -8\frac{4}{5}\ ;\ -\sqrt{8}\ ;\ \frac{22}{7}\ ;\ \frac{14}{0}\ ;\ 7\ ;\ 1{,}\overline{34}\ ;\ 3{,}3231089...\ ;\ 3+\sqrt{2}\ ;\ 9\frac{7}{10}\ ;\ \pi\ ;\ 11$$

   Watter van die getalle is:

   a) natuurlike getalle
   Oplossing:
   Kyk watter van die getalle is in die versameling $\{1; 2; 3; 4; \ldots\}$. Dus 7 en 11 is natuurlike getalle.

   b) irrasionale getalle
   Oplossing:
   Onthou dat rasionale getalle geskryf kan word as $\frac{a}{b}$ waar a en b is heelgetalle. Onthou ook dat rasionale getalle eindigende van desimale getalle insluit. Dus $-\sqrt{8}$; 3,3231089... ; $3+\sqrt{2}$; π is almal irrasionale getalle.

   c) nie-reële getalle
   Oplossing:
   Enige getal wat 'n vierkantswortel van 'n negatiewe getal is, is nie-reëel. Dus net $\sqrt{-1}$ is nie-reëel.

   d) rasionale getalle
   Oplossing:
   Onthou dat rasionale getalle geskryf kan word as $\frac{a}{b}$ waar a en b is heelgetalle. Onthou ook dat rasionale getalle die eindigende desimale getalle insluit. Dus -3 ; 0 ; $-8\frac{4}{5}$; $\frac{22}{7}$; 7 ; $1{,}\overline{34}$; $9\frac{7}{10}$; 11 is almal rasionale getalle.

   e) heelgetalle
   Oplossing:
   Kyk watter van die getalle is in die versameling $\{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Dus -3 ; 7 ; 11 is heelgetalle.

   f) ongedefinieerd
   Oplossing:
   Enige breuk gedeel deur 0 is ongedefinieerd. Dus is net $\frac{14}{0}$ is ongedefinieerd.

8. Vir elk van die volgende getalle:

   - skryf die volgende drie syfers en
   - meld of die getalle rasionaal of irrasionaal is.

   a) $1{,}1\dot{5}$
   Oplossing:
   - Aangesien daar 'n kolletjie bokant die 5 is, weet ons dat die 5 repeteer. Die volgende drie syfers is: 555
   - Rasionaal, daar is 'n repeterende patroon van syfers.

   b) 2,121314...
   Oplossing:
   - Die getal eindig nie (dit is getoon deur die ...). Daar is ook geen aanduiding van 'n repeterende patroon van syfers nie aangesien daar nie 'n kolletjie of 'n strepie oor enige van die getalle is nie. Die volgende drie syfers kan enige syfers wees.
     Let daarop dat terwyl dit lyk asof daar 'n patroon in die syfers is, weet ons nie of die patroon so voortgaan nie.

- Irrasionaal, daar is nie 'n repeterende patroon nie.

c) 1,242244246...

Oplossing:

- Die getal eindig nie (dit is getoon deur die ...). Daar is ook geen aanduiding van 'n repeterende patroon van syfers nie aangesien daar nie 'n kolletjie of 'n strepie oor enige van die getalle is nie. Die volgende drie syfers kan enige syfers wees.

  Let daarop dat terwyl dit lyk asof daar 'n patroon in die syfers is, weet ons nie of die patroon so voortgaan nie.
- Irrasionaal, daar is nie 'n repeterende patroon nie.

d) 3,324354...

Oplossing:

- Die getal eindig nie (dit is getoon deur die ...). Daar is ook geen aanduiding van 'n repeterende patroon van syfers nie aangesien daar nie 'n kolletjie of 'n strepie oor enige van die getalle is nie. Die volgende drie syfers kan enige syfers wees.

  Let daarop dat terwyl dit lyk asof daar 'n patroon in die syfers is, weet ons nie of die patroon so voortgaan nie.
- Irrasionaal, daar is nie 'n repeterende patroon nie.

e) $3{,}3243\dot{5}\dot{4}$

Oplossing:

- Aangesien daar 'n kolletjie oor beide die 5 en die 4 is, weet ons dat die patroon 54 herhaal. Die volgende drie syfers is: 545
- Rasionaal, daar is 'n repeterende patroon.

9. Skryf die volgende as breuke:

a) 0,1

Oplossing:

$0{,}1 = \frac{1}{10}$

b) 0,12

Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}12 &= \frac{1}{10} + \frac{2}{100} \\ &= \frac{10}{100} + \frac{2}{100} \\ &= \frac{12}{100} \\ &= \frac{3}{25} \end{aligned}$$

c) 0,58

Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}58 &= \frac{5}{10} + \frac{8}{100} \\ &= \frac{50}{100} + \frac{8}{100} \\ &= \frac{58}{100} \\ &= \frac{29}{50} \end{aligned}$$

d) 0,2589

Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}2589 &= \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{9}{10\,000} \\ &= \frac{2000}{10\,000} + \frac{500}{10\,000} + \frac{80}{10\,000} + \frac{9}{10\,000} \\ &= \frac{2589}{10\,000} \end{aligned}$$

10. Skryf die volgende deur die repeterende desimale notasie te gebruik:

a) 0,1111111...

Oplossing:

Ons sien dat slegs die syfer 1 herhaal en dus kan ons dit skryf as: $0{,}\dot{1}$.

b) 0,1212121212...

Oplossing:

Daar is 'n herhalende patroon van 12 en dus kan ons hierdie getal skryf as: $0{,}\overline{12}$.

c) 0,123123123123...

Oplossing:

Daar is 'n herhalende patroon van 123 en dus kan ons hierdie getal skryf as: $0{,}\overline{123}$.

d) 0,11414541454145...

Oplossing:

Die patroon 4145 herhaal en dus kan ons hierdie getal skryf as: $0{,}11\overline{4145}$.

11. Skryf die volgende in desimale vorm, deur die repeterende desimale notasie te gebruik:

a) $\frac{25}{45}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
45|\overline{25{,}0000} &= 0 \text{ restand } 25\\
45|\overline{25{,}^{25}0000} &= 5 \text{ restant } 25\\
45|\overline{25{,}^{25}0^{25}000} &= 5 \text{ restant } 25\\
45|\overline{25{,}^{25}0^{25}0^{25}00} &= 5 \text{ restant } 25\\
\frac{25}{45} &= 0{,}5555\ldots\\
&= 0{,}\dot{5}
\end{aligned}$$

b) $\frac{10}{18}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
18|\overline{10{,}0000} &= 0 \text{ restant } 10\\
18|\overline{10{,}^{10}0000} &= 5 \text{ restant } 10\\
18|\overline{10{,}^{10}0^{10}000} &= 5 \text{ restant } 10\\
18|\overline{10{,}^{10}0^{10}0^{10}00} &= 5 \text{ restant } 10\\
\frac{10}{18} &= 0{,}5555\ldots\\
&= 0{,}\dot{5}
\end{aligned}$$

c) $\frac{7}{33}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
33|\overline{7{,}0000} &= 0 \text{ restant } 7\\
33|\overline{7{,}^{7}0000} &= 2 \text{ restant } 4\\
33|\overline{7{,}^{4}0^{4}000} &= 1 \text{ restant } 7\\
33|\overline{7{,}^{7}0^{4}0^{7}00} &= 2 \text{ restant } 4\\
\frac{7}{33} &= 0{,}2121\ldots\\
&= 0{,}\dot{2}\dot{1}
\end{aligned}$$

d) $\frac{2}{3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} &= 2\left(\frac{1}{3}\right)\\ &= 2(0{,}333333...)\\ &= 0{,}666666...\\ &= 0{,}\dot{6}\end{aligned}$$

e) $1\frac{3}{11}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}1\frac{3}{11} &= 1+3\left(\frac{1}{11}\right)\\ &= 1+3(0{,}090909...)\\ &= 1+0{,}27272727...\\ &= 1{,}\overline{27}\end{aligned}$$

f) $4\frac{5}{6}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}4\frac{5}{6} &= 4+5\left(\frac{1}{6}\right)\\ &= 4+5(0{,}1666666...)\\ &= 4+0{,}833333...\\ &= 4{,}8\dot{3}\end{aligned}$$

g) $2\frac{1}{9}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}2\frac{1}{9} &= 2+0{,}1111111...\\ &= 2{,}\dot{1}\end{aligned}$$

12. Skryf die volgende desimale in breukvorm:

a) $0{,}\dot{5}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}x &= 0{,}55555... \text{ en}\\ 10x &= 5{,}55555...\\ 10x - x &= (5{,}55555...) - (0{,}55555...)\\ 9x &= 5\\ \therefore x &= \frac{5}{9}\end{aligned}$$

b) $0{,}6\dot{3}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}10x &= 6{,}3333... \text{ en}\\ 100x &= 63{,}3333...\\ 100x - 10x &= (63{,}3333...) - (6{,}3333...)\\ 99x &= 57\\ \therefore x &= \frac{57}{90}\end{aligned}$$

c) $0,\dot{4}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}4444\ldots \text{ en} \\ 10x &= 4{,}4444\ldots \\ 10x - x &= (4{,}4444\ldots) - (0{,}4444\ldots) \\ 9x &= 4 \\ \therefore x &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

d) $5,\overline{31}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} x &= 5{,}313131\ldots \text{ en} \\ 100x &= 531{,}313131\ldots \\ 100x - x &= (531{,}313131\ldots) - (5{,}313131\ldots) \\ 99x &= 526 \\ \therefore x &= \frac{526}{99} \end{aligned}$$

e) $4,\overline{93}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} x &= 4{,}939393\ldots \text{ en} \\ 100x &= 493{,}939393\ldots \\ 100x - x &= (493{,}939393\ldots) - (4{,}939393\ldots) \\ 99x &= 489 \\ \therefore x &= \frac{163}{33} \end{aligned}$$

f) $3,\overline{93}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} x &= 3{,}939393\ldots \text{ en} \\ 100x &= 393{,}939393\ldots \\ 100x - x &= (393{,}939393\ldots) - (3{,}939393\ldots) \\ 99x &= 390 \\ \therefore x &= \frac{130}{33} \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2GYC	2. 2GYD	3a. 2GYF	3b. 2GYG	3c. 2GYH	3d. 2GYJ
3e. 2GYK	3f. 2GYM	4a. 2GYP	4b. 2GYQ	4c. 2GYS	4d. 2GYT
4e. 2GYV	4f. 2GYW	4g. 2GYX	4h. 2GYR	4i. 2GYN	5. 2GYY
6. 2GYZ	7. 2GZ2	8a. 2GZ3	8b. 2GZ4	8c. 2GZ5	8d. 2GZ6
8e. 2GZ7	9a. 2GZ8	9b. 2GZ9	9c. 2GZB	9d. 2GZC	10a. 2GZD
10b. 2GZF	10c. 2GZG	10d. 2GZH	11a. 2GZJ	11b. 2GZK	11c. 2GZM
11d. 2GZN	11e. 2GZP	11f. 2GZQ	11g. 2GZR	12a. 2GZS	12b. 2GZT
12c. 2GZV	12d. 2GZW	12e. 2GZX	12f. 2GZY		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Exercise 1 – 2:

1. Rond die volgende af tot 3 desimale plekke:

   a) 12,56637061...
   Oplossing:
   Merk die verlangde aantal desimale plekke af: $12{,}566|37061\ldots$. Die laaste syfer moet ondertoe afgerond word: 12,566

   b) 3,31662479...
   Oplossing:
   Merk die verlangde aantal desimale plekke af: $3{,}316|62479\ldots$. Die laaste syfer moet boontoe afgerond word: 3,317.

   c) 0,2666666...
   Oplossing:
   Merk die verlangde aantal desimale plekke af: $0{,}266|6666\ldots$. Die laaste syfer moet boontoe afgerond word: 0,267.

   d) 1,912931183...
   Oplossing:
   Merk die verlangde aantal desimale plekke af: $1{,}912|931183\ldots$. Die laaste syfer moet boontoe afgerond word: 1,913.

   e) 6,32455532...
   Oplossing:
   Merk die verlangde aantal desimale plekke af: $6{,}324|55532\ldots$. Die laaste syfer moet boontoe afgerond word: 6,325.

   f) 0,05555555...
   Oplossing:
   Merk die verlangde aantal desimale plekke af: $0{,}055|55555\ldots$. Die laaste syfer moet boontoe afgerond word: 0,056.

2. Rond elk van die volgende af tot die aantal desimale plekke wat aangedui is:

   a) 345,04399906 tot 4 desimale plekke.
   Oplossing:

   $$345{,}04399906 \approx 345{,}0440$$

   b) 1361,72980445 tot 2 desimale plekke.
   Oplossing:

   $$1361{,}72980445 \approx 1361{,}73$$

   c) 728,00905239 tot 6 desimale plekke.
   Oplossing:

   $$728{,}00905239 \approx 728{,}009052$$

   d) $\frac{1}{27}$ tot 4 desimale plekke.
   Oplossing:
   Ons skryf eers die breuk as 'n desimale en dan kan ons afrond.

   $$\begin{aligned}\frac{1}{27} &= 0{,}037037\ldots \\ &\approx 0{,}0370\end{aligned}$$

   e) $\frac{45}{99}$ tot 5 desimale plekke.
   Oplossing:

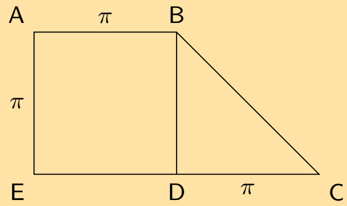
Ons skryf eers die breuk as 'n desimale en dan kan ons afrond.

$$\begin{aligned}\frac{45}{99} &= 0{,}454545\ldots \\ &\approx 0{,}45455\end{aligned}$$

f) $\frac{1}{12}$ tot 2 desimale plekke.
Oplossing:
Ons skryf eers die breuk as 'n desimale en dan kan ons afrond.

$$\begin{aligned}\frac{1}{12} &= 0{,}08333\ldots \\ &\approx 0{,}08\end{aligned}$$

3. Bestudeer die diagram hieronder:



a) Bereken die area van $ABDE$ tot 2 desimale plekke.
Oplossing:
$ABDE$ is 'n vierkant en dus is die area net die lengte gekwadreer.

$$\begin{aligned}A &= l^2 \\ &= \pi^2 \\ &= 9{,}86904\ldots \\ &\approx 9{,}87\end{aligned}$$

b) Bereken die area van BCD tot 2 desimale plekke.
Oplossing:
BCD is 'n reghoekige driehoek en ons weet die loodregte hoogte. Die area is:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}\pi^2 \\ &= 4{,}934802\ldots \\ &\approx 4{,}93\end{aligned}$$

c) Gebruik jou antwoorde in (a) en (b) en bereken die area van $ABCDE$.
Oplossing:
Die area van $ABCDE$ is die som van die areas van $ABDE$ en BCD.

$$\begin{aligned}A &= 9{,}87 + 4{,}93 \\ &\approx 14{,}80\end{aligned}$$

d) Sonder afronding, wat is die area van $ABCDE$?
Oplossing:

$$\begin{aligned}A_{ABCDE} &= A_{ABDE} + A_{BCD} \\ &= l^2 + \frac{1}{2}bh \\ &= \pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 \\ &= 14{,}8044\ldots\end{aligned}$$

4. Gegee $i = \frac{r}{600}$; $r = 7{,}4$; $n = 96$; $P = 200\ 000$.

   a) Bereken i korrek tot 2 desimale plekke.
   Oplossing:

$$\begin{aligned} i &= \frac{r}{600} \\ &= \frac{7{,}4}{600} \\ &= 0{,}01233 \\ &\approx 0{,}01 \end{aligned}$$

   b) Gebruik jou antwoord van (a) en bereken A in $A = P(1+i)^n$.
   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 200\ 000\,(1+0{,}01)^{96} \\ &= 519\ 854{,}59 \end{aligned}$$

   c) Bereken A sonder om jou antwoord in (a) af te rond en vergelyk hierdie antwoord met jou antwoord in (b).
   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ A &= 200\ 000\left(1+\frac{7{,}4}{600}\right)^{96} \\ &= 648\ 768{,}22 \end{aligned}$$

   Daar is 'n verskil van 128 913,63 tussen die antwoord in (b) en die een wat bereken is sonder afronding voor die finale stap.

5. As dit 1 persoon neem om 3 bokse te dra, hoeveel mense is nodig om 31 bokse te dra?
   Oplossing:
   Elke persoon kan 3 bokse te dra. So ons weet 31 deur 3 deel om te bepaal hoeveel mense nodig is om 31 bokse te dra.

$$\frac{31}{3} = 10{,}3333...$$

   Dus 11 mense is nodig om 31 bokse te dra. Ons kan nie 0,333 van 'n mens hê nie, dus rond ons boontoe af tot die naaste heelgetal.

6. As 7 kaartjies R 35,20 kos, hoeveel kos een kaartjie?
   Oplossing:
   Aangesien 7 kaartjies R 35,20 kos, sal 1 kaartjie kos R 35,20 gedeel deur 7.

$$\frac{35{,}20}{7} = 5{,}028571429$$

   Dus, een kaartjie kos R 5,03. Geld behoort afgerond te word tot 2 desimale plekke.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2H22	1b. 2H23	1c. 2H24	1d. 2H25	1e. 2H26	1f. 2H27
2a. 2H28	2b. 2H29	2c. 2H2B	2d. 2H2C	2e. 2H2D	2f. 2H2F
3. 2H2G	4. 2H2H	5. 2H2J	6. 2H2K		

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Exercise 1 – 3:

1. Bepaal tussen watter twee opeenvolgende heelgetalle die volgende getalle lê, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

   a) $\sqrt{18}$
   Oplossing:
   $$4 \text{ en } 5\ (4^2 = 16 \text{ en } 5^2 = 25)$$

   b) $\sqrt{29}$
   Oplossing:
   $$5 \text{ en } 6\ (5^2 = 25 \text{ en } 6^2 = 36)$$

   c) $\sqrt[3]{5}$
   Oplossing:
   $$1 \text{ en } 2\ (1^3 = 1 \text{ en } 2^3 = 8)$$

   d) $\sqrt[3]{79}$
   Oplossing:
   $$4 \text{ en } 5\ (4^3 = 64 \text{ en } 5^3 = 125)$$

   e) $\sqrt{155}$
   Oplossing:
   $$12 \text{ en } 13\ (12^2 = 144 \text{ en } 13^2 = 169)$$

   f) $\sqrt{57}$
   Oplossing:
   $$7 \text{ en } 8\ (7^2 = 49 \text{ en } 8^2 = 64)$$

   g) $\sqrt{71}$
   Oplossing:
   $$8 \text{ en } 9\ (8^2 = 64 \text{ en } 9^2 = 81)$$

   h) $\sqrt[3]{123}$
   Oplossing:
   $$4 \text{ en } 5\ (4^3 = 64 \text{ en } 5^3 = 125)$$

   i) $\sqrt[3]{90}$
   Oplossing:
   $$4 \text{ en } 5\ (4^3 = 64 \text{ en } 5^3 = 125)$$

   j) $\sqrt[3]{81}$
   Oplossing:
   $$4 \text{ en } 5\ (4^3 = 64 \text{ en } 5^3 = 125)$$

2. Evalueer die volgende wortelvorme tot die naaste 1 desimale plek, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

   a) $\sqrt{10}$
   Oplossing:
   Aangesien $3^2 = 9$ en $4^2 = 16$, moet $\sqrt{10}$ tussen 3 en 4 lê. Maar ons let op dat 10 nader is aan 9 as aan 16 en dus sal $\sqrt{10}$ nader wees aan 3 as aan 4.
   3,1 of 3,2 is redelike skattings.

b) $\sqrt{82}$

Oplossing:

Aangesien $9^2 = 81$ en $10^2 = 100$, moet $\sqrt{82}$ tussen 9 en 10 lê. Maar ons let op dat 82 nader is aan 81 as aan 100 en dus sal $\sqrt{82}$ nader wees aan 9 as aan 10.

9,1 is 'n redelike skatting.

c) $\sqrt{15}$

Oplossing:

Aangesien $3^2 = 9$ en $4^2 = 16$, moet $\sqrt{15}$ tussen 3 en 4 lê . Maar ons let op dat 15 nader is aan 16 as aan 9 en dus sal $\sqrt{15}$ nader wees aan 4 as aan 3.

3,9 is 'n redelike skatting.

d) $\sqrt{90}$

Oplossing:

Aangesien $9^2 = 81$ en $10^2 = 100$, moet $\sqrt{90}$ tussen 9 en 10 lê. Maar ons let op dat 90 omtrent halfpad is tussen 81 en 100, dus sal $\sqrt{90}$ halfpad wees tussen 9 en 10.

9,5 is 'n redelike skatting.

3. Oorweeg die volgende lys van getalle:

$\frac{27}{7}$; $\sqrt{19}$; 2π ; 0,45 ; $0,\overline{45}$; $-\sqrt{\frac{9}{4}}$; 6 ; $-\sqrt{8}$; $\sqrt{51}$

Orden al die getalle in toenemende grootte, sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

Oplossing:

Onthou dat negatiewe getalle kleiner is as positiewe getalle. Dit mag jou ook help om die getalle te skat as jy die breuke as desimale skryf. Vir die wortelvorme kan jy skat tussen watter die twee getalle die wortelvorme lê en gebruik dit om jou te help om die getalle te orden.

- $\frac{27}{7} \approx 3{,}857$
- $\sqrt{19}$ lê tussen 4 en 5
- $2\pi \approx 6{,}28$
- $-\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$
- $-\sqrt{8}$ lê tussen -2 en -3
- $\sqrt{51}$ lê tussen 7 en 8

Neem ook kennis dat $0{,}45 < 0{,}\overline{45}$.

Dus: $-\sqrt{8}$; $-\sqrt{\frac{9}{4}}$; 0,45 ; $0,\overline{45}$; $\frac{27}{7}$; $\sqrt{19}$; 6 ; 2π ; $\sqrt{51}$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2H2N	1b. 2H2P	1c. 2H2Q	1d. 2H2R	1e. 2H2S	1f. 2H2T	1g. 2H2V	1h. 2H2W
1i. 2H2X	1j. 2H2Y	2a. 2H2Z	2b. 2H32	2c. 2H33	2d. 2H34	3. 2H35	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.6 Produkte

Vermenigvuldig 'n eenterm met 'n tweeterm

Vermenigvuldig twee tweeterme met mekaar

Vermenigvuldig 'n tweeterm en 'n drieterm

Exercise 1 – 4:

1. Brei die volgende produkte uit:

a) $2y(y+4)$

Oplossing:

$$2y(y+4) = 2y^2 + 8y$$

b) $(y+5)(y+2)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}(y+5)(y+2) &= y^2 + 2y + 5y + 10 \\ &= y^2 + 7y + 10\end{aligned}$$

c) $(2-t)(1-2t)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}(2-t)(1-2t) &= 2 - 4t - t + 2t^2 \\ &= 2t^2 - 5t + 2\end{aligned}$$

d) $(x-4)(x+4)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}(x-4)(x+4) &= x^2 + 4x - 4x - 16 \\ &= x^2 - 16\end{aligned}$$

e) $-(4-x)(x+4)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}-(4-x)(x+4) &= -(4x + 16 - x^2 - 4x) \\ &= -(16 - x^2) \\ &= -16 + x^2 \\ &= x^2 - 16\end{aligned}$$

f) $-(a+b)(b-a)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}-(a+b)(b-a) &= (a+b)(a-b) \\ &= a^2 + ba - ba - 16 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

g) $(2p+9)(3p+1)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}(2p+9)(3p+1) &= 6p^2 + 2p + 27p + 9 \\ &= 6p^2 + 29p + 9\end{aligned}$$

h) $(3k-2)(k+6)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}(3k-2)(k+6) &= 3k^2 + 18k - 2k - 12 \\ &= 3k^2 + 16k - 12\end{aligned}$$

i) $(s+6)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(s+6)^2 &= (s+6)(s+6)\\ &= s^2+6s+6s+36\\ &= s^2+12s+36\end{aligned}$$

j) $-(7-x)(7+x)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}-(7-x)(7+x) &= -(49+7x-7x-x^2)\\ &= -(49-x^2)\\ &= x^2-49\end{aligned}$$

k) $(3x-1)(3x+1)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(3x-1)(3x+1) &= 9x^2+3x-3x-1\\ &= 9x^2-1\end{aligned}$$

l) $(7k+2)(3-2k)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(7k+2)(3-2k) &= 21k-14k^2+6-4k\\ &= -14k^2+17k+6\end{aligned}$$

m) $(1-4x)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(1-4x)^2 &= (1-4x)(1-4x)\\ &= 1-4x-4x+16x^2\\ &= 16x^2-8x+1\end{aligned}$$

n) $(-3-y)(5-y)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(-3-y)(5-y) &= -15+3y-5y+y^2\\ &= y^2-2y-15\end{aligned}$$

o) $(8-x)(8+x)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(8-x)(8+x) &= 64+8x-8x-x^2\\ &= -x^2+64\end{aligned}$$

p) $(9+x)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(9+x)^2 &= (9+x)(9+x)\\ & 81+9x+9x+x^2\\ &= x^2+18x+81\end{aligned}$$

q) $(-7y+11)(-12y+3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(-7y+11)(-12y+3) &= 84y^7 - 21y - 132y + 33\\ &= 84y^2 - 153y + 33\end{aligned}$$

r) $(g-5)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(g-5)^2 &= (g-5)(g-5)\\ &= g^2 - 5g - 5g + 25\\ &= g^2 - 10g + 25\end{aligned}$$

s) $(d+9)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(d+9)^2 &= (d+9)(d+9)\\ &= d^2 + 9d + 9d + 81\\ &= d^2 + 18d + 81\end{aligned}$$

t) $(6d+7)(6d-7)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(6d+7)(6d-7) &= 36d^2 - 42d + 42d - 49\\ &= 36d^2 - 49\end{aligned}$$

u) $(5z+1)(5z-1)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(5z+1)(5z-1) &= 25z^2 - 5z + 5z - 1\\ &= 25z^2 - 1\end{aligned}$$

v) $(1-3h)(1+3h)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(1-3h)(1+3h) &= 1 + 3h - 3h - 9h^2\\ &= 1 - 9h^2\end{aligned}$$

w) $(2p+3)(2p+2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(2p+3)(2p+2) &= 4p^2 + 4p + 6p + 6\\ &= 4p^2 + 10p + 6\end{aligned}$$

x) $(8a+4)(a+7)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(8a+4)(a+7) &= 8a^2 + 56a + 4a + 28\\ &= 8a^2 + 60a + 28\end{aligned}$$

y) $(5r+4)(2r+4)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(5r+4)(2r+4) &= 10r^2 + 20r + 8r + 16\\ &= 10r^2 + 28r + 16\end{aligned}$$

z) $(w+1)(w-1)$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(w+1)(w-1) &= w^2 + w - w - 1 \\
&= w^2 - 1
\end{aligned}
$$

2. Brei die volgende produkte uit:

a) $(g+11)(g-11)$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(g+11)(g-11) &= g^2 + 11g - 11g - 121 \\
&= g^2 - 121
\end{aligned}
$$

b) $(4b-2)(2b-4)$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(4b-2)(2b-4) &= 8b^2 - 16b - 4b + 8 \\
&= 8b^2 - 20b + 8
\end{aligned}
$$

c) $(4b-3)(2b-1)$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(4b-3)(2b-1) &= 8b^2 - 4b - 6b + 3 \\
&= 8b^2 - 10b + 3
\end{aligned}
$$

d) $(6x-4)(3x+6)$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(6x-4)(3x+6) &= 18x^2 + 36x - 12x - 24 \\
&= 18x^2 + 24x - 24
\end{aligned}
$$

e) $(3w-2)(2w+7)$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(3w-2)(2w+7) &= 6w^2 + 21w - 4w - 14 \\
&= 6w^2 + 17w - 14
\end{aligned}
$$

f) $(2t-3)^2$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(2t-3)^2 &= (2t-3)(2t-3) \\
&= 4t^2 - 6t - 6t + 9 \\
&= 4t^2 - 12t + 9
\end{aligned}
$$

g) $(5p-8)^2$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(5p-8)^2 &= (5p-8)(5p-8) \\
&= 25p^2 - 40p - 40p + 64 \\
&= 25p^2 - 80p + 64
\end{aligned}
$$

h) $(4y+5)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(4y+5)^2 &= (4y+5)(4y+5)\\ &= 16y^2+20y+20y+25\\ &= 16y^2+40y+25\end{aligned}$$

i) $(2y^6+3y^5)(-5y-12)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(2y^6+3y^5)(-5y-12) &= -10y^7-24y^6-15y^6-36y^5\\ &= -10y^7-39y^6-36y^5\end{aligned}$$

j) $9(8y^2-2y+3)$
Oplossing:

$$9(8y^2-2y+3) = 72y^2-18y+27$$

k) $(-2y^2-4y+11)(5y-12)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(-2y^2-4y+11)(5y-12) &= -10y^3-20y^2+55y+24y^2+48y-132\\ &= -10y^3+4y^2+103y-132\end{aligned}$$

l) $(7y^2-6y-8)(-2y+2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(7y^2-6y-8)(-2y+2) &= -14y^3+12y^2+16y+14y^2-12y-16\\ &= -14y^3+26y^2+4y-16\end{aligned}$$

m) $(10y+3)(-2y^2-11y+2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(10y+3)(-2y^2-11y+2) &= -20y^3-110y^2+20y-6y^2-33y+6\\ &= -20y^3-116y^2-13y+6\end{aligned}$$

n) $(-12y-3)(2y^2-11y+3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(-12y-3)(2y^2-11y+3) &= -24y^3+132y^2-36y-6y^2+33y-9\\ &= -24y^3+126y^2-3y-9\end{aligned}$$

o) $(-10)(2y^2+8y+3)$
Oplossing:

$$(-10)(2y^2+8y+3) = -20y^2-80y-30$$

p) $(7y+3)(7y^2+3y+10)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(7y+3)(7y^2+3y+10) &= 49y^3+21y^2+70y+21y^2+9y+30\\ &= 49y^3+42y^2+79y+30\end{aligned}$$

q) $(a+2b)(a^2+b^2+2ab)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(a+2b)(a^2+b^2+2ab) &= a^3+ab^2+2a^2b+2a^2b+2b^3+4ab^2\\ &= a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3\end{aligned}$$

r) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(x+y)(x^2-xy+y^2) &= x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^3\\ &= x^3+y^3\end{aligned}$$

s) $3m(9m^2+2)+5m^2(5m+6)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}3m(9m^2+2)+5m^2(5m+6) &= 27m^3+6m+25m^3+30m^2\\ &= 52m^3+6m+30m^2\end{aligned}$$

t) $4x^2(10x^3+4)+4x^3(2x^2+6)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}4x^2(10x^3+4)+4x^3(2x^2+6) &= 40x^5+16x^2+8x^5+24x^3\\ &= 48x^5+16x^2+24x^3\end{aligned}$$

u) $3k^3(k^2+3)+2k^2(6k^3+7)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}3k^3(k^2+3)+2k^2(6k^3+7) &= 3k^5+9k^3+12k^5+14k^2\\ &= 15k^5+9k^3+14k^2\end{aligned}$$

v) $(3x+2)(3x-2)(9x^2-4)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(3x+2)(3x-2)(9x^2-4) &= (9x^2-4)(9x^2-4)\\ &= 81x^4-36x-36x+16\\ &= 81x^4-72x+16\end{aligned}$$

w) $(-6y^4+11y^2+3y)(y+4)(y-4)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(-6y^4+11y^2+3y)(y+4)(y-4) &= (-6y^4+11y^2+3y)(y^2-16)\\ &= -6y^6+96y^4+11y^4-176y^2+3y^3-48y\\ &= -6y^6+107y^4+3y^3-176y^2-48y\end{aligned}$$

x) $(x+2)(x-3)(x^2+2x-3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(x+2)(x-3)(x^2+2x-3) &= (x^2-x-6)(x^2+2x-3)\\ &= x^4+2x^3-3x^2-x^3-2x^2+3x-6x^2-12x+18\\ &= x^4+x^3-11x^2-9x+18\end{aligned}$$

y) $(a+2)^2-(2a-4)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(a+2)^2-(2a-4)^2 &= a^2+4a+4-(4a^2-16a+16)\\ &= a^2+4a+4-4a^2+16a-16\\ &= -3a^2+20a-12\end{aligned}$$

3. Brei die volgende produkte uit:

a) $(2x+3)^2-(x-2)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(2x+3)^2-(x-2)^2 &= 4x^2+12x+9-(x^2-4x+4)\\ &= 4x^2+12x+9-x^2+4x-4\\ &= 3x^2+16x+5\end{aligned}$$

b) $(2a^2-a-1)(a^2+3a+2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(2a^2-a-1)(a^2+3a+2) &= 2a^4+6a^3+4a^2-a^3-3a^2-2a-a^2-3a-2\\ &= 2a^4+5a^3-5a-2\end{aligned}$$

c) $(y^2+4y-1)(1-4y-y^2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(y^2+4y-1)(1-4y-y^2) &= y^2-4y^3-y^4+4y-16y^2-4y^3-1+4y+y^2\\ &= -y^4-8y^3-14y^2+8y-1\end{aligned}$$

d) $2(x-2y)(x^2+xy+y^2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}2(x-2y)(x^2+xy+y^2) &= 2(x^3+x^2y+xy^2-2x^2y-2xy^2-y^3)\\ &= 2(x^3-x^2y-xy^2-y^3)\\ &= 2x^3-2x^2y-2xy^2-2y^3\end{aligned}$$

e) $3(a-3b)(a^2+3ab-b^2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}3(a-3b)(a^2+3ab-b^2) &= 3(a^3+3a^2b-ab^2-3a^2b-9ab^2+3b^3)\\ &= 3(a^3-10ab^2+3b^3)\\ &= 3a^3-30ab^2+9b^3\end{aligned}$$

f) $(2a-b)(2a+b)(2a^2-3ab+b^2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(2a-b)(2a+b)(2a^2-3ab+b^2) &= (4a^2-b^2)(2a^2-3ab+b^2)\\ &= 8a^4-12a^3b+4a^2b^2-2a^2b^2+3ab^3-b^4\\ &= 8a^4-12a^3b+2a^2b^2+3ab^3-b^4\end{aligned}$$

g) $2(3x+y)(3x-y)-(3x-y)^2$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2(3x+y)(3x-y)-(3x-y)^2 &= 2(9x^2-y^2)-9x^2+6xy-y^2\\
&= 18x^2-2y^2-9x^2+6xy-y^2\\
&= 9x^2+6xy-3y^2
\end{aligned}
$$

h) $(x+y)(x-3y)+(2x-y)^2$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(x+y)(x-3y)+(2x-y)^2 &= x^2-3xy+xy-3y^2+4x^2-4xy+y^2\\
&= 5x^2-6xy-2y^2
\end{aligned}
$$

i) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right) &= \frac{x^2}{12}+\frac{4}{3}-\frac{3}{4}+\frac{12}{x^2}\\
&= \frac{x^2}{12}+\frac{16}{12}-\frac{9}{12}+\frac{12}{x^2}\\
&= \frac{x^2}{12}+\frac{7}{12}+\frac{3}{x^2}
\end{aligned}
$$

j) $\left(x-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right)$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\left(x-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right) &= \frac{x^2}{3}+4-\frac{2}{3}-\frac{8}{x^2}\\
&= \frac{x^2}{3}+\frac{12}{3}-\frac{2}{3}-\frac{8}{x^2}\\
&= \frac{x^2}{3}+\frac{10}{3}-\frac{8}{x^2}
\end{aligned}
$$

k) $\frac{1}{2}(10x-12y)+\frac{1}{3}(15x-18y)$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(10x-12y)+\frac{1}{3}(15x-18y) &= 5x-6y+5x-6y\\
&= 10x-12y
\end{aligned}
$$

l) $\frac{1}{2}a(4a+6b)+\frac{1}{4}(8a+12b)$
Oplossing:

$$
\frac{1}{2}a(4a+6b)+\frac{1}{4}(8a+12b) = 2a^2+3ab+2a+3b
$$

4. Wat is die waarde van b, in $(x+b)(x-1)=x^2+3x-4$
Oplossing:

$$
(x+b)(x-1)=x^2-x+bx-b
$$

Van die konstante term, sien ons dat $b=4$. Ons kan die x term kontroleer: $-x+4x=3x$.

5. Wat is die waarde van g, in $(x-2)(x+g)=x^2-6x+8$
Oplossing:

$$
(x-2)(x+g)=x^2+gx-2x-2g
$$

Van die konstante term, sien ons dat $-2g=8$, dus $g=-4$. Ons kan die x term kontroleer: $-4x-2x=-6x$.

6. In $(x-4)(x+k) = x^2 + bx + c$:

   a) Vir watter van hierdie waardes van k sal b positief wees?
   $-3; -1; 0; 3; 5$
   Oplossing:

   $$(x-4)(x+k) = x^2 + kx - 4x - 4k$$

   Die x term is $kx - 4x$ so vir b om positief te wees $k > 4$. Dus $k = 5$.

   b) Vir watter van hierdie waardes van k sal c positief wees?
   $-3; -1; 0; 3; 5$
   Oplossing:

   $$(x-4)(x+k) = x^2 + kx - 4x - 4k$$

   Die konstante term is $-4k$, dus vir c om positief te wees moet $k < 0$. Dus $k = -3$ of $k = -1$.

   c) Vir watter reële waardes van k sal c positief wees?
   Oplossing:
   Van die vorige vraag ons sien dat $k < 0$ sal c positief te maak.

   d) Vir watter waardes van k sal b positief wees?
   Oplossing:
   Van vorige ons sien dat $k > 4$ sal b positief te maak.

7. Antwoord die volgende:

   a) Brei $\left(x + \frac{4}{x}\right)^2$ uit.
   Oplossing:

   $$\begin{aligned}\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 &= \left(x + \frac{4}{x}\right)\left(x + \frac{4}{x}\right) \\ &= x^2 + 8 + \frac{16}{x^2}\end{aligned}$$

   b) Gegee dat $\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 = 14$, bepaal die waarde van $x^2 + \frac{16}{x^2}$ sonder om x op te los.
   Oplossing:

   $$\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 = x^2 + 8 + \frac{16}{x^2}$$

   Nou sien ons dat die bogenoemde uitdrukking ook geskryf kan word as $x^2 + \frac{16}{x^2} + 8$. Aangesien $\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 = 14$ kry ons:

   $$\begin{aligned}14 &= x^2 + 8 + \frac{16}{x^2} \\ 14 - 8 &= x^2 + \frac{16}{x^2} \\ 6 &= x^2 + \frac{16}{x^2}\end{aligned}$$

8. Antwoord die volgende:

   a) Brei $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$ uit.
   Oplossing:

   $$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$$

b) Gegee dat $\left(a+\frac{1}{a}\right)=3$, bepaal die waarde van $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ sonder om a op te los.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 &= 3^2\\ &= 9\end{aligned}$$

c) Gegee dat $\left(a-\frac{1}{a}\right)=3$, bepaal die waarde van $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ sonder om a op te los.

Oplossing:

Neem kennis dat:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = a^2+2+\frac{1}{a^2}$$

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 = a^2-2+\frac{1}{a^2}$$

Vervolgens, let daarop dat as ons 4 byvoeg tot $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$ ons $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ kry. Dus:

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 &= a^2-2+\frac{1}{a^2}+4\\ &= 3^2+4\\ &= 9+4\\ &= 13\end{aligned}$$

9. Antwoord die volgende:

a) Brei $\left(3y+\frac{1}{2y}\right)^2$ uit.

Oplossing:

$$\left(3y+\frac{1}{2y}\right)^2 = 9y^2+3+\frac{1}{4y^2}$$

b) Gegee dat $3y+\frac{1}{2y}=4$, bepaal die waarde van $\left(3y+\frac{1}{2y}\right)^2$ sonder om y op te los.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(3y+\frac{1}{2y}\right)^2 &= 4^2\\ &= 16\end{aligned}$$

10. Antwoord die volgende:

a) Brei $\left(a+\frac{1}{3a}\right)^2$ uit.

Oplossing:

$$\left(a+\frac{1}{3a}\right)^2 = a^2+\frac{2}{3}+\frac{1}{9a^2}$$

b) Brei $\left(a+\frac{1}{3a}\right)\left(a^2-\frac{1}{3}+\frac{1}{9a^2}\right)$ uit.

Oplossing:

$$\left(a + \frac{1}{3a}\right)\left(a^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9a^2}\right) = a^3 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{9a} + \frac{1}{3}a - \frac{1}{9a} + \frac{1}{27a^3}$$
$$= a^3 + \frac{1}{27a^3}$$

c) Gegee dat $a + \frac{1}{3a} = 2$, bepaal die waarde van $a^3 + \frac{1}{27a^3}$ sonder om a op te los.

Oplossing:

$$\begin{aligned} a^3 + \frac{1}{27a^3} &= \left(a + \frac{1}{3a}\right)\left(a^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9a^2}\right) \\ &= 2\left(a^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9a^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9a^2} &= \left(a + \frac{1}{3a}\right)^2 - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 + \frac{1}{27a^3} &= 2(3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2H37	1b. 2H38	1c. 2H39	1d. 2H3B	1e. 2H3C	1f. 2H3D	1g. 2H3F	1h. 2H3G
1i. 2H3H	1j. 2H3J	1k. 2H3K	1l. 2H3M	1m. 2H3N	1n. 2H3P	1o. 2H3Q	1p. 2H3R
1q. 2H3T	1r. 2H3V	1s. 2H3W	1t. 2H3X	1u. 2H3Y	1v. 2H3Z	1w. 2H42	1x. 2H43
1y. 2H44	1z. 2H45	2a. 2H46	2b. 2H48	2c. 2H49	2d. 2H4B	2e. 2H4C	2f. 2H4D
2g. 2H4F	2h. 2H4G	2i. 2H3S	2j. 2H4H	2k. 2H4J	2l. 2H4K	2m. 2H4M	2n. 2H4N
2o. 2H4P	2p. 2H4Q	2q. 2H4R	2r. 2H4S	2s. 2H4T	2t. 2H4V	2u. 2H4W	2v. 2H4X
2w. 2H4Y	2x. 2H4Z	2y. 2H52	3a. 2H53	3b. 2H54	3c. 2H55	3d. 2H56	3e. 2H57
3f. 2H58	3g. 2H59	3h. 2H5B	3i. 2H5C	3j. 2H5D	3k. 2H5F	3l. 2H5G	4. 2H5H
5. 2H5J	6. 2H5K	7. 2H5M	8. 2H5N	9. 2H5P	10. 2H5Q		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.7 Faktorisering

Gemeenskaplike, of gemene, faktore

Exercise 1 – 5:

Faktoriseer:

1. $12x + 32y$

   Oplossing:

$$12x + 32y = 4(3x + 8y)$$

2. $-2ab^2 - 4a^2b$

   Oplossing:

$$-2ab^2 - 4a^2b = -2ab(b + 2a)$$

3. $18ab - 3bc$
   Oplossing:

$$18ab - 3bc = 3b(6a - c)$$

4. $12kj + 18kq$
   Oplossing:

$$12kj + 18kq = 6k(2j + 3q)$$

5. $-12a + 24a^3$
   Oplossing:

$$-12a + 24a^3 = 12a(-1 + 2a^2)$$

6. $-2ab - 8a$
   Oplossing:

$$-2ab - 8a = -2a(b + 4)$$

7. $24kj - 16k^2j$
   Oplossing:

$$24kj - 16k^2j = 8kj(3 - 2k)$$

8. $-a^2b - b^2a$
   Oplossing:

$$-a^2b - b^2a = -ab(a + b)$$

9. $72b^2q - 18b^3q^2$
   Oplossing:

$$72b^2q - 18b^3q^2 = 18b^2q(4 - bq)$$

10. $125x^6 - 5y^2$
    Oplossing:

$$\begin{aligned} 125x^6 - 5y^2 &= 5(25x^6 - y^2) \\ &= 5(5x^3 - y)(5x^3 + y) \end{aligned}$$

11. $6x^2 + 2x + 10x^3$
    Oplossing:

$$6x^2 + 2x + 10x^3 = 2x(3x + 1 + 5x^2)$$

12. $2xy^2 + xy^2z + 3xy$
    Oplossing:

$$2xy^2 + xy^2z + 3xy = xy(2y + yz + 3)$$

13. $12k^2j + 24k^2j^2$
    Oplossing:

$$12k^2j + 24k^2j^2 = 12k^2j(1 + 2j)$$

14. $3a^2 + 6a - 18$
    Oplossing:

$$3a^2 + 6a - 18 = 3(a^2 + 2a - 6)$$

15. $7a + 4$
    Oplossing:

$$7a + 4$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2H5S	2. 2H5T	3. 2H5V	4. 2H5W	5. 2H5X	6. 2H5Y
7. 2H5Z	8. 2H62	9. 2H63	10. 2H64	11. 2H65	12. 2H66
13. 2H67	14. 2H68	15. 2H69			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Verskil van twee vierkante

Exercise 1 – 6:

Faktoriseer:

1. $4(y-3) + k(3-y)$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} 4(y-3) + k(3-y) &= 4(y-3) - k(y-3) \\ &= (y-3)(4-k) \end{aligned}$$

2. $a^2(a-1) - 25(a-1)$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} a^2(a-1) - 25(a-1) &= (a-1)(a^2-25) \\ &= (a-1)(a-5)(a+5) \end{aligned}$$

3. $bm(b+4) - 6m(b+4)$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} bm(b+4) - 6m(b+4) &= (b+4)(bm-6m) \\ &= (b+4)(m)(b-6) \end{aligned}$$

4. $a^2(a+7) + 9(a+7)$
   Oplossing:

$$a^2(a+7) + 9(a+7) = (a+7)(a^2+9)$$

5. $3b(b-4) - 7(4-b)$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} 3b(b-4) - 7(4-b) &= 3b(b-4) + 7(b-4) \\ &= (b-4)(3b+7) \end{aligned}$$

6. $3g(z+6) + 2(6+z)$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} 3g(z+6) + 2(6+z) &= 3g(z+6) + 2(z+6) \\ &= (z+6)(3g+2) \end{aligned}$$

7. $4b(y+2)+5(2+y)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 4b(y+2)+5(2+y) &= 4b(y+2)+5(y+2) \\ &= (y+2)(4b+5) \end{aligned}$$

8. $3d(r+5)+14(5+r)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3d(r+5)+14(5+r) &= 3d(r+5)+14(r+5) \\ &= (r+5)(3d+14) \end{aligned}$$

9. $(6x+y)^2-9$
Oplossing:

$$(6x+y)^2-9=(6x+y-3)(6x+y+3)$$

10. $4x^2-(4x-3y)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 4x^2-(4x-3y)^2 &= (2x+4x-3y)(2x-(4x-3y)) \\ &= (6x-3y)(3y-2x) \\ &= 3(2x-y)(3y-2x) \end{aligned}$$

11. $16a^2-(3b+4c)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 16a^2-(3b+4c)^2 &= (4a+3b+4c)(4a-(3b+4c)) \\ &= (4a+3b+4c)(4a-3b-4c) \end{aligned}$$

12. $(b-4)^2-9(b-5)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (b-4)^2-9(b-5)^2 &= (b-4-3(b-5))(b-4+3(b-5)) \\ &= (-2b+11)(4b-19) \end{aligned}$$

13. $4(a-3)^2-49(4a-5)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 4(a-3)^2-49(4a-5)^2 &= (2(a-3)-7(4a-5))(2(a-3)+7(4a-5)) \\ &= (2a-6-28a+35)(2a-6+28a-35) \\ &= (29-26a)(30a-41) \end{aligned}$$

14. $16k^2-4$
Oplossing:

$$16k^2-4=(4k-2)(4k+2)$$

15. $a^2b^2c^2-1$
Oplossing:

$$a^2b^2c^2-1=(abc-1)(abc+1)$$

16. $\frac{1}{9}a^2-4b^2$
Oplossing:

$$\frac{1}{9}a^2-4b^2=\left(\frac{1}{3}a-2b\right)\left(\frac{1}{3}a+2b\right)$$

17. $\frac{1}{2}x^2 - 2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 - 2 &= 2\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\end{aligned}$$

18. $y^2 - 8$
Oplossing:
Neem kennis dat $\left(\sqrt{8}\right)^2 = 8$

$$y^2 - 8 = (y - \sqrt{8})(y + \sqrt{8})$$

19. $y^2 - 13$
Oplossing:
Neem kennis dat $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$

$$y^2 - 13 = (y - \sqrt{13})(y + \sqrt{13})$$

20. $a^2(a - 2ab - 15b^2) - 9b^2(a^2 - 2ab - 15b^2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}a^2(a - 2ab - 15b^2) - 9b^2(a^2 - 2ab - 15b^2) &= (a^2 - 2ab - 15b^2)(a^2 - 9b^2)\\ &= (a - 5b)(a + 3b)(a - 3b)(a + 3b)\\ &= (a - 3b)(a - 5b)(a + 3b)^2\end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2H6C	2. 2H6D	3. 2H6F	4. 2H6G	5. 2H6H	6. 2H6J	7. 2H6K	8. 2H6M
9. 2H6N	10. 2H6P	11. 2H6Q	12. 2H6R	13. 2H6S	14. 2H6T	15. 2H6V	16. 2H6W
17. 2H6X	18. 2H6Y	19. 2H6Z	20. 2H72				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Faktorisering deur groepering in pare

Exercise 1 – 7:

Faktoriseer die volgende:

1. $6d - 9r + 2t^5d - 3t^5r$
Oplossing:

$$\begin{aligned}6d - 9r + 2t^5d - 3t^5r &= 3(2d - 3r) + t^5(2d - 3r)\\ &= (2d - 3r)(3 + t^5)\end{aligned}$$

2. $9z - 18m + b^3z - 2b^3m$
Oplossing:

$$\begin{aligned}9z - 18m + b^3z - 2b^3m &= 9(z - 2m) + b^3(z - 2m)\\ &= (z - 2m)(9 + b^3)\end{aligned}$$

3. $35z - 10y + 7c^5z - 2c^5y$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 35z - 10y + 7c^5z - 2c^5y &= 5(7z - 2y) + c^5(7z - 2y) \\ &= (7z - 2y)(5 + c^5) \end{aligned}$$

4. $6x + a + 2ax + 3$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 6x + a + 2ax + 3 &= 6x + 3 + a + 2ax \\ &= 3(2x + 1) + a(2x + 1) \\ &= (3 + a)(2x + 1) \end{aligned}$$

5. $x^2 - 6x + 5x - 30$
Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5x - 30 &= x(x - 6) + 5(x - 6) \\ &= (x + 5)(x - 6) \end{aligned}$$

6. $5x + 10y - ax - 2ay$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 5x + 10y - ax - 2ay &= 5(x + 2y) - a(x + 2y) \\ &= (5 - a)(x + 2y) \end{aligned}$$

7. $a^2 - 2a - ax + 2x$
Oplossing:

$$\begin{aligned} a^2 - 2a - ax + 2x &= a(a - 2) - x(a - 2) \\ &= (a - x)(a - 2) \end{aligned}$$

8. $5xy - 3y + 10x - 6$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 5xy - 3y + 10x - 6 &= y(5x - 3) + 2(5x - 3) \\ &= (y + 2)(5x - 3) \end{aligned}$$

9. $ab - a^2 - a + b$
Oplossing:

$$\begin{aligned} ab - a^2 - a + b &= -a^2 - a + ab + b \\ &= -a(a + 1) + b(a + 1) \\ &= (-a + b)(a + 1) \end{aligned}$$

10. $14m - 4n + 7jm - 2jn$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 14m - 4n + 7jm - 2jn &= 2(7m - 2n) + j(7m - 2n) \\ &= (7m - 2n)(2 + j) \end{aligned}$$

11. $28r - 20x + 7gr - 5gx$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 28r - 20x + 7gr - 5gx &= 4(7r - 5x) + g(7r - 5x) \\ &= (7r - 5x)(4 + g) \end{aligned}$$

12. $25d - 15m + 5yd - 3ym$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 25d - 15m + 5yd - 3ym &= 5(5d - 3m) + y(5d - 3m) \\ &= (5d - 3m)(5 + y) \end{aligned}$$

13. $45q - 18z + 5cq - 2cz$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 45q - 18z + 5cq - 2cz &= 9(5q - 2z) + c(5q - 2z) \\ &= (5q - 2z)(9 + c) \end{aligned}$$

14. $6j - 15v + 2yj - 5yv$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 6j - 15v + 2yj - 5yv &= 3(2j - 5v) + y(2j - 5v) \\ &= (2j - 5v)(3 + y) \end{aligned}$$

15. $16a - 40k + 2za - 5zk$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 16a - 40k + 2za - 5zk &= 8(2a - 5k) + z(2a - 5k) \\ &= (2a - 5k)(8 + z) \end{aligned}$$

16. $ax - bx + ay - by + 2a - 2b$
Oplossing:

$$\begin{aligned} ax - bx + ay - by + 2a - 2b &= x(a - b) + y(a - b) + 2(a - b) \\ &= (a - b)(x + y + 2) \end{aligned}$$

17. $3ax + bx - 3ay - by - 9a - 3b$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3ax + bx - 3ay - by - 9a - 3b &= x(3a + b) - y(3a + b) - 3(3a + b) \\ &= (3a + b)(x - y - 3) \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2H73 2. 2H74 3. 2H75 4. 2H76 5. 2H77 6. 2H78 7. 2H79 8. 2H7B
9. 2H7C 10. 2H7D 11. 2H7F 12. 2H7G 13. 2H7H 14. 2H7J 15. 2H7K 16. 2H7M
17. 2H7N

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Faktoriseer 'n kwadratiese drieterm

Algemene prosedure vir die faktorisering van 'n drieterm

Exercise 1 – 8:

Faktoriseer die volgende:

1. $x^2 + 8x + 15$
   Oplossing:

$$x^2 + 8x + 15 = (x+5)(x+3)$$

2. $x^2 + 9x + 8$
   Oplossing:

$$x^2 + 9x + 8 = (x+8)(x+1)$$

3. $x^2 + 12x + 36$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 + 12x + 36 &= (x+6)(x+6) \\ &= (x+6)^2 \end{aligned}$$

4. $2h^2 + 5h - 3$
   Oplossing:

$$2h^2 + 5h - 3 = (h+3)(2h-1)$$

5. $3x^2 + 4x + 1$
   Oplossing:

$$3x^2 + 4x + 1 = (x+1)(3x+1)$$

6. $3s^2 + s - 10$
   Oplossing:

$$3s^2 + s - 10 = (s+2)(3s-5)$$

7. $x^2 - 2x - 15$
   Oplossing:

$$x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5)$$

8. $x^2 + 2x - 3$
   Oplossing:

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

9. $x^2 + x - 20$
   Oplossing:

$$x^2 + x - 20 = (x+5)(x-4)$$

10. $x^2 - x - 20$
    Oplossing:

$$x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4)$$

11. $2x^2 - 22x + 20$
    Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 22x + 20 &= 2(x^2 + 11x + 10) \\ &= 2(x+1)(x+10) \end{aligned}$$

12. $6a^2 + 14a + 8$
    Oplossing:

$$\begin{aligned} 6a^2 + 14a + 8 &= 2(3a^2 + 7a + 4) \\ &= 2\,(a+1)\,(3a+4) \end{aligned}$$

13. $6v^2 - 27v + 27$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 6v^2 - 27v + 27 &= 3(2v^2 - 9v + 9) \\ &= 3\,(2v - 3)\,(v - 3) \end{aligned}$$

14. $6g^2 - 15g - 9$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 6g^2 - 15g - 9 &= 3(2g^2 - 5g - 3) \\ &= 3\,(g - 3)\,(2g + 1) \end{aligned}$$

15. $3x^2 + 19x + 6$

Oplossing:

$$3x^2 + 19x + 6 = (3x + 1)(x + 6)$$

16. $3x^2 + 17x - 6$

Oplossing:

$$3x^2 + 17x - 6 = (3x - 1)(x + 6)$$

17. $7x^2 - 6x - 1$

Oplossing:

$$7x^2 - 6x - 1 = (7x + 1)(x - 1)$$

18. $6x^2 - 15x - 9$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 15x - 9 &= 3(2x^2 - 5x - 3) \\ &= 3(2x + 1)(x - 3) \end{aligned}$$

19. $a^2 - 7ab + 12b$

Oplossing:

$$a^2 - 7ab + 12b^2 = (a - 4b)(a - 3b)$$

20. $3a^2 + 5ab - 12b^2$

Oplossing:

$$3a^2 + 5ab - 12b^2 = (3a - 4b)(a + 3b)$$

21. $98x^4 + 14x^2 - 4$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 98x^4 + 14x^2 - 4 &= 2(49x^4 - 7x^2 - 2) \\ &= 2((7x + 2)(7x - 1)) \end{aligned}$$

22. $(x - 2)^2 - 7(x - 2) + 12$

Oplossing:

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 - 7(x - 2) + 12 &= ((x - 2) - 4)((x - 2) - 3) \\ &= (x - 6)(x - 5) \end{aligned}$$

23. $(a - 2)^2 - 4(a - 2) - 5$

Oplossing:

$$\begin{aligned} (a - 2)^2 - 4(a - 2) - 5 &= ((a - 2) - 5)((a - 2) + 1) \\ &= (a - 7)(a - 1) \end{aligned}$$

24. $(y+3)^2 - 3(y+3) - 18$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(y+3)^2 - 3(y+3) - 18 &= ((y+3)-6)((y+3)+3)\\ &= (y-3)(y+6)\end{aligned}$$

25. $3(b^2+5b)+12$
Oplossing:

$$\begin{aligned}3(b^2+5b)+12 &= 3(b^2+5b)+3(4)\\ &= 3(b^2+5b+4)\\ &= 3(b+4)(b+1)\end{aligned}$$

26. $6(a^2+3a)-168$
Oplossing:

$$\begin{aligned}6(a^2+3a)-168 &= 6(a^2+3a)-6(28)\\ &= 6(a^2+3a-28)\\ &= 6(a+7)(a-4)\end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2H7Q	2. 2H7R	3. 2H7S	4. 2H7T	5. 2H7V	6. 2H7W
7. 2H7X	8. 2H7Y	9. 2H7Z	10. 2H82	11. 2H83	12. 2H84
13. 2H85	14. 2H86	15. 2H87	16. 2H88	17. 2H89	18. 2H8B
19. 2H8C	20. 2H8D	21. 2H8F	22. 2H8G	23. 2H8H	24. 2H8J
25. 2H8K	26. 2H8M				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Som en verskil van twee derdemagte

Exercise 1 – 9:

Faktoriseer:

1. $w^3 - 8$
Oplossing:

$$w^3 - 8 = (w-2)(w^2+2w+4)$$

2. $g^3 + 64$
Oplossing:

$$g^3 + 64 = (g+4)(g^2-4g+16)$$

3. $h^3 + 1$
Oplossing:

$$h^3 + 1 = (h+1)(h^2-h+1)$$

4. $x^3 + 8$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} x^3 + 8 &= (x+2)[(x)^2 - (x)(2) + (2)^2] \\ &= (x+2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

5. $27 - m^3$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} 27 - m^3 &= (3-m)[(3)^2 + (3)(m) + (m)^2] \\ &= (3-m)(9 + 3m + m^2) \end{aligned}$$

6. $2x^3 - 2y^3$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2y^3 &= 2(x^3 - y^3) \\ &= 2(x-y)[(x)^2 + (x)(y) + y^2] \\ &= 2(x-y)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

7. $3k^3 + 81q^3$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} 3k^3 + 81q^3 &= 3(k^3 + 27q^3) \\ &= 3(k+3q)[(k)^2 - (k)(3q) + (3q)^2] \\ &= 3(k+3q)(k^2 - 3kq + 9q^2) \end{aligned}$$

8. $64t^3 - 1$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} 64t^3 - 1 &= (4t-1)[(4t)^2 + (4t)(1) + (1)^2] \\ &= (4t-1)(16t^2 + 4t + 1) \end{aligned}$$

9. $64x^2 - 1$
   Oplossing:

$$64x^2 - 1 = (8x-1)(8x+1)$$

10. $125x^3 + 1$
    Oplossing:

$$\begin{aligned} 125x^3 + 1 &= (5x+1)[(5x)^2 - (5x)(1) + (1)^2] \\ &= (5x+1)(25x^2 - 5x + 1) \end{aligned}$$

11. $25x^3 + 1$
    Oplossing:
    Neem kennis dat $\left(\sqrt[3]{25}\right)^3 = 25$.

$$\begin{aligned} 25x^3 + 1 &= (\sqrt[3]{5}x + 1)[(\sqrt[3]{5}x)^2 - (\sqrt[3]{5}x)(1) + (1)^2] \\ &= (\sqrt[3]{5}x + 1)((\sqrt[3]{5})^2x^2 - \sqrt[3]{5}x + 1) \end{aligned}$$

12. $z - 125z^4$
Oplossing:

$$\begin{aligned} z - 125z^4 &= (z)(1 - 125z^3) \\ &= (z)(1 - 5z)[(1)^2 + (1)(5z) + (5z)^2] \\ &= (z)(1 - 5z)(1 + 5z + 25z^2) \end{aligned}$$

13. $8m^6 + n^9$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 8m^6 + n^9 &= (2m^2)^3 + (n^3)^3 \\ &= (2m^2 + n^3)[(2m^2)^2 - (2m^2)(n^3) + (n^3)^2] \\ &= (2m^2 + n^3)(4m^4 - 2m^2n^3 + n^6) \end{aligned}$$

14. $216n^3 - k^3$
Oplossing:

$$216n^3 - k^3 = (6n - k)(36n^2 + 6nk + k^2)$$

15. $125s^3 + d^3$
Oplossing:

$$125s^3 + d^3 = (5s + d)(25s^2 - 5sd + d^2)$$

16. $8k^3 + r^3$
Oplossing:

$$8k^3 + r^3 = (2k + r)(4k^2 - 2kr + r^2)$$

17. $8j^3k^3l^3 - b^3$
Oplossing:

$$8j^3k^3l^3 - b^3 = (2jkl - b)(4j^2k^2l^2 + 2jklabc + b^2)$$

18. $27x^3y^3 + w^3$
Oplossing:

$$27x^3y^3 + w^3 = (3xy + w)(9x^2y^2 - 3xyw + w^2)$$

19. $128m^3 + 2f^3$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 128m^3 + 2f^3 &= 2(64m^3 + f^3) \\ &= 2(4m + f)(16m^2 - 4mf + f^2) \end{aligned}$$

20. $p^{15} - \frac{1}{8}y^{12}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} p^{15} - \frac{1}{8}y^{12} &= (p^5)^3 - (\frac{1}{2}y^4)^3 \\ &= \left(p^5 - \frac{1}{2}y^4\right)\left[\left(p^5\right)^2 + \left(p^5\right)\left(\frac{1}{2}y^4\right) + \left(\frac{1}{2}y^4\right)\right] \\ &= \left(p^5 - \frac{1}{2}y^4\right)\left(p^{10} + \frac{1}{2}p^5y^4 + \frac{1}{4}y^8\right) \end{aligned}$$

21. $\dfrac{27}{t^3} - s^3$
Oplossing:

$$\frac{27}{t^3} - s^3 = (\frac{3}{t} - s)(\frac{9}{t^2} + \frac{3s}{t} + s^2)$$

22. $\dfrac{1}{64q^3} - h^3$
Oplossing:

$$\frac{1}{64q^3} - h^3 = (\frac{1}{4q} - h)(\frac{1}{16q^2} + \frac{h}{4q} + h^2)$$

23. $72g^3 + \dfrac{1}{3}v^3$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 72g^3 + \frac{1}{3}v^3 &= \frac{1}{3}(216g^3 + v^3) \\ &= \frac{1}{3}(6g + v)(36g^2 - 6gv + v^2) \end{aligned}$$

24. $1 - (x - y)^3$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 1 - (x - y)^3 &= (1 - (x - y))[(1)^2 - (1)(x - y) + (x - y)^2] \\ &= (1 - x + y)(1 - x + y + x^2 - 2xy + y^2) \end{aligned}$$

25. $h^4(8g^6 + h^3) - (8g^6 + h^3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} h^4(8g^6 + h^3) - (8g^6 + h^3) &= (h^4 - 1)(8g^6 + h^3) \\ &= (h^2 - 1)(h^2 + 1)(2g^2 + h)(4g^4 - 2g^2h + h^2) \\ &= (h - 1)(h + 1)(h^2 + 1)(2g^2 + h)(4g^4 - 2g^2h + h^2) \end{aligned}$$

26. $x(125w^3 - h^3) + y(125w^3 - h^3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} x(125w^3 - h^3) + y(125w^3 - h^3) &= (x + y)(125w^3 - h^3) \\ &= (x + y)(5w - h)(25w^2 + 5wh + h^2) \end{aligned}$$

27. $x^2(27p^3 + w^3) - 5x(27p^3 + w^3) - 6(27p^3 + w^3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2(27p^3 + w^3) - 5x(27p^3 + w^3) - 6(27p^3 + w^3) &= (x^2 - 5x - 6)(27p^3 + w^3) \\ &= (x - 6)(x + 1)(3p + w)(9p^2 - 3pw + w^2) \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2H8N	2. 2H8P	3. 2H8Q	4. 2H8R	5. 2H8S	6. 2H8T
7. 2H8V	8. 2H8W	9. 2H8X	10. 2H8Y	11. 2H8Z	12. 2H92
13. 2H93	14. 2H94	15. 2H95	16. 2H96	17. 2H97	18. 2H98
19. 2H99	20. 2H9B	21. 2H9C	22. 2H9D	23. 2H9F	24. 2H9G
25. 2H9H	26. 2H9J	27. 2H9K			

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Exercise 1 – 10:

1. Vereenvoudig (aanvaar al die noemers is nie-nul)

a) $\frac{3a}{15}$

Oplossing:

$$\frac{3a}{15} = \frac{a}{5}$$

b) $\frac{2a+10}{4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2a+10}{4} &= \frac{2(a+5)}{4}\\ &= \frac{a+5}{2}\end{aligned}$$

c) $\frac{5a+20}{a+4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{5a+20}{a+4} &= \frac{5(a+4)}{a+4}\\ &= 5\end{aligned}$$

d) $\frac{a^2-4a}{a-4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{a^2-4a}{a-4} &= \frac{a(a-4)}{a-4}\\ &= a\end{aligned}$$

e) $\frac{3a^2-9a}{2a-6}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3a^2-9a}{2a-6} &= \frac{3a(a-3)}{2(a-3)}\\ &= \frac{3a}{2}\end{aligned}$$

f) $\frac{9a+27}{9a+18}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{9a+27}{9a+18} &= \frac{9(a+3)}{9(a+2)}\\ &= \frac{a+3}{a+2}\end{aligned}$$

Let op die beperking: $a \neq -2$.

g) $\dfrac{6ab+2a}{2b}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{6ab+2a}{2b} &= \frac{2a(3b+1)}{2b}\\ &= \frac{a(3b+1)}{b}\end{aligned}$$

Let op die beperking: $b \neq 0$.

h) $\dfrac{16x^2y-8xy}{12x-6}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{16x^2y-8xy}{12x-6} &= \frac{8xy(2x-1)}{6(2x-1)}\\ &= \frac{8xy}{6}\\ &= \frac{4xy}{3}\end{aligned}$$

i) $\dfrac{4xyp-8xp}{12xy}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{4xyp-8xp}{12xy} &= \frac{4xp(y-2)}{12xy}\\ &= \frac{p(y-2)}{3y}\end{aligned}$$

Let op die beperking: $y \neq 0$.

j) $\dfrac{9x^2-16}{6x-8}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{9x^2-16}{6x-8} &= \frac{(3x-4)(3x+4)}{2(3x-4)}\\ &= \frac{3x+4}{2}\end{aligned}$$

k) $\dfrac{b^2-81a^2}{18a-2b}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{b^2-81a^2}{18a-2b} &= \frac{(b-9)(b+9)}{2(9-b)}\\ &= -\frac{b+9}{2}\end{aligned}$$

l) $\dfrac{t^2-s^2}{s^2-2st+t^2}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{t^2-s^2}{s^2-2st+t^2} &= \frac{(t-s)(t+s)}{(s-t)^2}\\ &= \frac{-(s-t)(t+s)}{(s-t)^2}\\ &= \frac{-(t+s)}{s-t}\end{aligned}$$

Let op die beperking: $s \neq t$

m) $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{5x - 25}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 2x - 15}{5x - 25} &= \frac{(x-5)(x+3)}{5(x-5)} \\ &= \frac{x+3}{5}\end{aligned}$$

n) $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15} &= \frac{(x+5)(x-3)}{(x+3)(x+5)} \\ &= \frac{x-3}{x+3}\end{aligned}$$

Let op die beperking: $x \neq -3$.

o) $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 - 27}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 27} &= \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x^2+3x+9)} \\ &= \frac{x+2}{x^2+3x+9}\end{aligned}$$

p) $\dfrac{a^2 + 6a - 16}{a^3 - 8}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{a^2 + 6a - 16}{a^3 - 8} &= \frac{(a+8)(a-2)}{(a-2)(a^2+2a+4)} \\ &= \frac{a+8}{a^2+2a+4}\end{aligned}$$

q) $\dfrac{a^2 - 4ab - 12b^2}{a^2 + 4ab + 4b^2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{a^2 - 4ab - 12b^2}{a^2 + 4ab + 4b^2} &= \frac{(a-6b)(a+2b)}{(a+2b)^2} \\ &= \frac{a-6b}{a+2b}\end{aligned}$$

Let op die beperking: $a \neq -2b$.

r) $\dfrac{6a^2 - 7a - 3}{3ab + b}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{6a^2 - 7a - 3}{3ab + b} &= \frac{(2a-3)(3a+1)}{b(3a+1)} \\ &= \frac{2a-3}{b}\end{aligned}$$

Let op die beperking: $b \neq 0$.

s) $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^3 - x}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - x} &= \frac{(2x+1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{2x+1}{x(x+1)}\end{aligned}$$

Let op die beperkings: $x \neq -1$ en $x \neq 0$.

t) $\dfrac{qz + qr + 16z + 16r}{z + r}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{qz + qr + 16z + 16r}{(z + r)} &= \frac{q(z+r) + 16(z+r)}{(z+r)}\\ &= \frac{(z+r)(q+16)}{(z+r)}\\ &= q + 16\end{aligned}$$

u) $\dfrac{pz - pq + 5z - 5q}{z - q}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{pz - pq + 5z - 5q}{(z - q)} &= \frac{p(z-q) + 5(z-q)}{(z-q)}\\ &= \frac{(z-q)(p+5)}{(z-q)}\\ &= p + 5\end{aligned}$$

v) $\dfrac{hx - hg + 13x - 13g}{x - g}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{hx - hg + 13x - 13g}{(x - g)} &= \frac{h(x-g) + 13(x-g)}{(x-g)}\\ &= \frac{(x-g)(h+13)}{(x-g)}\\ &= h + 13\end{aligned}$$

w) $\dfrac{f^2a - fa^2}{f - a}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{f^2a - fa^2}{f - a} &= \frac{af(f-a)}{(f-a)}\\ &= af\end{aligned}$$

2. Vereenvoudig (aanvaar al die noemers is nie-nul)

a) $\dfrac{b^2 + 10b + 21}{3(b^2 - 9)} \div \dfrac{2b^2 + 14b}{30b^2 - 90b}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{b^2+10b+21}{3(b^2-9)} \div \frac{2b^2+14b}{30b^2-90b} &= \frac{b^2+10b+21}{3(b^2-9)} \times \frac{30b^2-90b}{2b^2+14b}\\ &= \frac{(b+7)(b+3)}{3(b-3)(b+3)} \times \frac{30b(b-3)}{2b(b+7)}\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{30}{2}\\ &= 5\end{aligned}$$

b) $\dfrac{x^2+17x+70}{5(x^2-100)} \div \dfrac{3x^2+21x}{45x^2-450x}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+17x+70}{5(x^2-100)} \div \frac{3x^2+21x}{45x^2-450x} &= \frac{x^2+17x+70}{5(x^2-100)} \times \frac{45x^2-450x}{3x^2+21x}\\ &= \frac{(x+7)(x+10)}{5(x-10)(x+10)} \times \frac{45x(x-10)}{3x(x+7)}\\ &= \frac{1}{5} \times \frac{45}{3}\\ &= 3\end{aligned}$$

c) $\dfrac{z^2+17z+66}{3(z^2-121)} \div \dfrac{2z^2+12z}{24z^2-264z}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{z^2+17z+66}{3(z^2-121)} \div \frac{2z^2+12z}{24z^2-264z} &= \frac{z^2+17z+66}{3(z^2-121)} \times \frac{24z^2-264z}{2z^2+12z}\\ &= \frac{(z+6)(z+11)}{3(z-11)(z+11)} \times \frac{24z(z-11)}{2z(z+6)}\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{24}{2}\\ &= 4\end{aligned}$$

d) $\dfrac{3a+9}{14} \div \dfrac{7a+21}{a+3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3a+9}{14} \div \frac{7a+21}{a+3} &= \frac{3(a+3)}{14} \div \frac{7(a+3)}{a+3}\\ &= \frac{3(a+3)}{14} \div 7\\ &= \frac{3(a+3)}{14} \times \frac{1}{7}\\ &= \frac{3(a+3)}{98}\end{aligned}$$

e) $\dfrac{a^2-5a}{2a+10} \times \dfrac{4a}{3a+15}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{a^2-5a}{2a+10} \times \frac{4a}{3a+15} &= \frac{a(a-5)}{2(a+5)} \times \frac{4a}{3(a+5)}\\ &= \frac{[a(a-5)][4a]}{[2(a+5)][3(a+5)]}\\ &= \frac{4a^2(a-5)}{6(a+5)^2}\end{aligned}$$

Let op die beperking: $a \neq -5$.

f) $\dfrac{3xp+4p}{8p} \div \dfrac{12p^2}{3x+4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{3xp+4p}{8p} \div \frac{12p^2}{3x+4} &= \frac{p(3x+4)}{8p} \div \frac{12p^2}{3x+4} \\
&= \frac{3x+4}{8} \times \frac{3x+4}{12p^2} \\
&= \frac{[3x+4][3x+4]}{[8][12p^2]} \\
&= \frac{(3x+4)^2}{96p^2}
\end{aligned}$$

Let op die beperking: $p \neq 0$.

g) $\dfrac{24a-8}{12} \div \dfrac{9a-3}{6}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{24a-8}{12} \div \frac{9a-3}{6} &= \frac{8(3a-1)}{12} \div \frac{3(a-1)}{6} \\
&= \frac{2(3a-1)}{3} \times \frac{2}{a-1} \\
&= \frac{[2(3x-1)][2]}{[3][a-1]} \\
&= \frac{4(3a-1)}{3(a-1)}
\end{aligned}$$

Let op die beperking: $a \neq 1$.

h) $\dfrac{a^2+2a}{5} \div \dfrac{2a+4}{20}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+2a}{5} \div \frac{2a+4}{20} &= \frac{a(a+2)}{5} \div \frac{2(a+2)}{20} \\
&= \frac{a(a+2)}{5} \times \frac{10}{a+2} \\
&= \frac{[a(a+2)][10]}{[5][a+2]} \\
&= \frac{10a}{5} \\
&= 2a
\end{aligned}$$

i) $\dfrac{p^2+pq}{7p} \times \dfrac{21q}{8p+8q}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{p^2+pq}{7p} \times \frac{21q}{8p+8q} &= \frac{p(p+q)}{7p} \times \frac{21q}{8(p+q)} \\
&= \frac{[p(p+q)][21q]}{[7p][8(p+q)]} \\
&= \frac{21pq}{56p} \\
&= \frac{3q}{8}
\end{aligned}$$

j) $\dfrac{5ab-15b}{4a-12} \div \dfrac{6b^2}{a+b}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{5ab-15b}{4a-12} \div \frac{6b^2}{a+b} &= \frac{5b(a-3)}{4(a-3)} \div \frac{6b^2}{a+b} \\ &= \frac{5b}{4} \times \frac{a+b}{6b^2} \\ &= \frac{[5b][a+b]}{[4][6b^2]} \\ &= \frac{30b^3}{4(a+b)}\end{aligned}$$

Let op die beperking: $a \neq -b$.

k) $\dfrac{16-x^2}{x^2-x-12} \times \dfrac{x+3}{x+4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{16-x^2}{x^2-x-12} \times \frac{x+3}{x+4} &= \frac{(4-x)(4+x)}{(x-4)(x+3)} \times \frac{x+3}{x+4} \\ &= -1\end{aligned}$$

l) $\dfrac{a^3+b^3}{a^3} \times \dfrac{5a+5b}{a^2+2ab+b^2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{a^3+b^3}{a^3} \times \frac{5a+5b}{a^2+2ab+b^2} &= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^3} \times \frac{5(a+b)}{(a+b)^2} \\ &= \frac{a^2-ab+b^2}{a^3} \times 5 \\ &= \frac{5(a^2-ab+b^2)}{a^3}\end{aligned}$$

Let op die beperkings: $a \neq \pm 0$.

m) $\dfrac{a-4}{a+5a+4} \times \dfrac{a^2+2a+1}{a^2-3a-4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{a-4}{a+5a+4} \times \frac{a^2+2a+1}{a^2-3a-4} &= \frac{a-4}{(a+4)(a+1)} \times \frac{(a+1)^2}{(a-4)(a+1)} \\ &= \frac{1}{a+4}\end{aligned}$$

Let op die beperkings: $a \neq -4$.

n) $\dfrac{3x+2}{x^2-6x+8} \times \dfrac{x-2}{3x^2+8x+4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3x+2}{x^2-6x+8} \times \frac{x-2}{3x^2+8x+4} &= \frac{3x+2}{(x-4)(x-2)} \times \frac{x-2}{(3x+2)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x-4)(x+2)}\end{aligned}$$

Let op die beperkings: $x \neq 4$ en $x \neq -2$.

o) $\dfrac{a^2-2a+8}{a^2+6a+8} \times \dfrac{a^2+a-12}{3} - \dfrac{3}{2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{a^2-2a+8}{a^2+6a+8}\times\frac{a^2+a-12}{3}-\frac{3}{2} &= \frac{(a-4)(a+2)}{(a+2)(a+4)}\times\frac{(a+4)(a-3)}{3}-\frac{3}{2}\\ &= \frac{(a-4)(a-3)}{3}-\frac{3}{2}\\ &= \frac{2(a-4)(a-3)-9}{6}\\ &= \frac{2(a^2-7a+12)-9}{6}\\ &= \frac{2a^2-14a+15}{6}\end{aligned}$$

p) $\dfrac{4x^2-1}{3x^2+10x+3}\div\dfrac{6x^2+5x+1}{4x^2+7x-3}\times\dfrac{9x^2+6x+1}{8x^2-6x+1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\frac{4x^2-1}{3x^2+10x+3}\div\frac{6x^2+5x+1}{4x^2+7x-3}\times\frac{9x^2+6x+1}{8x^2-6x+1}\\ &=\frac{(2x-1)(2x+1)}{(x+3)(3x+1)}\times\frac{(x+3)(4x-1)}{(2x+1)(3x+1)}\times\frac{(3x+1)^2}{(2x-1)(4x-1)}\\ &=1\end{aligned}$$

q) $\dfrac{x+4}{3}-\dfrac{x-2}{2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{3}-\frac{x-2}{2} &= \frac{2(x+4)-3(x-2)}{6}\\ &= \frac{2x+8-3x+6}{6}\\ &= \frac{14-x}{6}\end{aligned}$$

r) $\dfrac{p^3+q^3}{p^2}\times\dfrac{3p-3q}{p^2-q^2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{p^3+q^3}{p^2}\times\frac{3p-3q}{p^2-q^2} &= \frac{(p+q)(p^2-pq+q^2)}{p^2}\times\frac{3(p-q)}{(p-q)(p+q)}\\ &= \frac{(p+q)(p^2-pq+q^2)}{p^2}\times\frac{3}{p+q}\\ &= \frac{3(p^2-pq+q^2)}{p^2}\end{aligned}$$

Let op die beperking: $p \neq 0$.

3. Vereenvoudig (aanvaar al die noemers is nie-nul)

a) $\dfrac{x-3}{3}-\dfrac{x+5}{4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{3}-\frac{x+5}{4} &= \frac{4(x-3)-3(x+5)}{12}\\ &= \frac{4x-12-3x-15}{12}\\ &= \frac{x-27}{12}\end{aligned}$$

b) $\dfrac{2x-4}{9}-\dfrac{x-3}{4}+1$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2x-4}{9}-\frac{x-3}{4}+1 &= \frac{4(2x-4)-9(x-3)+36}{36}\\ &= \frac{8x-16-9x+27+36}{36}\\ &= \frac{47-x}{36}\end{aligned}$$

c) $1+\dfrac{3x-4}{4}-\dfrac{x+2}{3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}1+\frac{3x-4}{4}-\frac{x+2}{3} &= \frac{12+3(3x-4)-4(x+2)}{12}\\ &= \frac{12+9x-12-4x-8}{12}\\ &= \frac{5x-8}{12}\end{aligned}$$

d) $\dfrac{11}{a+11}+\dfrac{8}{a-8}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{11}{a+11}+\frac{8}{a-8} &= \frac{11(a-8)+8(a+11)}{(a+11)(a-8)}\\ &= \frac{11a-88+8a+88}{(a+11)(a-8)}\\ &= \frac{19a}{(a+11)(a-8)}\end{aligned}$$

Let op die beperkings: $a \neq -11$ en $a \neq 8$.

e) $\dfrac{12}{x-12}-\dfrac{6}{x-6}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{12}{x-12}-\frac{6}{x-6} &= \frac{12(x-6)-6(x-12)}{(x-12)(x-6)}\\ &= \frac{12x-72-6x+72}{(x-12)(x-6)}\\ &= \frac{6x}{(x-12)(x-6)}\end{aligned}$$

Let op die beperkings: $x \neq 12$ en $x \neq 6$

f) $\dfrac{12}{r+12}+\dfrac{8}{r-8}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{12}{r+12}+\frac{8}{r-8} &= \frac{12(r-8)+8(r+12)}{(r+12)(r-8)}\\ &= \frac{12r-96+8r+96}{(r+12)(r-8)}\\ &= \frac{20r}{(r+12)(r-8)}\end{aligned}$$

Let op die beperkings: $r \neq -12$ en $r \neq 8$

g) $\dfrac{2}{xy}+\dfrac{4}{xz}+\dfrac{3}{yz}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{2}{xy} + \frac{4}{xz} + \frac{3}{yz} &= \frac{2z}{xyz} + \frac{4y}{xyz} + \frac{3x}{xyz} \\ &= \frac{2z + 4y + 3x}{xyz} \end{aligned}$$

Let op die beperkings: $x \neq 0$; $y \neq 0$ en $z \neq 0$.

h) $\frac{5}{t-2} - \frac{1}{t-3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{5}{t-2} - \frac{1}{t-3} &= \frac{(5)(t-3)}{(t-3)(t-2)} - \frac{1(t-2)}{(t-2)(t-3)} \\ &= \frac{5(t-3) - (t-3)}{(t-2)(t-3)} \\ &= \frac{5t - 15 - t + 3}{(t-2)(t-3)} \\ &= \frac{4t - 12}{(t-2)(t-3)} \end{aligned}$$

Let op die beperkings: $t \neq 2$ en $t \neq 3$.

i) $\frac{k+2}{k^2+2} - \frac{1}{k+2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{k+2}{k^2+2} - \frac{1}{k+2} &= \frac{(k+2)(k+2)}{(k^2+2)(k+2)} - \frac{1(k^2+2)}{(k^2+2)(k+2)} \\ &= \frac{(k+2)^2 - (k^2+2)}{(k^2+2)(k+2)} \\ &= \frac{k^2 + 4k + 4 - k^2 - 2}{(k^2+2)(k+2)} \\ &= \frac{4k + 2}{(k^2+2)(k+2)} \\ &= \frac{2(k+2)}{(k^2+2)(k+2)} \end{aligned}$$

Let op die beperkings: $k \neq -2$ en $k^2 \neq \pm\sqrt{2}$.

j) $\frac{t+2}{3q} + \frac{t+1}{2q}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{t+2}{3q} + \frac{t+1}{2q} &= \frac{(t+2)(2q)}{(3q)(2q)} + \frac{(t+1)(3q)}{(3q)(2q)} \\ &= \frac{(2tq + 4q) + (3tq + 3q)}{6q^2} \\ &= \frac{q(5t+7)}{6q^2} \\ &= \frac{5t+7}{6q} \end{aligned}$$

Let op die beperking: $q \neq 0$.

k) $\frac{3}{p^2-4} + \frac{2}{(p-2)^2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{p^2-4}+\frac{2}{(p-2)^2} &= \frac{3(p-2)^2}{(p^2-4)(p-2)^2}+\frac{2(p^2-4)}{(p^2-4)(p-2)^2} \\
&= \frac{3(p-2)(p-2)+2(p-2)(p+2)}{(p+2)(p-2)^3} \\
&= \frac{[p-2][3(p-2)+2(p+2)]}{(p+2)(p-2)^3} \\
&= \frac{3p-6+2p+4}{(p+2)(p-2)^2} \\
&= \frac{5p-2}{(p+2)(p-2)^2}
\end{aligned}$$

Let op die beperking: $p \neq \pm 2$.

l) $\frac{x}{x+y}+\frac{x^2}{y^2-x^2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+y}+\frac{x^2}{y^2-x^2} &= \frac{x}{x+y}+\frac{x^2}{(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{x(x-y)+x^2}{(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{x^2-xy+x^2}{(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{2x^2-xy}{(x+y)(x-y)}
\end{aligned}$$

Let op die beperking: $x \neq \pm y$.

m) $\frac{1}{m+n}+\frac{3mn}{m^3+n^3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m+n}+\frac{3mn}{m^3+n^3} &= \frac{1}{m+n}+\frac{3mn}{(m+n)(m^2-mn+n^2)} \\
&= \frac{1(m^2-mn+n^2)+3mn}{(m+n)(m^2-mn+n^2)} \\
&= \frac{m^2+2mn+n^2}{(m+n)(m^2-mn+n^2)} \\
&= \frac{m+n}{m^2-mn+n^2}
\end{aligned}$$

n) $\frac{h}{h^3-f^3}-\frac{1}{h^2+hf+f^2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{h}{h^3-f^3}-\frac{1}{h^2+hf+f^2} &= \frac{h}{(h-f)(h^2+hf+f^2)}-\frac{1}{h^2+hf+f^2} \\
&= \frac{h-h+f}{(h+f)(h^2+hf+f^2)} \\
&= \frac{f}{(h+f)(h^2+hf+f^2)}
\end{aligned}$$

o) $\frac{x^2-1}{3}\times\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-1}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} &= \frac{(x^2-1)(1)}{(3)(x-1)} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{x^2-1}{3x-3} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{(x^2-1)(2)}{2(3x-3)} - \frac{3x-3}{2(3x-3)} \\
&= \frac{2x^2-2-3x+3}{6x-6} \\
&= \frac{(x-1)(2x-1)}{6(x-1)} \\
&= \frac{2x-1}{6}
\end{aligned}
$$

p) $\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^3} - \dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^3} - \frac{x^2+x+1}{x^3-1} &= \frac{(x-1)^2}{(x-1)^3} - \frac{x^2+x+1}{x^3-1} \\
&= \frac{1}{(x-1)} - \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
&= \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

q) $\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{2x}{x^3-1}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2x}{x^3-1} &= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2x}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
&= \frac{x^2+x+1-2x(x-1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} \\
&= \frac{x^2+x+1-2x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} \\
&= \frac{-x^2+3x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}
\end{aligned}
$$

r) $\dfrac{t^2+2t-8}{t^2+t-6} + \dfrac{1}{t^2-9} + \dfrac{t+1}{t-3}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{t^2+2t-8}{t^2+t-6} + \frac{1}{t^2-9} + \frac{t+1}{t-3} &= \frac{(t+4)(t-2)}{(t+3)(t-2)} + \frac{1}{(t-3)(t+3)} + \frac{t+1}{t-3} \\
&= \frac{t+4}{t+3} + \frac{1}{(t-3)(t+3)} + \frac{t+1}{t-3} \\
&= \frac{(t-3)(t+4)+1+(t+1)(t+3)}{(t-3)(t+3)} \\
&= \frac{t^2+t-12+1+t^2+4t+3}{(t-3)(t+3)} \\
&= \frac{2t^2+5t-8}{(t-3)(t+3)} \\
&= \frac{2t^2+5t-8}{t^2-9}
\end{aligned}
$$

Let op die beperking: $t \neq \pm 3$.

s) $\dfrac{x^2-3x+9}{x^3+27}+\dfrac{x-2}{x^2+4x+3}-\dfrac{1}{x-2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-3x+9}{x^3+27}+\frac{x-2}{x^2+4x+3}-\frac{1}{x-2} &= \frac{x^2-3x+9}{(x+3)(x^2-3x+9)}+\frac{x-2}{(x+3)(x+1)}-\frac{1}{x-2}\\ &= \frac{(x+1)(x-2)+(x-2)^2-(x+3)(x+1)}{(x+3)(x+1)(x-2)}\\ &= \frac{x^2-x-2+x^2-4x+4-x^2-4x-3}{(x+3)(x+1)(x-2)}\\ &= \frac{x^2-9x-1}{(x+3)(x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

Let op die beperkings: $x \neq -3$; $x \neq -1$ en $x \neq 2$.

t) $\dfrac{1}{a^2-4ab+4b^2}+\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3-8b^3}-\dfrac{1}{a^2-4b^2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^2-4ab+4b^2}+\frac{a^2+2ab+b^2}{a^3-8b^3}-\frac{1}{a^2-4b^2}\\ &= \frac{1}{(a-2b)(a-2b)}+\frac{a^2+2ab+4b^2}{(a-2b)(a^2+2ab+4b^2}-\frac{1}{(a-2b)(a+2b)}\\ &= \frac{(a+2b)+(a-2b)(a+2b)-(a-2b)}{(a-2b)^2(a+2b)}\\ &= \frac{a+2b+a^2-4b^2-a+2b}{(a-2b)^2(a+2b)}\\ &= \frac{a^2+4b-4b^2}{(a-2b)^2(a+2b)}\end{aligned}$$

Let op die beperking: $a \neq \pm 2b$.

4. Wat is die beperkings in die volgende:

a) $\dfrac{1}{x-2}$

Oplossing:

Ons moet die waarde van x vind sodat die noemer gelyk aan 0. Dus:

$$\begin{aligned}x-2 &\neq 0\\ x &\neq 2\end{aligned}$$

b) $\dfrac{3x-9}{4x+4}$

Oplossing:

Vereenvoudig die breuk:

$$\frac{3x-9}{4x+4}=\frac{3(x-1)}{4(x+1)}$$

Nou kan ons die beperking bepaal:

$$\begin{aligned}4(x+1) &\neq 0\\ x+1 &\neq 0\\ x &\neq -1\end{aligned}$$

c) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2-1}$

Oplossing:

Vereenvoudig die breuk:

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{3}{x} - \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

Nou kan ons die beperkings bepaal. Daar is drie beperkings vir hierdie breuk:

$$\begin{aligned} x &\neq 0 \\ x - 1 &\neq 0 \\ x + 1 &\neq 0 \end{aligned}$$

Dus: $x \neq 0$ en $x \neq \pm 1$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

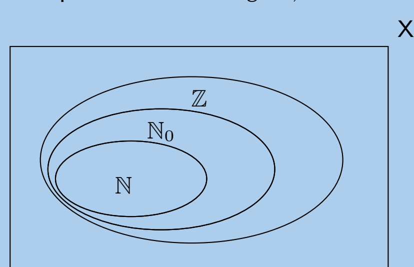
1a. 2H9N	1b. 2H9P	1c. 2H9Q	1d. 2H9R	1e. 2H9S	1f. 2H9T
1g. 2H9V	1h. 2H9W	1i. 2H9X	1j. 2H9Y	1k. 2H9Z	1l. 2HB2
1m. 2HB3	1n. 2HB4	1o. 2HB5	1p. 2HB6	1q. 2HB7	1r. 2HB8
1s. 2HB9	1t. 2HBB	1u. 2HBC	1v. 2HBD	1w. 2HBF	2a. 2HBG
2b. 2HBH	2c. 2HBJ	2d. 2HBK	2e. 2HBM	2f. 2HBN	2g. 2HBP
2h. 2HBQ	2i. 2HBR	2j. 2HBS	2k. 2HBT	2l. 2HBV	2m. 2HBW
2n. 2HBX	2o. 2HBY	2p. 2HBZ	2q. 2HC2	2r. 2HC3	3a. 2HC4
3b. 2HC5	3c. 2HC6	3d. 2HC7	3e. 2HC8	3f. 2HC9	3g. 2HCB
3h. 2HCC	3i. 2HCD	3j. 2HCF	3k. 2HCG	3l. 2HCH	3m. 2HCJ
3n. 2HCK	3o. 2HCM	3p. 2HCN	3q. 2HCP	3r. 2HCQ	3s. 2HCR
3t. 2HCS	4a. 2HCT	4b. 2HCV	4c. 2HCW		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.9 Hoofstuk opsomming

End of chapter Exercise 1 – 11:

1. Die figuur toon die Venn diagram vir die spesiale versamelings $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ en $\mathbb{Z}$.



a) Waar hoort die getal 2,13 in die diagram?

Oplossing:

2,13 is in die eenvoudigste vorm, dus is dit nie in $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ of $\mathbb{Z}$ nie. 2,13 is in die spasie tussen die reghoek en die buitenste ovaal.

b) In die volgende lys is daar twee vals bewerings en een waar bewering. Watter een van die bewerings is **waar**?

- Elke natuurlike getal is 'n heelgetal.
- Elke heelgetal is 'n natuurlike getal.
- Daar is breuke in die heelgetalle.

Oplossing:

Oorweeg elke stelling:

- Heelgetalle is natuurlike getalle en negatiewe heelgetalle. Daarom is hierdie stelling waar.
- 0 is nie 'n natuurlike getal nie, dus is hierdie stelling onwaar.
- Heelgetalle is natuurlike getalle en heelgetalle, geen breuke. Daarom is dit onwaar.

Net (i) is waar.

2. Meld of die volgende getalle reëel, nie-reëel of ongedefinieerd is.

a) $-\sqrt{-5}$
Oplossing:
Dit is die vierkantswortel van 'n negatiewe getal en dus is nie-reëel.

b) $\frac{\sqrt{8}}{0}$
Oplossing:
Ons deel deur 0 en dus is dit ongedefinieerd.

c) $-\sqrt{15}$
Oplossing:
Dit is die vierkantswortel van 'n positiewe getal en dus is reëel.

d) $-\sqrt{7}$
Oplossing:
Dit is die vierkantswortel van 'n positiewe getal en dus is reëel.

e) $\sqrt{-1}$
Oplossing:
Dit is die vierkantswortel van 'n negatiewe getal en dus is nie-reëel.

f) $\sqrt{2}$
Oplossing:
Dit is die vierkantswortel van 'n positiewe getal en dus is reëel.

3. Meld of elk van die volgende getalle rasionaal of irrasionaal is.

a) $\sqrt[3]{4}$
Oplossing:
Irrasionaal. Dit kan nie vereenvoudig word tot 'n breuk van heelgetalle nie.

b) 45π
Oplossing:
Irrasionaal. Dit kan nie vereenvoudig word tot 'n breuk van heelgetalle nie.

c) $\sqrt{9}$
Oplossing:
$\sqrt{9} = 3$
Rasionaal. Kan vereenvoudig tot 'n heelgetal.

d) $\sqrt[3]{8}$
Oplossing:
$\sqrt[3]{8} = 2$
Rasionaal. Kan vereenvoudig tot 'n heelgetal.

4. As a 'n heelgetal is, b 'n heelgetal is en c is irrasionaal, watter van die volgende is rasionale getalle?

a) $\frac{-b}{a}$
Oplossing:
Ons het 'n breuk van heelgetalle en dus is dit rasionaal.

b) $c \div c$
Oplossing:
Wanneer ons 'n getal deur dieselfde getal verdeel kry ons 1 en dit is dus rasionaal.

c) $\frac{a}{c}$
Oplossing:
Ons deel 'n heelgetal deur 'n irrasionale getal en dus is dit irrasionaal. Maar as $a = 0$ dan is die breuk gelyk aan 0 en die stel is rasionasl.

d) $\frac{1}{c}$

Oplossing:

Ons deel 'n heelgetal deur 'n irrasionale getal en dus is dit irrasionaal.

5. Oorweeg die volgende lys van getalle:

$$\sqrt[3]{26}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \sqrt{-24}\ ;\ \sqrt{39}\ ;\ 7{,}\dot{1}\dot{1}\ ;\ \pi^2\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ 7{,}12\ ;\ -\sqrt{24}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{0}\ ;\ 3\pi\ ;\ \sqrt{78}\ ;\ 9\ ;\ \pi$$

   a) Watter van die getalle is nie-reële getalle?

   Oplossing:

   Net $\sqrt{-24}$ is nie-reël, want dit is die vierkantswortel van 'n negatiewe getal.

   b) Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, orden al die reële getalle in 'n orde van toenemende grootte.

   Oplossing:

   Ons sluit $\sqrt{-24}$ uit die lys want dit is nie-reëel. Ons sluit ook $\frac{\sqrt{2}}{0}$ uit, want dit is ongedefinieerd. Dan sien ons dat:

   - $\sqrt[3]{26}$ tussen 2 en 8 lê
   - $\frac{3}{2} = 1{,}5$
   - $\sqrt{39}$ lê tussen 6 en 7
   - $\pi^2 \approx 9{,}8696$
   - $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$
   - $-\sqrt{24}$ lê tussen -4 en -5
   - $3\pi \approx 9{,}4248$
   - $\sqrt{78}$ lê tussen 8 en 9
   - $\pi \approx 3{,}1416$

   Dus: $-\sqrt{24}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \sqrt[3]{26}\ ;\ \pi\ ;\ \sqrt{39}\ ;\ 7{,}\dot{1}\dot{1}\ ;\ 7{,}12\ ;\ \sqrt{78}\ ;\ 9\ ;\ 3\pi\ ;\ \pi^2$

   c) Watter van die getalle is irrasionale getalle?

   Oplossing:

   Enige getal wat nie as 'n breuk van heelgetalle geskryf kan word nie, is irrasionaal. Dus $-\sqrt{24}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \sqrt[3]{26}\ ;\ \pi\ ;\ \sqrt{39}\ ;\ \sqrt{78}\ ;\ 3\pi\ ;\ \pi^2$ is almal irrasionaal.

   d) Watter van die getalle is rasionale getalle?

   Oplossing:

   Enige getal wat as 'n breuk van heelgetalle skryf word, is 'n rasionale getal. Dus $\frac{3}{2}\ ;\ 7{,}\dot{1}\dot{1}\ ;\ 7{,}12\ ;\ 9$ is almal rasionaal getalle.

   e) Watter van die getalle is heelgetalle?

   Oplossing:

   Net 9 is 'n heelgetal.

   f) Watter van die getalle is ongedefinieerd?

   Oplossing:

   Enige breuk wat 'n noemer van 0 is ongedefinieerd, dus net $\frac{\sqrt{2}}{0}$ is ongedefinieerd.

6. Skryf elke desimaal as 'n eenvoudige breuk.

   a) 0,12

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}12 &= \frac{1}{10} + \frac{2}{100} \\ &= \frac{12}{100} \\ &= \frac{3}{25} \end{aligned}$$

   b) 0,006

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}006 &= \frac{6}{1000} \\ &= \frac{3}{500} \end{aligned}$$

c) $4,\overline{14}$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x &= 4{,}141414\ldots \\
100x &= 414{,}141414\ldots \\
100x - x &= (414{,}141414\ldots) - (4{,}141414\ldots) \\
99x &= 410 \\
\therefore x &= \frac{410}{99}
\end{aligned}
$$

d) 1,59
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
1{,}59 &= 1 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100} \\
&= 1\frac{59}{100}
\end{aligned}
$$

e) $12,27\dot{7}$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x &= 12{,}27\dot{7} \\
10x &= 122{,}\dot{7} \\
100x &= 1227{,}\dot{7} \\
\therefore 100x - 10x = 90x &= 1105 \\
\therefore x &= \frac{1105}{90} \\
&= \frac{221}{18}
\end{aligned}
$$

f) $0,8\dot{2}$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
0{,}8\dot{2} &= 0{,}82222{,}.. \\
x &= 0{,}8222... \\
10x &= 8{,}222... \\
100x &= 82{,}222... \\
100x - 10x &= 82{,}222 - 8{,}222... \\
90x &= 74{,}000 \\
90x &= 74 \\
\therefore x &= \frac{37}{45}
\end{aligned}
$$

g) $7,\overline{36}$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x &= 7{,}363636... \\
100x &= 736{,}363636... \\
100x - x &= (736{,}363636...) - (7{,}363636...) \\
99x &= 729 \\
\therefore x &= \frac{81}{11}
\end{aligned}
$$

7. Toon dat die desimaal $3,21\dot{1}\dot{8}$ 'n rasionale getal is.
Oplossing:

$$x = 3{,}21\dot{1}\dot{8}$$
$$1000x = 32\ 118{,}\overline{18}$$
$$\therefore 10\ 000x - x = 9999x = 32\ 115$$
$$\therefore x = \frac{32\ 115}{9999}$$

Dit is ’n rasionale getal omdat beide die teller en die noemer heelgetalle is.

8. Skryf die volgende breuke as desimale getalle:

a) $\frac{1}{18}$

Oplossing:

$$18|\overline{1{,}0000} = 0 \text{ res } 0$$
$$18|\overline{1{,}^{1}0000} = 0 \text{ res } 0$$
$$18|\overline{1{,}^{10}0^{1}000} = 5 \text{ res } 10$$
$$18|\overline{1{,}^{10}0^{1}0^{1}00} = 5 \text{ res } 10$$
$$\frac{1}{18} = 0{,}05555...$$
$$= 0{,}0\dot{5}$$

b) $1\frac{1}{2}$

Oplossing:

$$1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$2|\overline{3{,}0000} = 1 \text{ res } 1$$
$$2|\overline{3{,}^{1}0000} = 5 \text{ res } 0$$
$$= 1{,}5$$

9. Druk $0{,}\overline{78}$ uit as ’n breuk $\frac{a}{b}$ waar $a, b \in \mathbb{Z}$ (toon al jou bewerkings).

Oplossing:

$$x = 0{,}\overline{78}$$
$$100x = 78{,}\overline{78}$$
$$\therefore 100x - x = 99$$
$$\therefore x = \frac{78}{99}$$

10. Vir elk van die volgende getalle:

- skryf die volgende drie syfers;
- meld of die getal rasionaal of irrasionaal is.

a) 1,11235...

Oplossing:

- Die getal eindig nie (dit is getoon deur die . . .). Daar is ook geen aanduiding van ’n repeterende patroon van syfers nie aangesien daar nie ’n kolletjie of ’n strepie oor enige van die getalle is nie. Die volgende drie syfers kan enige syfers wees.
- Irrasionaal, daar is nie ’n repeterende patroon nie.

b) $1{,}\dot{1}$

Oplossing:

- Aangesien daar ’n kolletjie op die 1 is, weet ons dat die 1 repeteer. Die volgende drie syfers is: 111
- Rasionaal, daar is ’n repeterende patroon van syfers.

11. Skryf die volgende rasionale getalle tot 2 desimale plekke.

a) $\frac{1}{2}$
Oplossing:
Om tot twee desimale plekke neer te skryf, moet ons omskakel na desimale vorm: $\frac{1}{2} = 0{,}50$.

b) 1
Oplossing:
Om te skryf tot twee desimale plekke, voeg net 'n komma by en twee 0'e: 1,00.

c) $0{,}11111\bar{1}$
Oplossing:
Ons merk waar die afsnypunt is, bepaal of dit boontoe afgerond is of nie en skryf dan die antwoord. In hierdie geval is daar 'n 1 na die afsnypunt, dus rond ons nie boontoe af nie. Die finale antwoord is: $0{,}11111\bar{1} \approx 0{,}11$.

d) $0{,}99999\bar{1}$
Oplossing:
Ons merk waar die afsnypunt is, bepaal of dit boontoe afgerond is of nie en skryf dan die antwoord. In hierdie geval is daar 'n 9 na die afsnypunt. Die finale antwoord is: $0{,}99999\bar{1} \approx 1{,}00$.

12. Rond die volgende irrasionale getalle af tot 3 desimale plekke.

a) 3,141592654...
Oplossing:
3,142 (rond boontoe af aangesien daar 'n 5 na die afsnypunt is).

b) 1,618033989...
Oplossing:
1,618 (geen afronding aangesien daar 'n 0 na die afsnypunt is).

c) 1,41421356...
Oplossing:
1,414 (geen afronding aangesien daar 'n 2 na die afsnypunt is).

d) 2,71828182845904523536...
Oplossing:
2,718 (geen afronding aangesien daar 'n 2 na die afsnypunt is).

13. Rond die getal 1523,00195593 af tot 4 desimale plekke.
Oplossing:

$$1523{,}00195593 \approx 1523{,}0020$$

14. Rond die getal 1982,94028996 af tot 6 desimale plekke.
Oplossing:

$$1982{,}94028996 \approx 1982{,}940290$$

15. Rond die getal 101,52378984 af tot 4 desimale plekke.
Oplossing:

$$101{,}52378984 \approx 101{,}5238$$

16. Gebruik jou sakrekenaar en skryf die volgende irrasionale getalle tot 3 desimale plekke.

a) $\sqrt{2}$
Oplossing:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562... \approx 1{,}414$$

b) $\sqrt{3}$
Oplossing:

$$\sqrt{3} \approx 1{,}732050808... \approx 1{,}732$$

c) $\sqrt{5}$
Oplossing:

$$\sqrt{5} \approx 2{,}236067977... \approx 2{,}236$$

d) $\sqrt{6}$
Oplossing:

$$\sqrt{6} \approx 2{,}449489743... \approx 2{,}449$$

17. Gebruik jou sakrekenaar (waar nodig) en skryf die volgende getalle tot 5 desimale plekke. Meld of die getalle irrasionaal of rasionaal is.

a) $\sqrt{8}$
Oplossing:

$$\sqrt{8} \approx 2{,}828427125... \approx 2{,}82843$$

Irrasionale getal.

b) $\sqrt{768}$
Oplossing:

$$\sqrt{768} \approx 27{,}71281292... \approx 27{,}71281$$

Irrasionale getal.

c) $\sqrt{0{,}49}$
Oplossing:

$$\sqrt{0{,}49} = 0{,}70000$$

Rasionale getal.

d) $\sqrt{0{,}0016}$
Oplossing:

$$\sqrt{0{,}0016} = 0{,}04000$$

Rasionale getal.

e) $\sqrt{0{,}25}$
Oplossing:

$$\sqrt{0{,}25} = 0{,}50000$$

Rasionale getal.

f) $\sqrt{36}$
Oplossing:

$$\sqrt{36} = 6{,}00000$$

Rasionale getal.

g) $\sqrt{1960}$
Oplossing:

$$\sqrt{1960} \approx 44{,}27188724... \approx 44{,}27189$$

Irrasionale getal.

h) $\sqrt{0{,}0036}$
Oplossing:

$$\sqrt{0{,}0036} = 0{,}06000$$

Rasionale getal.

i) $-8\sqrt{0{,}04}$
Oplossing:

$$-8\sqrt{0{,}04} = -8(0{,}20000) = -1{,}60000$$

Rasionale getal.

j) $5\sqrt{80}$
Oplossing:

$$5\sqrt{80} \approx 5(8{,}94427191...) \approx 44{,}72136$$

Irrasionale getal.

18. Rond af:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tot die naaste 2 desimale plekke.
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2} &\approx 0{,}7071...\\ &\approx 0{,}71\end{aligned}$$

b) $\sqrt{14}$ tot die naaste 3 desimale plekke.
Oplossing:

$$\begin{aligned}\sqrt{14} &\approx 3{,}741657...\\ &\approx 3{,}742\end{aligned}$$

19. Skryf die volgende irrasionale getalle tot 3 desimale plekke en skryf dan elkeen as 'n rasionale getal om 'n benadering te kry van die irrasionale getal.

a) 3,141592654...
Oplossing:

$$\begin{aligned}3{,}141592654... &\approx 3{,}142\\ &\approx 3\frac{142}{1000}\\ &\approx \frac{1571}{500}\end{aligned}$$

b) 1,618033989...
Oplossing:

$$\begin{aligned}1{,}618033989... &\approx 1{,}618\\ &\approx 1\frac{618}{1000}\\ &\approx \frac{809}{500}\end{aligned}$$

c) 1,41421356...
Oplossing:

$$\begin{aligned}1{,}41421356... &\approx 1{,}414\\ &\approx 1\frac{414}{1000}\\ &\approx \frac{707}{500}\end{aligned}$$

d) 2,71828182845904523536...
Oplossing:

$$\begin{aligned}2{,}71828182845904523536... &\approx 2{,}718\\ &\approx 2\frac{718}{1000}\\ &\approx \frac{1359}{500}\end{aligned}$$

20. Bepaal tussen watter twee opeenvolgende heelgetalle die volgende irrasionale getalle lê, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

a) $\sqrt{5}$
Oplossing:

$$2 \text{ en } 3 \ (2^2 = 4 \text{ en } 3^2 = 9)$$

b) $\sqrt{10}$
Oplossing:

$$3 \text{ en } 4 \ (3^2 = 9 \text{ en } 4^2 = 16)$$

c) $\sqrt{20}$
Oplossing:

$$4 \text{ en } 5 \ (4^2 = 16 \text{ en } 5^2 = 25)$$

d) $\sqrt{30}$
Oplossing:

$$5 \text{ en } 6 \ (5^2 = 25 \text{ en } 6^2 = 36)$$

e) $\sqrt[3]{5}$
Oplossing:

$$1 \text{ en } 2 \ (1^3 = 1 \text{ en } 2^3 = 8)$$

f) $\sqrt[3]{10}$
Oplossing:

$$2 \text{ en } 3 \ (2^3 = 8 \text{ en } 3^3 = 27)$$

g) $\sqrt[3]{20}$
Oplossing:

$$2 \text{ en } 3 \ (2^3 = 8 \text{ en } 3^3 = 27)$$

h) $\sqrt[3]{30}$
Oplossing:

$$3 \text{ en } 4 \ (3^3 = 27 \text{ en } 4^3 = 64)$$

i) $\sqrt{90}$
Oplossing:

$$9 \text{ en } 10 \ (9^2 = 81 \text{ en } 10^2 = 100)$$

j) $\sqrt{72}$
Oplossing:

$$8 \text{ en } 9 \ (8^2 = 64 \text{ en } 9^2 = 81)$$

k) $\sqrt[3]{58}$
Oplossing:

$$3 \text{ en } 4 \ (3^3 = 27 \text{ en } 4^3 = 64)$$

l) $\sqrt[3]{118}$
Oplossing:

$$4 \text{ en } 5 \ (4^3 = 64 \text{ en } 5^3 = 125)$$

21. Skat die volgende wortelvorme tot die naaste 1 desimale plek, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

a) $\sqrt{14}$
Oplossing:
$\sqrt{14}$ lê tussen 3 en 4. Aangesien dat $3^2 = 9$ en $4^2 = 16$ lê $\sqrt{14}$ nader aan 4 as aan 3.
Dus 3,7 of 3,8 is redelike skattings.

b) $\sqrt{110}$
Oplossing:
$\sqrt{110}$ lê tussen 10 en 11. Aangesien $10^2 = 100$ en $11^2 = 121$ lê $\sqrt{110}$ byna presies tussen 10 en 11.
Dus 10,5 is ’n redelike skatting.

c) $\sqrt{48}$
Oplossing:
$\sqrt{48}$ lê tussen 6 en 7. Aangesien $6^2 = 36$ en $7^2 = 49$ lê nader aan 7 dan aan 6.
Dus 6,9 is ’n redelike skatting.

d) $\sqrt{57}$
Oplossing:
$\sqrt{57}$ lê tussen 7 en 8. Aangesien $7^2 = 49$ en $8^2 = 64$ lê $\sqrt{57}$ byna presies tussen 7 en 8.
Dus 4,5 of 4,6 is redelike skattings.

22. Brei die volgende produkte uit:

a) $(a + 5)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(a + 5)^2 &= (a + 5)(a + 5)\\ &= a^2 + 5a + 5a + 25\\ &= a^2 + 10a + 25\end{aligned}$$

b) $(n + 12)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(n + 12)^2 &= (n + 12)(n + 12)\\ &= n^2 + 12n + 12n + 144\\ &= n^2 + 24n + 144\end{aligned}$$

c) $(d - 4)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(d - 4)^2 &= (d - 4)(d - 4)\\ &= d^2 - 4d - 4d + 16\\ &= d^2 - 8d + 16\end{aligned}$$

d) $(7w + 2)(7w - 2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(7w + 2)(7w - 2) &= 49w^2 - 14w + 14w - 4\\ &= 49w^2 - 4\end{aligned}$$

e) $(12q + 1)(12q - 1)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(12q + 1)(12q - 1) &= 144q^2 - 12q + 12q - 1\\ &= 144q^2 - 1\end{aligned}$$

f) $-(-x - 2)(x + 2)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} -(-x-2)(x+2) &= (x+2)(x+2) \\ &= x^2+2x+2x+4 \\ &= x^2+4x+4 \end{aligned}$$

g) $(5k-4)(5k+4)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (5k-4)(5k+4) &= 25k^2+20k-20k-16 \\ &= 25k^2-16 \end{aligned}$$

h) $(5f+4)(2f+2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (5f+4)(2f+2) &= 10f^2+10f+8f+8 \\ &= 10f^2+18f+8 \end{aligned}$$

i) $(3n+6)(6n+5)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (3n+6)(6n+5) &= 18n^2+15n+36n+30 \\ &= 18n^2+51n+30 \end{aligned}$$

j) $(2g+6)(g+6)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (2g+6)(g+6) &= 2g^2+12g+6g+36 \\ &= 2g^2+18g+36 \end{aligned}$$

k) $(4y+1)(4y+8)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (4y+1)(4y+8) &= 16y^2+32y+4y+8 \\ &= 16y^2+36y+8 \end{aligned}$$

l) $(d-3)(7d+2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (d-3)(7d+2) &= 7d^2+2d-21d-6 \\ &= 7d^2-19d-6 \end{aligned}$$

m) $(6z-4)(z-2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (6z-4)(z-2) &= 6z^2-12z-4z+8 \\ &= 6z^2-16z+8 \end{aligned}$$

n) $(5w-11)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (5w-11)^2 &= (5w-11)(5w-11) \\ &= 25w^2-55w-55w+121 \\ &= 25w^2-110w+121 \end{aligned}$$

o) $(5s-1)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(5s-1)^2 &= (5s-1)(5s-1)\\ &= 25s^2-5s-5s+1\\ &= 25s^2-10s+1\end{aligned}$$

p) $(3d-8)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(3d-8)^2 &= (3d-8)(3d-8)\\ &= 9d^2-24d-24d+64\\ &= 9d^2-48d+64\end{aligned}$$

q) $5f^2(3f+5)+7f(3f^2+7)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}5f^2(3f+5)+7f(3f^2+7) &= 15f^3+25f^2+21f^3+49f\\ &= 36f^3+25f^2+49f\end{aligned}$$

r) $8d(4d^3+2)+6d^2(7d^2+4)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}8d(4d^3+2)+6d^2(7d^2+4) &= 32d^4+16d+42d^4+24d^2\\ &= 74d^4+16d+24d^2\end{aligned}$$

s) $5x^2(2x+2)+7x(7x^2+7)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}5x^2(2x+2)+7x(7x^2+7) &= 10x^3+10x^2+49x^3+49x\\ &= 59x^3+10x^2+49x\end{aligned}$$

23. Brei die volgende uit:

a) $(y^4+3y^2+y)(y+1)(y-2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(y^4+3y^2+y)(y+1)(y-2) &= (y^4+3y^2+y)(y^2-y-2)\\ &= y^6-y^5-2y^4+3y^4-3y^3-6y^2+y^3-y^2-2y\\ &= y^6-y^5+y^4-2y^3-7y^2-2y\end{aligned}$$

b) $(x+1)^2-(x-1)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(x+1)^2-(x-1)^2 &= x^2+2x+1-(x^2-2x+1)\\ &= x^2+2x+1-x^2+2x-1\\ &= 4x\end{aligned}$$

c) $(x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(x^2+2x+1)(x^2-2x+1) &= x^4-2x^3+x^2+2x^3-4x^2+2x+x^2-2x+1\\ &= x^4-2x^2+1\end{aligned}$$

d) $(4a - 3b)(16a^2 + 12ab + 9b^2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(4a - 3b)(16a^2 + 12ab + 9b^2) &= 64a^3 + 48a^2b + 36ab^2 - 48a^2b - 36ab^2 - 27b^3 \\ &= 64a^3 - 27b^3\end{aligned}$$

e) $2(x + 3y)(x^2 - xy - y^2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}2(x + 3y)(x^2 - xy - y^2) &= 2(x^3 - x^2y - xy^2 + 3x^2y - 3xy^2 - 3y^3) \\ &= 2x^3 + 4x^2y - 8xy^2 - 6y^3\end{aligned}$$

f) $(3a - 5b)(3a + 5b)(a^2 + ab - b^2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(3a - 5b)(3a + 5b)(a^2 + ab - b^2) &= (9a^2 - 25b^2)(a^2 + ab - b^2) \\ &= 9a^4 + 9a^3 - 9a^2b^2 - 25a^2b^2 + 25ab^3 - 25b^4 \\ &= 9a^4 + 9a^3 - 34a^2b^2 + 25ab^3 - 25b^4\end{aligned}$$

g) $\left(y - \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(y - \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) &= y^2 + 1 - 1 + \frac{1}{y^2} \\ &= y^2 - \frac{1}{y^2}\end{aligned}$$

h) $\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)\left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a}\right)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)\left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a}\right) &= \frac{a^2}{9} + 1 - 1 + \frac{3}{a^2} \\ &= \frac{a^2}{9} - \frac{3}{a^2}\end{aligned}$$

i) $\frac{1}{3}(12x - 9y) + \frac{1}{6}(12x + 18y)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(12x - 9y) + \frac{1}{6}(12x + 18y) &= 4x - 3y + 2x + 3y \\ &= 6x\end{aligned}$$

j) $(x + 2)(x - 2) - (x + 2)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 2) - (x + 2)^2 &= x^2 - 4 - (x^2 + 4x + 4) \\ &= -4x - 8\end{aligned}$$

24. Wat is die waarde van e in $(x - 4)(x + e) = x^2 - 16$?
Oplossing:

$$(x - 4)(x + e) = x^2 + ex - 4x - 4e$$

Van die konstante term, sien ons dat $4e = 16$, dus $e = 4$.

25. In $(x+2)(x+k) = x^2 + bx + c$:

a) Vir watter van hierdie waardes van k sal b positief wees?
$-6\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 6$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(x+2)(x+k) &= x^2 + kx + 2x + 2k \\ &= x^2 + (k+2)x + 2k\end{aligned}$$

Die b term is $k+2$ en so enige waarde wat groter is as -2 sal die b term positief maak.
Dus $-1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 6$

b) Vir watter van hierdie waardes van k sal c positief wees?
$-6\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 6$
Oplossing:
Hierbo sien ons dat die c term is $2k$. Daarom sal enige positiewe waarde van k vir c positief maak.
Dus $0\ ;\ 1\ ;\ 6$

c) Vir watter waardes van k sal c positief wees?
Oplossing:
Van bo sien ons dat die c term is $2k$. Daarom sal enige positiewe waarde van k vir c positief maak.
Dus $k > 0$

d) Vir watter waardes van k sal b positief wees?
Oplossing:
Hierbo sien ons dat enige waarde van meer as -2 die b term positief sal maak.
Dus $k > -2$.

26. Antwoord die volgende:

a) Brei $\left(3a - \frac{1}{2a}\right)^2$ uit.
Oplossing:

$$\left(3a - \frac{1}{2a}\right)^2 = 9a^2 + 3 + \frac{1}{4a^2}$$

b) Brei $\left(3a - \frac{1}{2a}\right)\left(9a^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4a^2}\right)$ uit.
Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(3a - \frac{1}{2a}\right)\left(9a^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4a^2}\right) &= 27a^3 + \frac{9}{2}a + \frac{3}{4a} - \frac{9}{2}a - \frac{3}{4a} - \frac{1}{8a^3} \\ &= 27a^3 - \frac{1}{8a^3}\end{aligned}$$

c) Gegee dat $3a - \frac{1}{2a} = 7$, bepaal die waarde van $27a^3 - \frac{1}{8a^3}$ sonder om a op te los.
Oplossing:

$$\begin{aligned}27a^3 - \frac{1}{8a^3} &= \left(3a - \frac{1}{2a}\right)\left(9a^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4a^2}\right) \\ &= 7\left(9a^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4a^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9a^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4a^2} &= \left(3a - \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{9}{2} \\ &= 7^2 + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

$$27a^3 - \frac{1}{8a^3} = 374\frac{1}{2}$$

27. Los op deur faktorisering:

a) $17^2 - 15^2$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
17^2 - 15^2 &= (17 - 15)(17 + 15) \\
&= 2(32) \\
&= 64
\end{aligned}
$$

b) $13^2 - 12^2$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
13^2 - 12^2 &= (13 - 12)(13 + 12) \\
&= 25
\end{aligned}
$$

c) $120045^2 - 120035^2$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
120045^2 - 120035^2 &= (120045 - 120035)(120045 + 120035) \\
&= 10(240080) \\
&= 2400800
\end{aligned}
$$

d) $26^2 - 24^2$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
26^2 - 24^2 &= (26 - 24)(26 + 24) \\
&= 2(50) \\
&= 100
\end{aligned}
$$

28. Stel die volgende voor as die produk van sy priemfaktore:

a) 143

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
143 &= 144 - 1 \\
&= (12 - 1)(12 + 1) \\
&= 11 \times 13
\end{aligned}
$$

b) 168

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
168 &= 169 - 1 \\
&= (13 - 1)(13 + 1) \\
&= 12(14) \\
&= 3 \times 2^2 \times 2 \times 7 \\
&= 2^3 \times 3 \times 7
\end{aligned}
$$

c) 899

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
899 &= 900 - 1 \\
&= (30 - 1)(30 + 1) \\
&= 29 \times 31
\end{aligned}
$$

d) 99
Oplossing:

$$\begin{aligned} 99 &= 100 - 1 \\ &= (10-1)(10+1) \\ &= 3^2 \times 11 \end{aligned}$$

e) 1599
Oplossing:

$$\begin{aligned} 1599 &= 1600 - 1 \\ &= (40-1)(40+1) \\ &= 39(41) \\ &= 3 \times 13 \times 41 \end{aligned}$$

29. Faktoriseer:

a) $a^2 - 9$
Oplossing:

$$a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$$

b) $9b^2 - 81$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 9b^2 - 81 &= 9(b^2 - 9) \\ &= 9(b-3)(b+3) \end{aligned}$$

c) $m^2 - \frac{1}{9}$
Oplossing:

$$m^2 - \frac{1}{9} = \left(m - \frac{1}{3}\right)\left(m + \frac{1}{3}\right)$$

d) $5 - 5a^2b^6$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 5 - 5a^2b^6 &= 5(1 - a^2b^6) \\ &= 5(1 - ab^3)(1 + ab^3) \end{aligned}$$

e) $16ba^4 - 81b$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 16ba^4 - 81b &= b(16a^4 - 81) \\ &= b(4a^2 - 9)(4a^2 + 9) \\ &= b(2a-3)(2a+3)(4a^2+9) \end{aligned}$$

f) $a^2 - 10a + 25$
Oplossing:

$$a^2 - 10a + 25 = (a-5)(a-5)$$

g) $16b^2 + 56b + 49$
Oplossing:

$$16b^2 + 56b + 49 = (4b+7)(4b+7)$$

h) $-4b^2 - 144b^8 + 48b^5$
Oplossing:

$$\begin{aligned} -4b^2 - 144b^8 + 48b^5 &= -4b^2(1 + 36b^6 - 12b^3) \\ &= -4b^2(6b^3 - 1)(6b^3 - 1) \\ &= -4b^2(6b^3 - 1)^2 \end{aligned}$$

i) $16 - x^4$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 16 - x^4 &= (4 - x^2)(4 + x^2) \\ &= (4 + x^2)(2 + x)(2 - x) \end{aligned}$$

j) $7x^2 - 14x + 7xy - 14y$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 7x^2 - 14x + 7xy - 14y &= 7(x^2 - 2x + xy - 2y) \\ &= 7(x(x - 2) + y(x - 2)) \\ &= 7(x - 2)(x + y) \end{aligned}$$

k) $y^2 - 7y - 30$
Oplossing:

$$y^2 - 7y - 30 = (y - 10)(y + 3)$$

l) $1 - x - x^2 + x^3$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 1 - x - x^2 + x^3 &= (1 - x) - x^2(1 - x) \\ &= (1 - x)(1 - x^2) \\ &= (1 - x)(1 - x)(1 + x) \\ &= (1 - x)^2(1 + x) \end{aligned}$$

m) $-3(1 - p^2) + p + 1$
Oplossing:

$$\begin{aligned} -3(1 - p^2) + p + 1 &= -3(1 - p)(1 + p) + (1 + p) \\ &= (1 + p)[-3(1 - p) + 1] \\ &= (1 + p)(-2 + 3p) \end{aligned}$$

n) $x^2 - 2x + 1 - y^4$
Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 - y^4 &= x(x - 2) + (1 - y^2)(1 + y^2) \\ &= x(x - 2) + (1 + y)(1 - y)(1 + y^2) \end{aligned}$$

o) $4b(x^3 - 1) + x(1 - x^3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 4b(x^3 - 1) + x(1 - x^3) &= (x^3 - 1)(4b - x) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(4b - x) \end{aligned}$$

p) $3m(v-7)+19(-7+v)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3m(v-7)+19(-7+v) &= 3m(v-7)+19(v-7) \\ &= (v-7)(3m+19) \end{aligned}$$

q) $3f(z+3)+19(3+z)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3f(z+3)+19(3+z) &= 3f(z+3)+19(z+3) \\ &= (3f+19)(z+3) \end{aligned}$$

r) $3p^3-\frac{1}{9}$
Oplossing:

$$3p^3-\frac{1}{9}=3(p-\frac{1}{3})(p^2+\frac{p}{3}+\frac{1}{9})$$

s) $8x^6-125y^9$
Oplossing:

$$8x^6-125y^9=(2x^2-5y^3)(4x^4+10x^2y^3+25y^6)$$

t) $(2+p)^3-8(p+1)^3$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (2+p)^3-8(p+1)^3 &= [(p+2)-2(p+1)][(p+2)^2+2(p+2)(p+1)+4(p+1)^2] \\ &= [p+2-2p-2][p^2+4p+4+2p^2+6p+4+4p^2+8p+4] \\ &= (-p)(12+18p+7p^2) \end{aligned}$$

u) $\frac{1}{3}a^3-a^2b+2a^2b-6ab^2+3ab^2-9b^3$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}a^3-a^2b+2a^2b-6ab^2+3ab^2-9b^3 &= \frac{1}{3}a^2(a-3b)+2ab(a-3b)+3b^2(a-3b) \\ &= (\frac{1}{3}a^2+2ab+3b^2)(a-3b) \\ &= \frac{(a^2+6ab+9b^2)(a-3b)}{3} \\ &= \frac{(a+3b)^2(a-3b)}{3} \end{aligned}$$

v) $6a^2-17a+5$
Oplossing:

$$6a^2-17a+5=(2a-5)(3a-1)$$

w) $s^2+2s-15$
Oplossing:

$$s^2+2s-15=(s-3)(s+5)$$

x) $16v+24h+2j^5v+3j^5h$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 16v+24h+2j^5v+3j^5h &= 8(2v+3h)+j^5(2v+3h) \\ &= (2v+3h)(8+j^5) \end{aligned}$$

y) $18h - 45g + 2m^3h - 5m^3g$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 18h - 45g + 2m^3h - 5m^3g &= 9(2h - 5g) + m^3(2h - 5g) \\ &= (2h - 5g)(9 + m^3) \end{aligned}$$

z) $63d - 18s + 7u^2d - 2u^2s$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 63d - 18s + 7u^2d - 2u^2s &= 9(7d - 2s) + u^2(7d - 2s) \\ &= (7d - 2s)(9 + u^2) \end{aligned}$$

30. Faktoriseer die volgende:

a) $6a^2 + 14a + 8$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 6a^2 + 14a + 8 &= 2(3a^2 + 7a + 4) \\ &= 2\left(a + 1\right)\left(3a + 4\right) \end{aligned}$$

b) $6g^2 - 15g - 9$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 6g^2 - 15g - 9 &= 3(2g^2 - 5g - 3) \\ &= 3\left(g - 3\right)\left(2g + 1\right) \end{aligned}$$

c) $125g^3 - r^3$
Oplossing:

$$125g^3 - r^3 = (5g - r)(25g^2 + 5gr + r^2)$$

d) $8r^3 + z^3$
Oplossing:

$$8r^3 + z^3 = (2r + z)(4r^2 - 2rz + z^2)$$

e) $14m - 4n + 7jm - 2jn$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 14m - 4n + 7jm - 2jn &= 2(7m - 2n) + j(7m - 2n) \\ &= (7m - 2n)(2 + j) \end{aligned}$$

f) $25d - 15m + 5yd - 3ym$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 25d - 15m + 5yd - 3ym &= 5(5d - 3m) + y(5d - 3m) \\ &= (5d - 3m)(5 + y) \end{aligned}$$

g) $g^3 - 27$
Oplossing:

$$g^3 - 27 = (g - 3)(g^2 + 3g + 9)$$

h) $z^3 + 125$
Oplossing:

$$z^3 + 125 = (z + 5)(z^2 - 5z + 25)$$

i) $b^2 - (3a - 2b)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned} b^2 - (3a-2b)^2 &= (b - (3a-2b))(b + 3a - 2b) \\ &= (3b - 3a)(3a - b) \\ &= 3(b-a)(3a-b) \end{aligned}$$

j) $9y^2 - (4x + 2y)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 9y^2 - (4x+2y)^2 &= (3y + 4x + 2y)(3y - (4x + 2y)) \\ &= (4x + 5y)(y - 4x) \end{aligned}$$

k) $16x^6 - 3y^8$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 16x^6 - 3y^8 &= 4(4x^6 - 9y^8) \\ &= 4(4x^6 - 9y^8) \\ &= 4(4x^3 - 3y^4)(4x^3 + 3y^4) \end{aligned}$$

l) $\frac{1}{6}a^2 - 24b^4$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}a^2 - 24b^4 &= \frac{1}{6}\left(a^2 - 144b^4\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(a - 12b^2\right)\left(a + 12b^2\right) \end{aligned}$$

m) $4(a-3) - 81x^2(a-3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 4(a-3) - 81x^2(a-3) &= (a-3)(4 - 81x^2) \\ &= (a-3)(2-9x)(2+9x) \end{aligned}$$

n) $(2+b)^2 - 11(2+b) - 12$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (2+b)^2 - 11(2+b) - 12 &= ((2+b)+1)((2+b)-12) \\ &= (b+3)(b-10) \end{aligned}$$

o) $2x^2 + 7xy + 5y^2$
Oplossing:

$$2x^2 + 7xy + 5y^2 = (2x + 5y)(x + y)$$

p) $x^2 - 2xy - 15y^2$
Oplossing:

$$x^2 - 2xy - 15y^2 = (x - 5y)(x + 3y)$$

q) $4x^4 + 11x^2 + 6$
Oplossing:

$$4x^4 + 11x^2 + 6 = (4x^2 + 3)(x^2 + 2)$$

r) $6x^4 - 38x^2 + 40$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 6x^4 - 38x^2 + 40 &= 2(3x^4 - 19x^2 + 20) \\ &= 2(3x^2 - 4)(x^2 - 5) \end{aligned}$$

s) $9a^2x + 9a^2y + 27a^2 - b^2x - b^2y - 3b^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 9a^2x + 9a^2y + 27a^2 - b^2x - b^2y - 3b^2 &= (9a^2 - b^2)(x + y + 3) \\ &= (3a + b)(3a - b)(x + y + 3) \end{aligned}$$

t) $2(2y^2 - 5y) - 24$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2(2y^2 - 5y) - 24 &= 2(2y^2 - 5y) - 2(12) \\ &= 2(2y^2 - 5y - 12) \\ &= 2(2y + 3)(y - 4) \end{aligned}$$

u) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x - 2x^2 + 18$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x - 2x^2 + 18 &= \frac{x^3 - 9x - 4x^2 + 36}{2} \\ &= \frac{x^2(x - 4) - 9(x - 4)}{2} \\ &= \frac{(x - 4)(x^2 - 9)}{2} \\ &= \frac{(x - 4)(x - 3)(x + 3)}{2} \end{aligned}$$

v) $27r^3s^3 - 1$
Oplossing:

$$27r^3s^3 - 1 = (3rs - 1)(9r^2s^2 + 3rs + 1)$$

w) $\frac{1}{125h^3} + r^3$
Oplossing:

$$\frac{1}{125h^3} + r^3 = \left(\frac{1}{5h} + r\right)\left(\frac{1}{25h^2} - \frac{r}{5h} + r^2\right)$$

x) $j(64n^3 - b^3) + k(64n^3 - b^3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} j(64n^3 - b^3) + k(64n^3 - b^3) &= (j + k)(64n^3 - b^3) \\ &= (j + k)(4n - b)(16n^2 + 4nb + b^2) \end{aligned}$$

31. Vereenvoudig die volgende:

a) $(a - 2)^2 - a(a + 4)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (a - 2)^2 - a(a + 4) &= a^2 - 4a + 4 - a^2 - 4a \\ &= -8a + 4 \end{aligned}$$

b) $(5a - 4b)(25a^2 + 20ab + 16b^2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(5a - 4b)(25a^2 + 20ab + 16b^2) &= 125a^3 + 100a^2b + 80ab^2 - 100a^2b - 80ab^2 - 64b^3 \\ &= 125a^3 - 64b^3\end{aligned}$$

c) $(2m - 3)(4m^2 + 9)(2m + 3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(2m - 3)(4m^2 + 9)(2m + 3) &= (4m^2 - 9)(4m^2 + 9) \\ &= 16m^4 - 81\end{aligned}$$

d) $(a + 2b - c)(a + 2b + c)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}(a + 2b - c)(a + 2b + c) &= a^2 + 2ab + ac + 2ab + 4b^2 + 2bc - ac - 2bc - c^2 \\ &= a^2 + 4ab + 4b^2 - c^2\end{aligned}$$

e) $\dfrac{m^2 + 11m + 18}{4(m^2 - 4)} \div \dfrac{3m^2 + 27m}{24m^2 - 48m}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{m^2 + 11m + 18}{4(m^2 - 4)} \div \frac{3m^2 + 27m}{24m^2 - 48m} &= \frac{m^2 + 11m + 18}{4(m^2 - 4)} \times \frac{24m^2 - 48m}{3m^2 + 27m} \\ &= \frac{(m + 9)(m + 2)}{4(m - 2)(m + 2)} \times \frac{24m(m - 2)}{3m(m + 9)} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{24}{3} \\ &= 2\end{aligned}$$

f) $\dfrac{t^2 + 9t + 18}{5(t^2 - 9)} \div \dfrac{4t^2 + 24t}{100t^2 - 300t}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{t^2 + 9t + 18}{5(t^2 - 9)} \div \frac{4t^2 + 24t}{100t^2 - 300t} &= \frac{t^2 + 9t + 18}{5(t^2 - 9)} \times \frac{100t^2 - 300t}{4t^2 + 24t} \\ &= \frac{(t + 6)(t + 3)}{5(t - 3)(t + 3)} \times \frac{100t(t - 3)}{4t(t + 6)} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{100}{4} \\ &= 5\end{aligned}$$

g) $\dfrac{4 - b^2}{3b - 6}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{4 - b^2}{3b - 6} &= \frac{(2 - b)(2 + b)}{3(b - 2)} \\ &= -\frac{2 + b}{3}\end{aligned}$$

h) $\dfrac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x+4}{x^3-8} &= \frac{x^2+2x+4}{(x-2)(x^2+2x+4)}\\ &= \frac{1}{x-2}\end{aligned}$$

i) $\dfrac{x^2-5x-14}{3x+6}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-5x-14}{3x+6} &= \frac{(x-7)(x+2)}{3(x+2)}\\ &= \frac{x-7}{3}\end{aligned}$$

j) $\dfrac{d^2+23d+132}{5(d^2-121)} \div \dfrac{4d^2+48d}{100d^2-1100d}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{d^2+23d+132}{5(d^2-121)} \div \frac{4d^2+48d}{100d^2-1100d} &= \frac{d^2+23d+132}{5(d^2-121)} \times \frac{100d^2-1100d}{4d^2+48d}\\ &= \frac{(d+12)(d+11)}{5(d-11)(d+11)} \times \frac{100d(d-11)}{4d(d+12)}\\ &= \frac{1}{5} \times \frac{100}{4}\\ &= 5\end{aligned}$$

k) $\dfrac{a-2}{a^2+4a+3} \div \dfrac{(a-1)(a+1)}{a-1} \times \dfrac{a^2-2a-15}{a-2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\frac{a-2}{a^2+4a+3} \div \frac{(a-1)(a+1)}{a-1} \times \frac{a^2-2a-15}{a-2}\\ &= \frac{a-2}{(a+1)(a+3)} \div \frac{(a-1)(a+1)}{a-1} \times \frac{(a+3)(a-5)}{a-2}\\ &= \frac{a-2}{(a+1)(a+3)} \times \frac{a-1}{(a-1)(a+1)} \times \frac{(a+3)(a-5)}{a-2}\\ &= \frac{a-5}{(a+2)^2}\end{aligned}$$

l) $\dfrac{a+6}{a^2+12a+11} \times \dfrac{a^2+14a+33}{a+3} \div \dfrac{a^3+216}{a+1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\frac{a+6}{a^2+12a+11} \times \frac{a^2+14a+33}{a+3} \div \frac{a^3+216}{a+1}\\ &= \frac{a+6}{(a+11)(a+1)} \times \frac{(a+11)(a+3)}{a+3} \times \frac{a+1}{(a+6)(a^2+6a+36)}\\ &= \frac{1}{a^2+6a+36}\end{aligned}$$

m) $2 \div \dfrac{a+b}{a+2b} \times \dfrac{b^2-ba-6a^2}{a^2-4b^2} \times \dfrac{a^2-b-2b^2}{3a-b}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&2 \div \frac{a+b}{a+2b} \times \frac{b^2-ba-6a^2}{a^2-4b^2} \times \frac{a^2-b-2b^2}{3a-b}\\ &= 2 \times \frac{a+2b}{a+b} \times \frac{(b-3a)(b+2a)}{(a-2b)(a+2b)} \times \frac{(a-2b)(a+b)}{3a-b}\\ &= -2(2a+b)\end{aligned}$$

n) $\dfrac{st+sb+31t+31b}{t+b}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{st+sb+31t+31b}{(t+b)} &= \frac{s(t+b)+31(t+b)}{(t+b)}\\ &= \frac{(t+b)(s+31)}{(t+b)}\\ &= s+31\end{aligned}$$

o) $\dfrac{ny+nq+8y+8q}{y+q}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{ny+nq+8y+8q}{(y+q)} &= \frac{n(y+q)+8(y+q)}{(y+q)}\\ &= \frac{(y+q)(n+8)}{(y+q)}\\ &= n+8\end{aligned}$$

p) $\dfrac{p^2-q^2}{p} \div \dfrac{p+q}{p^2-pq}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{p^2-q^2}{p} \div \frac{p+q}{p^2-pq} &= \frac{(p-q)(p+q)}{p} \times \frac{p(p-q)}{p+q}\\ &= (p-q)^2\\ &= p^2-2pq+q^2\end{aligned}$$

q) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{2x}{3}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2}{x}+\frac{x}{2}-\frac{2x}{3} &= \frac{12+3x^2-4x^2}{6x}\\ &= \frac{12-x^2}{6x}\end{aligned}$$

r) $\dfrac{1}{a+7}-\dfrac{a+7}{a^2-49}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+7}-\frac{a+7}{a^2-49} &= \frac{1}{a+7}-\frac{a+7}{(a+7)(a-7)}\\ &= \frac{-14}{(a+7)(a-7)}\end{aligned}$$

s) $\dfrac{x+2}{2x^3}+16$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{2x^3}+16 &= \frac{(x+2)+16(2x^3)}{2x^3}\\ &= \frac{32x^3+x+2}{2x^3}\end{aligned}$$

t) $\dfrac{1-2a}{4a^2-1}-\dfrac{a-1}{2a^2-3a+1}-\dfrac{1}{1-a}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{1-2a}{4a^2-1}-\frac{a-1}{2a^2-3a+1}-\frac{1}{1-a}&=\frac{1-2a}{(2a-1)(2a+1)}-\frac{a-1}{(2a-1)(a-1)}+\frac{1}{a-1}\\&=-\frac{(2a-1)}{(2a-1)(2a+1)}-\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{a-1}\\&=\frac{4a-1}{(2a+1)(2a-1)(a-1)}\end{aligned}$$

u) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{x-2}{3}+4$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x+\frac{x-2}{3}+4&=\frac{3x+2(x-2)+(2)(3)(4)}{6}\\&=\frac{3x+2x-4+24}{6}\\&=\frac{5x+20}{6}\end{aligned}$$

v) $\dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{4x^2-x-3}{x^2+2x-3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+2x}+\frac{4x^2-x-3}{x^2+2x-3}&=\frac{1}{x(x+2)}+\frac{(4x+3)(x-1)}{(x-1)(x+3)}\\&=\frac{1}{x(x+2)}+\frac{4x+3}{x+3}\\&=\frac{x+3+x(4x+3)(x+2)}{x(x+2)(x+3)}\\&=\frac{x+3+x(4x^2+11x+6)}{x(x+2)(x+3)}\\&=\frac{4x^3+11x^2+7x+3}{x(x+2)(x+3)}\end{aligned}$$

w) $\dfrac{b^2+6b+9}{b^2-9}+\dfrac{b^2-6b+8}{(b-2)(b+3)}+\dfrac{1}{b+3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{b^2+6b+9}{b^2-9}+\frac{b^2-6b+8}{(b-2)(b+3)}+\frac{1}{b+3}&=\frac{(b+3)^2}{(b+3)(b-3)}+\frac{(b-4)(b-2)}{(b-2)(b+3)}+\frac{1}{b+3}\\&=\frac{b+3}{b-3}+\frac{b-4}{b+3}+\frac{1}{b+3}\\&=\frac{(b+3)^2+(b-3)(b-4)+b-3}{(b-3)(b+3)}\\&=\frac{b^2+6b+9+b^2-7b+12+b-3}{(b-3)(b+3)}\\&=\frac{2b^2+18}{(b-3)(b+3)}\\&=\frac{2(b^2+9)}{(b-3)(b+3)}\end{aligned}$$

x) $\dfrac{x^2+2x}{x^2+x+6}\times\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x}{x^2+x+6} \times \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2} &= \frac{x(x+2)}{x^2+x+6} \times \frac{(x+1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{x^2+x+6}\end{aligned}$$

y) $\dfrac{12}{z+12} + \dfrac{5}{z-5}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{12}{z+12} + \frac{5}{z-5} &= \frac{12(z-5)+5(z+12)}{(z+12)(z-5)} \\ &= \frac{12z-60+5z+60}{(z+12)(z-5)} \\ &= \frac{17z}{(z+12)(z-5)}\end{aligned}$$

z) $\dfrac{11}{w-11} - \dfrac{4}{w-4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\frac{11}{w-11} - \frac{4}{w-4} \\ &= \frac{11(w-4)-4(w-11)}{(w-11)(w-4)} \\ &= \frac{11w-44-4w+44}{(w-11)(w-4)} \\ &= \frac{7w}{(w-11)(w-4)}\end{aligned}$$

32. Wys dat $(2x-1)^2-(x-3)^2$ vereenvoudig kan word tot $(x+2)(3x-4)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}(2x-1)^2-(x-3)^2 &= (2x-1)(2x-1)-(x-3)(x-3) \\ &= 4x^2-2x-2x+1-(x^2-3x-3x-9) \\ &= 3x^2+2x-8 \\ &= (3x-4)(x+2)\end{aligned}$$

33. Wat moet by x^2-x+4 gevoeg word om dit gelyk te maak aan $(x+2)^2$?

Oplossing:

Veronderstel A moet bygevoeg word by die uitdrukking om die gewensde resultaat te verkry.

$$\begin{aligned}\therefore (x^2-x+4)+A &= (x+2)^2 \\ \therefore A &= (x+2)(x+2)-(x^2-x+4) \\ &= x^2+2x+2x+4-x^2+x-4 \\ &= 5x\end{aligned}$$

Dus $5x$ moet bygevoeg word.

34. Evalueer $\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$ as $x =$ 7,85 sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. Toon al jou stappe

Oplossing:

Vereenvoudig eers die uitdrukking:

$$\begin{aligned}\frac{x^3+1}{x^2-x+1} &= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} \\ &= x+1\end{aligned}$$

Stel nou die waarde van x in: 7,85 + 1 = 8,85.

35. Met watter uitdrukking moet $(a - 2b)$ vermenigvuldig word om 'n produk te kry van $(a^3 - 8b^3)$?
Oplossing:

$$(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2) = a^3 - 8b^3$$

Dus die uitdrukking is $a^2 + 2ab + 4b^2$.

36. Met watter uitdrukking moet $27x^3 + 1$ gedeel word om 'n kwosiënt te kry van $3x + 1$?
Oplossing:

$$\begin{aligned} 27x^3 + 1 &= (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) \\ \frac{(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)}{9x^2 - 3x + 1} &= 3x + 1 \end{aligned}$$

Dus die uitdrukking is $9x^2 - 3x + 1$.

37. Wat is die beperkings op die volgende?

a) $\dfrac{4}{3x^2 + 2x - 1}$
Oplossing:

$$\frac{4}{3x^2 + 2x - 1} = \frac{4}{(3x - 1)(x + 1)}$$
$$x \neq \frac{1}{3} \text{ en } x \neq -1$$

b) $\dfrac{a}{3(b - a) + ab - a^2}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{a}{3(b - a) + ab - a^2} &= \frac{a}{3(b - a) + a(b - a)} \\ &= \frac{a}{(b - a)(a + 3)} \end{aligned}$$
$$a \neq b \text{ en } a \neq -3$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HCY	2a. 2HCZ	2b. 2HD2	2c. 2HD3	2d. 2HD4	2e. 2HD5	2f. 2HD6	3a. 2HD7
3b. 2HD8	3c. 2HD9	3d. 2HDB	4. 2HDC	5. 2HDD	6a. 2HDF	6b. 2HDG	6c. 2HDH
6d. 2HDJ	6e. 2HDK	6f. 2HDM	6g. 2HDN	7. 2HDP	8a. 2HDQ	8b. 2HDR	9. 2HDS
10a. 2HDT	10b. 2HDV	11a. 2HDW	11b. 2HDX	11c. 2HDY	11d. 2HDZ	12a. 2HF2	12b. 2HF3
12c. 2HF4	12d. 2HF5	13. 2HF6	14. 2HF7	15. 2HF8	16a. 2HF9	16b. 2HFB	16c. 2HFC
16d. 2HFD	17a. 2HFF	17b. 2HFG	17c. 2HFH	17d. 2HFJ	17e. 2HFK	17f. 2HFM	17g. 2HFN
17h. 2HFP	17i. 2HFQ	17j. 2HFR	18a. 2HFS	18b. 2HFT	19a. 2HFV	19b. 2HFW	19c. 2HFX
19d. 2HFY	20a. 2HFZ	20b. 2HG2	20c. 2HG3	20d. 2HG4	20e. 2HG5	20f. 2HG6	20g. 2HG7
20h. 2HG8	20i. 2HG9	20j. 2HGB	20k. 2HGC	20l. 2HGD	21a. 2HGF	21b. 2HGG	21c. 2HGH
21d. 2HGJ	22a. 2HGK	22b. 2HGN	22c. 2HGP	22d. 2HGQ	22e. 2HGR	22f. 2HGS	22g. 2HGT
22h. 2HGV	22i. 2HGW	22j. 2HGX	22k. 2HGY	22l. 2HGZ	22m. 2HH2	22n. 2HH3	22o. 2HH4
22p. 2HH5	22q. 2HH6	22r. 2HH7	22s. 2HH8	23a. 2HH9	23b. 2HHB	23c. 2HHC	23d. 2HHD
23e. 2HHF	23f. 2HHG	23g. 2HHH	23h. 2HHJ	23i. 2HHK	23j. 2HHM	24. 2HHN	25. 2HHP
26. 2HHQ	27a. 2HHR	27b. 2HHS	27c. 2HHT	27d. 2HHV	28a. 2HHW	28b. 2HHX	28c. 2HHY
28d. 2HHZ	28e. 2HJ2	29a. 2HJ3	29b. 2HJ4	29c. 2HJ5	29d. 2HJ6	29e. 2HJ7	29f. 2HJ8
29g. 2HJ9	29h. 2HJB	29i. 2HJC	29j. 2HJD	29k. 2HJF	29l. 2HJG	29m. 2HJH	29n. 2HJJ
29o. 2HJK	29p. 2HJM	29q. 2HJN	29r. 2HJP	29s. 2HJQ	29t. 2HJR	29u. 2HJS	29v. 2HJT
29w. 2HJV	29x. 2HJW	29y. 2HJX	29z. 2HJY	30a. 2HJZ	30b. 2HK2	30c. 2HK3	30d. 2HK4
30e. 2HK5	30f. 2HK6	30g. 2HK7	30h. 2HK8	30i. 2HK9	30j. 2HKB	30k. 2HKC	30l. 2HKD
30m. 2HKF	30n. 2HKG	30o. 2HKH	30p. 2HKJ	30q. 2HKK	30r. 2HKM	30s. 2HKN	30t. 2HKP
30u. 2HKQ	30v. 2HKR	30w. 2HKS	30x. 2HKT	31a. 2HKV	31b. 2HKW	31c. 2HKX	31d. 2HKY
31e. 2HKZ	31f. 2HM2	31g. 2HM3	31h. 2HM4	31i. 2HM5	31j. 2HM6	31k. 2HM7	31l. 2HM8
31m. 2HM9	31n. 2HMB	31o. 2HMC	31p. 2HMD	31q. 2HMF	31r. 2HMG	31s. 2HMH	31t. 2HMJ
31u. 2HMK	31v. 2HMM	31w. 2HMN	31x. 2HMP	31y. 2HMQ	31z. 2HMR	32. 2HMS	33. 2HMT
34. 2HMV	35. 2HMW	36. 2HMX	37a. 2HMY	37b. 2HMZ			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 2

Eksponente

2.1 Inleiding

- Inhoud wat in hierdie hoofstuk gedek word, sluit in die wette van eksponente van graad 9 en vereenvoudiging van uitdrukkings met eksponente asook oplos van eenvoudige eksponensiële vergelykings.
- Die inhoud van hierdie hoofstuk sal gebruik word in eksponensiële vergelykings later asook in graad 11 vir finansiële berekeninge.
- Let daarop dat die rasionele eksponent wet nie gedek word in hierdie hoofstuk nie. Dit is net in graad 11.

2.2 Hersiening van eksponentwette

Exercise 2 – 1:

Vereenvoudig sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

1. 16^0

   Oplossing:

$$16^0 = 1$$

2. $16a^0$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 16a^0 &= 16(1) \\ &= 16 \end{aligned}$$

3. $11^{9x} \times 11^{2x}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 11^{9x} \times 11^{2x} &= 11^{9x+2x} \\ &= 11^{11x} \end{aligned}$$

4. $10^{6x} \times 10^{2x}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 10^{6x} \times 10^{2x} &= 10^{6x+2x} \\ &= 10^{8x} \end{aligned}$$

5. $(6c)^3$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} (6c)^3 &= 6^3c^3 \\ &= 216c^3 \end{aligned}$$

6. $(5n)^3$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} (5n)^3 &= 5^3n^3 \\ &= 125n^3 \end{aligned}$$

7. $\frac{2^{-2}}{3^2}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2^{-2}}{3^2} &= \frac{\frac{1}{2^2}}{9} \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{36}\end{aligned}$$

8. $\frac{5}{2^{-3}}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{5}{2^{-3}} &= \frac{5}{\frac{1}{2^3}} \\ &= \frac{5}{1}\times\frac{8}{1} \\ &= 40\end{aligned}$$

9. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} &= \frac{2^{-3}}{3^{-3}} \\ &= \frac{1}{8}\times\frac{27}{1} \\ &= \frac{27}{8}\end{aligned}$$

10. $\frac{a^2}{a^{-1}}$
Oplossing:

$$\frac{a^2}{a^{-1}} = a^3$$

11. $\frac{xy^{-3}}{x^4y}$
Oplossing:

$$\frac{xy^{-3}}{x^4y} = \frac{1}{x^3y^4}$$

12. x^2x^{3t+1}
Oplossing:

$$\begin{aligned}x^2x^{3t+1} &= x^2x^{3t}x^1 \\ &= x^{2+1}x^{3t} \\ &= x^3x^{3t} \\ &= x^{3t+3}\end{aligned}$$

13. $3\times 3^{2a}\times 3^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}3\times 3^{2a}\times 3^2 &= 3^{1+2a+2} \\ &= 3^{2a+3}\end{aligned}$$

14. $\dfrac{2^{m+20}}{2^{m+20}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2^{m+20}}{2^{m+20}} &= 2^{(m+20)-(m+20)}\\ &= 2^{m+20-m-20}\\ &= 2^{0}\\ &= 1\end{aligned}$$

15. $\dfrac{2^{x+4}}{2^{x+3}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2^{x+4}}{2^{x+3}} &= 2^{(x+4)-(x+3)}\\ &= 2^{x+4-x-3}\\ &= 2^{1}\\ &= 2\end{aligned}$$

16. $(2a^4)(3ab^2)$

Oplossing:

$$(2a^4)(3ab^2) = 6a^5b^2$$

17. $(7m^4n)(8m^6n^8)$

Oplossing:

$$(7m^4n)(8m^6n^8) = 56m^{10}n^9$$

18. $2(-a^7b^8)(-4a^3b^6)(-9a^6b^2)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}2(-a^7b^8)(-4a^3b^6)(-9a^6b^2) &= -72a^{7+3+6}b^{8+6+2}\\ &= -72a^{16}b^{16}\end{aligned}$$

19. $(-9x^3y^6)\left(\frac{1}{9}x^8y^7\right)\left(\frac{1}{5}x^3y^6\right)$

Oplossing:

$$(-9x^3y^6)\left(\frac{1}{9}x^8y^7\right)\left(\frac{1}{5}x^3y^6\right) = -\frac{1}{5}x^{14}y^{19}$$

20. $\dfrac{a^{3x}}{a^{x}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{a^{3x}}{a^{x}} &= a^{3x} \times a^{-x}\\ &= a^{3x-x}\\ &= a^{2x}\end{aligned}$$

21. $\dfrac{20x^{10}a^4}{4x^9a^3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\frac{20x^{10}a^4}{4x^9a^3}\\&= 5x^{(10-9)}a^{(4-3)}\\&= 5ax\end{aligned}$$

22. $\frac{18c^{10}p^8}{9c^6p^5}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\frac{18c^{10}p^8}{9c^6p^5}\\&= 2c^{(10-6)}p^{(8-5)}\\&= 2c^4p^3\end{aligned}$$

23. $\frac{6m^8a^{10}}{2m^3a^5}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\frac{6m^8a^{10}}{2m^3a^5}\\&= 3m^{(8-3)}a^{(10-5)}\\&= 3a^5m^5\end{aligned}$$

24. $3^{12} \div 3^9$

Oplossing:

$$\begin{aligned}3^{12} \div 3^9 &= 3^{12-9}\\&= 3^3\\&= 27\end{aligned}$$

25. $\frac{7(a^3)^3}{a^7}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{7(a^3)^3}{a^7} &= \frac{7a^9}{a^7}\\&= 7a^2\end{aligned}$$

26. $\frac{9(ab^4)^8}{a^3b^5}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{9(ab^4)^8}{a^3b^5} &= \frac{9a^8b^{32}}{a^3b^5}\\&= 9a^5b^{27}\end{aligned}$$

27. $\frac{2^2}{6^2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2^2}{6^2} &= \left(\frac{2}{6}\right)^2\\&= \frac{1}{3^2}\\&= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

28. $\left(\frac{a^6}{b^7}\right)^5$
Oplossing:

$$\left(\frac{a^6}{b^7}\right)^5 = \frac{a^{30}}{b^{35}}$$

29. $\left(2t^4\right)^3$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(2t^4\right)^3 &= 2^3 t^{(4)(3)}\\ &= 8t^{12}\end{aligned}$$

30. $\left(3^{n+3}\right)^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(3^{n+3}\right)^2 &= 3^{(n+3)(2)}\\ &= 3^{2n+6}\end{aligned}$$

31. $\frac{3^n 9^{n-3}}{27^{n-1}}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3^n 9^{n-3}}{27^{n-1}} &= \frac{3^n 3^{2(n-3)}}{3^{3(n-1)}}\\ &= \frac{3^n 3^{2n-6}}{3^{3n-3}}\\ &= \frac{3^{n+2n-6}}{3^{3n-3}}\\ &= \frac{3^{3n-6}}{3^{3n-3}}\\ &= 3^{(3n-6)-(3n-3)}\\ &= 3^{3n-6-3n+3}\\ &= 3^{-3}\\ &= \frac{1}{27}\end{aligned}$$

32. $\frac{13^c + 13^{c+2}}{3 \times 13^c - 13^c}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{13^c + 13^{c+2}}{3 \times 13^c - 13^c} &= \frac{13^c(1 + 13^2)}{13^c(3-1)}\\ &= \frac{(1 + 13^2)}{(3-1)}\\ &= \frac{1+169}{3-1}\\ &= \frac{170}{2}\\ &= \frac{85}{1}\\ &= 85\end{aligned}$$

33. $\frac{3^{5x} \times 81^{5x} \times 3^3}{9^{8x}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{3^{5x} \times 81^{5x} \times 3^3}{9^{8x}} &= \frac{3^{5x} \times \left(3^4\right)^{5x} \times 3^3}{\left(3^2\right)^{8x}} \\
&= \frac{3^{5x} \times 3^{20x} \times 3^3}{3^{16x}} \\
&= \frac{3^{5x+20x+3}}{3^{16x}} \\
&= \frac{3^{25x+3}}{3^{16x}} \\
&= 3^{25x+3-16x} \\
&= 3^{9x+3}
\end{aligned}$$

34. $\dfrac{16^x - 144^b}{4^x - 12^b}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{16^x - 144^b}{4^x - 12^b} &= \frac{\left(4^2\right)^x - \left(12^2\right)^b}{4^x - 12^b} \\
&= \frac{\left(4^x\right)^2 - \left(12^b\right)^2}{4^x - 12^b} \\
&= \frac{\left(4^x - 12^b\right)\left(4^x + 12^b\right)}{4^x - 12^b} \\
&= 4^x + 12^b
\end{aligned}$$

35. $\dfrac{5^{2y-3}2^{4y+4}}{10^{-5y+5}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{5^{2y-3}2^{4y+4}}{10^{-5y+5}} &= \frac{5^{2y-3} \,.\, 2^{4y+4}}{(5 \times 2)^{-5y+5}} \\
&= \frac{5^{2y-3}2^{4y+4}}{5^{-5y+5}2^{-5y+5}} \\
&= 5^{(2y-3)-(-5y+5)} \times 2^{(4y+4)-(-5y+5)} \\
&= 5^{7y-8} \times 2^{9y-1}
\end{aligned}$$

36. $\dfrac{6^4 \times 12^3 \times 4^5}{30^3 \times 3^6}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{6^4 \times 12^3 \times 4^5}{30^3 \times 3^6} &= \frac{\left(3^4 \times 2^4\right) \times \left(3^3 \times 4^3\right) \times 4^5}{\left(3^3 \times 10^3\right) \times 3^6} \\
&= \frac{3^4 \times 2^4 \times 3^3 \times 2^6 \times 2^{10}}{3^3 \times 2^3 \times 5^3 \times 3^6} \\
&3^{4+3-3-6} \,.\, 2^{4+6+10-3} \,.\, 5^{-3} \\
&= \frac{2^{17}}{3^2 5^3}
\end{aligned}$$

37. $\dfrac{9^3 \times 20^2}{4 \times 5^2 \times 3^5}$

Oplossing:

$$\frac{9^3 \times 20^2}{4 \times 5^2 \times 3^5} = \frac{3^6 4^2 5^2}{4 \times 5^2 3^5}$$
$$= \frac{3^6 2^4 5^2}{2^2 5^2 3^5}$$
$$= 3^{6-5} 2^{4-2} 5^{2-2}$$
$$= 3 \times 2^2$$
$$= 12$$

38. $\dfrac{7^b + 7^{b-2}}{4 \times 7^b + 3 \times 7^b}$
    Oplossing:

$$\frac{7^b + 7^{b-2}}{4 \times 7^b - 3 \times 7^b} = \frac{7^b(1 + 7^{-2})}{7^b(4 - 3)}$$
$$= \frac{(1 + 7^{-2})}{1}$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{49}}{1}$$
$$= \frac{51}{49}$$

39. $\dfrac{12^y - 96^y}{3^y + 6^y}$
    Oplossing:

$$\frac{12^y - 96^y}{3^y + 6^y} = \frac{(4 \, . \, 3)^y - \left(2^5 \, . \, 3\right)^y}{3^y + (2 \, . \, 3)^y}$$
$$= \frac{3^y \left(4^y - 2^{5y}\right)}{3^y \left(2 + 1\right)}$$
$$= \frac{4^y - 2^{5y}}{3}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HN7	2. 2HN8	3. 2HN9	4. 2HNB	5. 2HNC	6. 2HND	7. 2HNF	8. 2HNG
9. 2HNH	10. 2HNJ	11. 2HNK	12. 2HNM	13. 2HNN	14. 2HNP	15. 2HNQ	16. 2HNR
17. 2HNS	18. 2HNT	19. 2HNV	20. 2HNW	21. 2HNX	22. 2HNY	23. 2HNZ	24. 2HP2
25. 2HP3	26. 2HP4	27. 2HP5	28. 2HP6	29. 2HP7	30. 2HP8	31. 2HP9	32. 2HPB
33. 2HPC	34. 2HPD	35. 2HPF	36. 2HPG	37. 2HPH	38. 2HPJ	39. 2HPK	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.3 Rasionale eksponente

Volgens CAPS word die rasionale eksponentwette in Graad 11 aangebied, maar jy mag verkies om leerders op hierdie stadium aan die rasionale eksponentwet $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ bekend te stel.

Exercise 2 – 2:

Vereenvoudig sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

1. $t^{\frac{1}{4}} \times 3t^{\frac{7}{4}}$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{4}} \times 3t^{\frac{7}{4}} &= 3t^{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}} \\ &= 3t^{\frac{8}{4}} \\ &= 3t^2 \end{aligned}$$

2. $\dfrac{16x^2}{(4x^2)^{\frac{1}{2}}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{16x^2}{(4x^2)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{4^2x^2}{4^{\frac{1}{2}}x^{(2)\left(\frac{1}{2}\right)}} \\ &= \frac{4^2x^2}{4^{\frac{1}{2}}x} \\ &= 4^{2-\frac{1}{2}} \,.\, x^{2-1} \\ &= \left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} x \\ &= 2^3x \\ &= 8x \end{aligned}$$

3. $(0{,}25)^{\frac{1}{2}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} (0{,}25)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(2^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. $(27)^{-\frac{1}{3}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} (27)^{-\frac{1}{3}} &= \left(3^3\right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 3^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

5. $\left(3p^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(3p^4\right)^{\frac{1}{2}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \left(3p^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(3p^4\right)^{\frac{1}{2}} &= 3^{\frac{1}{2}}p \times 3^{\frac{1}{2}}p^2 \\ &= 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \times p^{1+2} \\ &= 3p^3 \end{aligned}$$

6. $12\left(a^4b^8\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(512a^3b^3\right)^{\frac{1}{3}}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
12\left(a^4b^8\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(512a^3b^3\right)^{\frac{1}{3}} &= 12a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{8}{2}} \times (512)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{3}{3}} \\
&= 12a^2b^4 \times \left(8^3\right)^{\frac{1}{3}}a^1b^1 \\
&= 12a^2b^4 \times 8a^1b^1 \\
&= 96a^3b^5
\end{aligned}
$$

7. $\left((-2)^4a^6b^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\left((-2)^4a^6b^2\right)^{\frac{1}{2}} &= (-2)^2(a^3b) \\
&= 4a^3b
\end{aligned}
$$

8. $\left(a^{-2}b^6\right)^{\frac{1}{2}}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\left(a^{-2}b^6\right)^{\frac{1}{2}} &= a^{-1}b^3 \\
&= \frac{b^3}{a}
\end{aligned}
$$

9. $\left(16x^{12}b^6\right)^{\frac{1}{3}}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\left(16x^{12}b^6\right)^{\frac{1}{3}} &= \left((8 \times 2)x^{12}b^6\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 2\ .\ 2^{\frac{1}{3}}a^4b^2
\end{aligned}
$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HPN 2. 2HPP 3. 2HPQ 4. 2HPR 5. 2HPS 6. 2HPT 7. 2HPV 8. 2HPW 9. 2HPX

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.4 Eksponensiële vergelykings

Leerders mag Uitgewerkte Voorbeeld 13 makliker vind deur die gebruik van die k-substitusie metode. Jy mag verkies om terug te kom na hierdie voorbeeld nadat die k-substitusie onderrig is. Die oplossing deur die gebruik van k-substitusie is as volg:

$$
\begin{aligned}
2^x - 2^{4-x} &= 0 \\
2^x - 2^4\ .\ 2^{-x} &= 0 \\
2^x - \frac{2^4}{2^x} &= 0 \\
\text{Stel } 2^x &= k \\
k - \frac{2^4}{k} &= 0 \\
\times k \qquad k^2 - 16 &= 0 \\
(k-4)(k+4) &= 0 \\
k = -4 &\qquad \text{or } k = 4 \\
2^x \neq -4 &\qquad 2^x = 4 \\
&\qquad 2^x = 2^2 = 4 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Exercise 2 – 3:

1. Los die veranderlike op:

   a) $2^{x+5} = 32$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 2^{x+5} &= 32 \\ 2^{x+5} &= 2^5 \\ \therefore x + 5 &= 5 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

   b) $5^{2x+2} = \frac{1}{125}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 5^{2x+2} &= \frac{1}{125} \\ 5^{2x+2} &= \frac{1}{5^3} \\ 5^{2x+2} &= 5^{-3} \\ \therefore 2x + 2 &= -3 \\ 2x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

   c) $64^{y+1} = 16^{2y+5}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 64^{y+1} &= 16^{2y+5} \\ 2^{6(y+1)} &= 2^{4(2y+5)} \\ 2^{6y+6} &= 2^{8y+20} \\ \therefore 6y + 6 &= 8y + 20 \\ 2y &= -14 \\ y &= -7 \end{aligned}$$

   d) $3^{9x-2} = 27$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 3^{9x-2} &= 27 \\ 3^{9x-2} &= 3^3 \\ \therefore 9x - 2 &= 3 \\ 9x &= 5 \\ x &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

   e) $25 = 5^{z-4}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 25 &= 5^{z-4} \\ 5^2 &= 5^{z-4} \\ 2 &= z - 4 \\ 2 + 4 &= z \\ 6 &= z \end{aligned}$$

f) $-\frac{1}{2} \cdot 6^{\frac{m}{2}+3} = -18$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
(-2)\left(-\frac{1}{2}6^{\frac{m}{2}+3}\right) &= (-18)(-2)\\
6^{\frac{m}{2}+3} &= 36\\
6^{\frac{m}{2}+3} &= 6^2\\
\frac{m}{2}+3 &= 2\\
\frac{m}{2} &= -1\\
m &= -2
\end{aligned}$$

g) $81^{k+2} = 27^{k+4}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
81^{k+2} &= 27^{k+4}\\
3^{4(k+2)} &= 3^{3(k+4)}\\
\therefore 4k+8 &= 3k+12\\
k &= 4
\end{aligned}$$

h) $25^{1-2x} - 5^4 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
25^{1-2x} - 5^4 &= 0\\
5^{2(1-2x)} &= 5^4\\
5^{2-4x} &= 5^4\\
\therefore 2-4x &= 4\\
4x &= -2\\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

i) $27^x \times 9^{x-2} = 1$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
27^x \times 9^{x-2} &= 1\\
3^{3x} \times 3^{2(x-2)} &= 1\\
3^{3x+2x-4} &= 3^0\\
\therefore 5x-4 &= 0\\
5x &= 4\\
x &= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

j) $2^t + 2^{t+2} = 40$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
2^t + 2^{t+2} &= 40\\
2^t(1+2^2) &= 40\\
2^t(5) &= 40\\
2^t &= 8\\
2^t &= 2^3\\
\therefore t &= 3
\end{aligned}$$

k) $(7^x - 49)(3^x - 27) = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
(7^x - 49)(3^x - 27) &= 0 \\
(7^x - 7^2)(3^x - 3^3) &= 0 \\
\therefore 7^x - 7^2 = 0 &\text{ of } 3^x - 3^3 = 0 \\
\therefore 7^x = 7^2 &\text{ of } 3^x = 3^3 \\
\therefore x = 2 &\text{ of } x = 3
\end{aligned}$$

l) $(2 \,.\, 2^x - 16)(3^{x+1} - 9) = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
(2 \,.\, 2^x - 16)(3^{x+1} - 9) &= 0 \\
(2^{x+1} - 2^4)(3^{x+1} - 3^2) &= 0 \\
\therefore 2^{x+1} - 2^4 = 0 &\text{ of } 3^{x+1} - 3^2 = 0 \\
x + 1 = 4 &\text{ of } x + 1 = 2 \\
\therefore x = 3 &\text{ of } x = 1
\end{aligned}$$

m) $(10^x - 1)(3^x - 81) = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
(10^x - 1)(3^x - 81) &= 0 \\
(10^x - 10^0)(3^x - 3^4) &= 0 \\
\therefore 10^x - 10^0 = 0 &\text{ of } 3^x - 3^4 = 0 \\
\therefore x = 0 &\text{ of } x = 4
\end{aligned}$$

n) $2 \times 5^{2-x} = 5 + 5^x$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
2 \times 5^{2-x} &= 5 + 5^x \\
2(5^2)(5^{-x}) &= 5 + 5^x \\
\frac{2(5^2)}{5^x} - 5 - 5^x &= 0 \\
\left(\frac{50}{5^x}\right) \times 5^x - 5 \times 5^x - 5^x \times 5^x &= 0 \\
50 - 5(5^x) - (5^x)^2 &= 0 \\
(5^x - 5)\,(5^x + 10) &= 0 \\
5^x - 5 = 0 &\text{ of } 5^x + 10 = 0 \\
5^x = 5 &\text{ of } 5^x = -10 \\
x = 1 &\text{ of ongedefineer} \\
\therefore x &= 1
\end{aligned}$$

o) $9^m + 3^{3-2m} = 28$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
9^m + 3^{3-2m} &= 28 \\
3^{2m} + 3^3.3^{-2m} &= 28 \\
3^{2m} + \frac{27}{3^{2m}} - 28 &= 0 \\
\left(3^{2m}\right)^2 - 28\left(3^{2m}\right) + 27 &= 0 \\
\left(3^{2m} - 27\right)\left(3^{2m} - 1\right) &= 0 \\
3^{2m} - 27 = 0 &\text{ of } 3^{2m} - 1 = 0 \\
3^{2m} = 3^3 &\text{ of } 3^{2m} = 3^0 \\
2m = 3 &\text{ of } 2m = 0 \\
\therefore m &= \frac{3}{2} \text{ of } 0
\end{aligned}
$$

p) $y - 2y^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y - 2y^{\frac{1}{2}} + 1 &= 0 \\
\left(y^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(y^{\frac{1}{2}} - 1\right) &= 0 \\
y^{\frac{1}{2}} - 1 &= 0 \\
y^{\frac{1}{2}} &= 1 \\
y^{\frac{1}{2}\times 2} &= 1^{1\times 2} \\
y &= 1^2 \\
\therefore y &= 1
\end{aligned}
$$

q) $4^{x+3} = 0{,}5$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
4^{x+3} &= 0{,}5 \\
2^{2x+6} &= \frac{1}{2} \\
2^{2x+6} &= 2^{-1} \\
\therefore 2x + 6 &= -1 \\
2x &= -7 \\
x &= -\frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

r) $2^a = 0{,}125$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2^a &= 0{,}125 \\
2^a &= \frac{1}{8} \\
2^a &= 2^{-3} \\
\therefore a &= -3
\end{aligned}
$$

s) $10^x = 0{,}001$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
10^x &= 0{,}001 \\
10^x &= \frac{1}{1000} \\
10^x &= 10^{-3} \\
\therefore x &= -3
\end{aligned}
$$

t) $2^{x^2-2x-3} = 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
2^{x^2-2x-3} &= 1 \\
2^{x^2-2x-3} &= 2^0 \\
\therefore x^2 - 2x - 3 &= 0 \\
(x-3)(x+1) &= 0 \\
\therefore x &= 3 \text{ of } -1
\end{aligned}$$

u) $\dfrac{8^x - 1}{2^x - 1} = 8.2^x + 9$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{8^x - 1}{2^x - 1} &= 8.2^x + 9 \\
\frac{2^{3x} - 1}{2^x - 1} &= 8.2^x + 9 \\
\frac{(2^x - 1)(2^{2x} + 2^x + 1)}{2^x - 1} &= 8.2^x + 9 \\
2^{2x} + 2^x + 1 &= 8.2^x + 9 \\
2^{2x} + 2^x &= 8.2^x + 8 \\
2^x.2^x + 2^x &= 8(2^x + 1) \\
2^x(2^x + 1) &= 8(2^x + 1) \\
2^x &= 2^3 \\
\therefore x &= 3
\end{aligned}$$

v) $\dfrac{27^x - 1}{9^x + 3^x + 1} = -\dfrac{8}{9}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{27^x - 1}{9^x + 3^x + 1} &= -\frac{8}{9} \\
\frac{3^{3x} - 1}{9^x + 3^x + 1} &= -\frac{8}{9} \\
\frac{(3^x - 1)(9^x + 3^x + 1)}{9^x + 3^x + 1} &= -\frac{8}{9} \\
3^x - 1 &= -\frac{8}{9} \\
3^x &= \frac{1}{9} \\
3^x &= \frac{1}{3^2} \\
3^x &= 3^{-2} \\
\therefore x &= -2
\end{aligned}$$

2. Die groei van alge kan gemodelleer word met die funksie $f(t) = 2^t$. Vind die waarde van t sodat $f(t) = 128$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
f(t) = 2^t &= 128 \\
2^t &= 2^7 \\
\therefore t &= 7
\end{aligned}$$

3. Gebruik probeer en tref om die waarde van x te vind, korrek tot 2 desimale plekke.
$2^x = 7$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
2^2 &= 4 \text{ en } 2^3 = 8 \\
\text{dus } 2 &< x < 3 \text{ maar nader aan } 3 \\
\text{Toets} & \\
2^{2{,}9} &= 7{,}464 \\
2^{2{,}8} &= 6{,}964 \\
2^{2{,}81} &= 7{,}01 \\
2^{2{,}805} &= 6{,}989 \\
2^{2{,}809} &= 7{,}007 \\
\therefore x &\approx 2{,}81
\end{aligned}$$

4. Gebruik probeer en tref om die waarde van x te vind, korrek tot 2 desimale plekke.
   $5^x = 11$
   Oplossing:

$$\begin{aligned}
5^1 &= 5 \text{ en } 5^2 = 25 \\
\text{dus } 1 &< x < 2 \\
\text{Toets} & \\
5^{1{,}5} &= 11{,}180 \\
5^{1{,}4} &= 9{,}51 \\
5^{1{,}45} &= 10{,}31 \\
5^{1{,}49} &= 11{,}001 \\
\therefore x &\approx 1{,}49
\end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2HPY	1b. 2HPZ	1c. 2HQ2	1d. 2HQ3	1e. 2HQ4	1f. 2HQ5
1g. 2HQ6	1h. 2HQ7	1i. 2HQ8	1j. 2HQ9	1k. 2HQB	1l. 2HQC
1m. 2HQD	1n. 2HQF	1o. 2HQG	1p. 2HQH	1q. 2HQJ	1r. 2HQK
1s. 2HQM	1t. 2HQN	1u. 2HQP	1v. 2HQQ	2. 2HQR	3. 2HQS
4. 2HQT					

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.5 Hoofstuk opsomming

End of chapter Exercise 2 – 4:

1. Vereenvoudig:
   a) $(8x)^3$
   Oplossing:

$$\begin{aligned}
(8x)^3 &= 8^3x^3 \\
&= 512x^3
\end{aligned}$$

   b) $t^3 \times 2t^0$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} t^3 \times 2t^0 &= t^3 \times 2(1) \\ &= 2t^3 \end{aligned}$$

c) $5^{2x+y} \times 5^{3(x+z)}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 5^{2x+y} \times 5^{3(x+z)} &= 5^{2x+y+3x+3z} \\ &= 5^{5x+y+3z} \end{aligned}$$

d) $15^{3x} \times 15^{12x}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 15^{3x} \times 15^{12x} &= 15^{3x+12x} \\ &= 15^{15x} \end{aligned}$$

e) $\dfrac{7^{y+7}}{7^{y+6}}$

Oplossing:

$$\frac{7^{y+7}}{7^{y+6}} = 7^{(y+7)-(y+6)}$$

$$\begin{aligned} 7^{(y+7)-(y+6)} &= 7^{y+7-y-6} \\ &= 7^1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

f) $3(d^4)(7d^3)$

Oplossing:

$$3(d^4)(7d^3) = 21d^7$$

g) $(\frac{1}{7}a^2b^9)(6a^6b^2)(-3a^7b)$

Oplossing:

$$\left(\frac{1}{7}a^2b^9\right)(6a^6b^2)(-3a^7b) = -\frac{18}{7}a^{15}b^{12}$$

h) $\left(b^{k+1}\right)^k$

Oplossing:

$$\left(b^{k+1}\right)^k = b^{k^2+k}$$

i) $\dfrac{24c^8m^7}{6c^2m^5}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} &\frac{24c^8m^7}{6c^2m^5} \\ &= 4c^{(8-2)}m^{(7-5)} \\ &= 4c^6m^2 \end{aligned}$$

j) $\dfrac{2(x^4)^3}{x^{12}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{2(x^4)^3}{x^{12}} &= \frac{2x^{12}}{x^{12}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

k) $\dfrac{a^6b^5}{7(a^8b^3)^2}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{a^6b^5}{7(a^8b^3)^2} &= \frac{a^6b^5}{7a^{16}b^6}\\ &= \frac{1}{7a^{10}b}\end{aligned}$$

l) $\left(\frac{a^7}{b^4}\right)^2$
Oplossing:

$$\left(\frac{a^7}{b^4}\right)^2 = \frac{a^{14}}{b^8}$$

m) $\dfrac{6^{5p}}{9^p}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{6^{5p}}{9^p} &= \frac{2^{5p}.3^{5p}}{3^{2p}}\\ &= 2^{5p}.3^{5p-2p}\\ &= 2^{5p}.3^{3p}\end{aligned}$$

n) $m^{-2t} \times \left(3m^t\right)^3$
Oplossing:

$$\begin{aligned}m^{-2t} \times \left(3m^t\right)^3 &= m^{-2t} \times 3^3m^{3t}\\ &= m^{-2t+3t}.27\\ &= 27m^t\end{aligned}$$

o) $\dfrac{3x^{-3}}{(3x)^2}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3x^{-3}}{(3x)^2} &= 3^{1-2}.x^{-3-2}\\ &= 3^{-1}.x^{-5}\\ &= \frac{1}{3x^5}\end{aligned}$$

p) $\dfrac{5^{b-3}}{5^{b+1}}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{5^{b-3}}{5^{b+1}} &= 5^{b-3-b-1}\\ &= 5^{-4}\\ &= \frac{1}{625}\end{aligned}$$

q) $\dfrac{2^{a-2}3^{a+3}}{6^a}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2^{a-2}3^{a+3}}{6^a} &= \frac{2^{a-2}3^{a+3}}{(2.3)^a}\\ &= \frac{2^{a-2}3^{a+3}}{2^a.3^a}\\ &= 2^{a-2-a}.3^{a+3-a}\\ &= 2^{-2}.3^3\\ &= \frac{27}{4}\end{aligned}$$

r) $\dfrac{3^n 9^{n-3}}{27^{n-1}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3^n 9^{n-3}}{27^{n-1}} &= \frac{3^n.\left(3^2\right)^{n-3}}{\left(3^3\right)^{n-1}}\\ &= \frac{3^n.3^{2n-6}}{3^{3n-3}}\\ &= 3^{n+2n-6-3n+3}\\ &= 3^{-3}\\ &= \frac{1}{27}\end{aligned}$$

s) $\dfrac{3^3}{9^3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3^3}{9^3} &= \left(\frac{3}{9}\right)^3\\ &= \frac{1}{3^3}\\ &= \frac{1}{27}\end{aligned}$$

t) $\dfrac{x^{-1}}{x^4y^{-2}}$

Oplossing:

$$\frac{x^{-1}}{x^4y^{-2}} = \frac{y^2}{x^5}$$

u) $\dfrac{(-1)^4}{(-2)^{-3}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^4}{(-2)^{-3}} &= \frac{1}{(-2)^{-3}}\\ &= (-2)^3\\ &= -8\end{aligned}$$

v) $\left(\dfrac{2x^{2a}}{y^{-b}}\right)^3$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x^{2a}}{y^{-b}}\right)^3 &= \frac{2^3\left(x^{2a}\right)^3}{\left(y^{-b}\right)^3}\\ &= \frac{2^3x^{6a}}{y^{-3b}}\\ &= 2^3x^{6a}y^{3b}\\ &= 8x^{6a}y^{3b}\end{aligned}$$

w) $\dfrac{2^{3x-1}8^{x+1}}{4^{2x-2}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2^{3x-1}8^{x+1}}{4^{2x-2}} &= \frac{2^{3x-1}.2^{3(x+1)}}{2^{2(2x-2)}}\\ &= 2^{3x-1+3x+3-4x+4}\\ &= 2^{2x+6}\\ &= 4^{x+3}\end{aligned}$$

x) $\dfrac{6^{2x}11^{2x}}{22^{2x-1}3^{2x}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{6^{2x}11^{2x}}{22^{2x-1}3^{2x}} &= \frac{(3\ .\ 2)^{2x}\ .\ 11^{2x}}{(2\ .\ 11)^{2x-1}\ .\ 3^{2x}}\\ &= \frac{3^{2x}\ .\ 2^{2x}\ .\ 11^{2x}}{2^{2x-1}\ .\ 11^{2x-1}\ .\ 3^{2x}}\\ &= 3^{2x-2x}\ .\ 2^{2x-2x+1}\ .\ 11^{2x-2x+1}\\ &= 3^0\ .\ 2^1\ .\ 11^1\\ &= 22\end{aligned}$$

y) $\dfrac{(-3)^{-3}(-3)^2}{(-3)^{-4}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{(-3)^{-3}(-3)^2}{(-3)^{-4}} &= (-3)^{-3+2+4}\\ &= (-3)^3\\ &= -27\end{aligned}$$

z) $\left(3^{-1}+2^{-1}\right)^{-1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(3^{-1}+2^{-1}\right)^{-1} &= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^{-1}\\ &= \left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)^{-1}\\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\\ &= \frac{5^{-1}}{6^{-1}}\\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

2. Vereenvoudig:

a) $\dfrac{9^{n-1}.27^{3-2n}}{81^{2-n}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{9^{n-1}.27^{3-2n}}{81^{2-n}} &= \frac{3^{2(n-1)}.3^{3(3-2n)}}{3^{4(2-n)}}\\ &= 3^{2(n-1)+3(3-2n)-4(2-n)}\\ &= 3^{2n-2+9-6n-8+4n}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

b) $\dfrac{2^{3n+2}\ .\ 8^{n-3}}{4^{3n-2}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2^{3n+2}\ .\ 8^{n-3}}{4^{3n-2}} &= \frac{2^{3n+2}\ .\ 2^{3(n-3)}}{2^{2(3n-2)}}\\ &= 2^{3n+2+3(n-3)-2(3n-2)}\\ &= 2^{3n+2+3n-9-6n+4}\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

c) $\dfrac{3^{t+3}+3^{t}}{2\times 3^{t}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3^{t+3}+3^{t}}{2\times 3^{t}} &= \frac{3^{t}.3^{3}+3^{t}}{2.3^{t}}\\ &= \frac{3^{t}(3^{3}+1)}{2.3^{t}}\\ &= \frac{3^{3}+1}{2}\\ &= \frac{28}{2}\\ &= 14\end{aligned}$$

d) $\dfrac{2^{3p}+1}{2^{p}+1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2^{3p}+1}{2^{p}+1} &= \frac{(2^{p}+1)\left(2^{2p}-2^{p}+1\right)}{(2^{p}+1)}\\ &= 2^{2p}-2^{p}+1\end{aligned}$$

e) $\left(a^{10}b^{6}\right)^{\frac{1}{2}}$

Oplossing:

$$\left(a^{10}b^{6}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{5}b^{3}$$

f) $\left(9x^{8}y^{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

Oplossing:

$$\left(9x^{8}y^{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 3x^{4}y^{2}$$

g) $\dfrac{13^{a}+13^{a+2}}{6\times 13^{a}-13^{a}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{13^a + 13^{a+2}}{6 \times 13^a - 13^a} &= \frac{13^a(1 + 13^2)}{13^a(6 - 1)} \\
&= \frac{(1 + 13^2)}{(6 - 1)} \\
&= \frac{1 + 169}{6 - 1} \\
&= \frac{170}{5} \\
&= \frac{34}{1} \\
&= 34
\end{aligned}$$

h) $\frac{3^{8z} \times 27^{8z} \times 3^2}{9^{6z}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{3^{8z} \times 27^{8z} \times 3^2}{9^{6z}} &= \frac{3^{8z} \times \left(3^3\right)^{8z} \times 3^2}{\left(3^2\right)^{6z}} \\
&= \frac{3^{8z} \times 3^{24z} \times 3^2}{3^{12z}} \\
&= \frac{3^{8z+24z+2}}{3^{12z}} \\
&= \frac{3^{32z+2}}{3^{12z}} \\
&= 3^{32z+2-12z} \\
&= 3^{20z+2}
\end{aligned}$$

i) $\frac{121^b - 16^p}{11^b + 4^p}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{121^b - 16^p}{11^b + 4^p} &= \frac{\left(11^2\right)^b - \left(4^2\right)^p}{11^b + 4^p} \\
&= \frac{\left(11^b\right)^2 - \left(4^p\right)^2}{11^b + 4^p} \\
&= \frac{\left(11^b - 4^p\right)\left(11^b + 4^p\right)}{11^b + 4^p} \\
&= \frac{\left(11^b - 4^p\right)\left(11^b + 4^p\right)}{11^b + 4^p} \\
&= 11^b - 4^p
\end{aligned}$$

j) $\frac{11^{-4c-4}4^{4c-3}}{22^{-6c-2}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{11^{-4c-4}4^{4c-3}}{22^{-6c-2}} &= \frac{11^{-4c-4}\left(2^2\right)^{4c-3}}{(11 \times 2)^{-6c-2}} \\
&= \frac{11^{-4c-4}2^{8c-6}}{11^{-6c-2}2^{-6c-2}} \\
&= 11^{(-4c-4)-(-6c-2)} \times 2^{(8c-6)-(-6c-2)} \\
&= 11^{2c-2} \times 2^{14c-4}
\end{aligned}$$

k) $\dfrac{12^4 \times 2^4}{16^6 \times 10}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{12^4 \times 2^4}{16^6 \times 10} &= \frac{(3 \times 2^2)^4 \times 2^4}{(2^4)^6 \times (2 \times 5)} \\ &\frac{3^4 \times 2^8 \times 2^4}{2^{24} \times 2 \times 5} \\ &= \frac{3^4}{2^{13} \times 5} \end{aligned}$$

l) $\dfrac{5^6 \times 3^{16} \times 2^7}{10^8 \times 9^6}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{5^6 \times 3^{16} \times 2^7}{10^8 \times 9^6} &= \frac{5^6 3^{16} 2^7}{2^8 5^8 3^{12}} \\ &= \frac{3^4}{2 \times 5^2} \\ &= \frac{81}{50} \end{aligned}$$

m) $(0{,}81)^{\frac{1}{2}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} (0{,}81)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{81}{100}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{9^2}{10^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\frac{9}{10}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

n) $12\left(a^{10}b^{20}\right)^{\frac{1}{5}} \times \left(729a^{12}b^{15}\right)^{\frac{1}{3}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 12\left(a^{10}b^{20}\right)^{\frac{1}{5}} \times \left(729a^{12}b^{15}\right)^{\frac{1}{3}} &= 12a^{\frac{10}{5}}b^{\frac{20}{5}} \times (729)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{12}{3}}b^{\frac{15}{3}} \\ &= 12a^2b^4 \times \left(9^3\right)^{\frac{1}{3}} a^4b^5 \\ &= 12a^2b^4 \times 9a^4b^5 \\ &= 108a^6b^9 \end{aligned}$$

o) $2\left(p^{30}q^{20}\right)^{\frac{1}{5}} \times \left(1331p^{12}q^6\right)^{\frac{1}{3}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 2\left(p^{30}q^{20}\right)^{\frac{1}{5}} \times \left(1331p^{12}q^6\right)^{\frac{1}{3}} &= 2p^{\frac{30}{5}}q^{\frac{20}{5}} \times (1331)^{\frac{1}{3}}p^{\frac{12}{3}}q^{\frac{6}{3}} \\ &= 2p^6q^4 \times \left(11^3\right)^{\frac{1}{3}} p^4q^2 \\ &= 2p^6q^4 \times 11p^4q^2 \\ &= 22p^{10}q^6 \end{aligned}$$

p) $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a-b}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a-b} &= \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{a-b}\\ &= \frac{\frac{b-a}{ab}}{a-b}\\ &= \frac{-(a-b)}{ab(a-b)}\\ &= -\frac{1}{ab}\\ &= -(ab)^{-1}\end{aligned}$$

q) $\left(\left(x^{36}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(\left(x^{36}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} &= \left(x^{18}\right)^{\frac{1}{3}}\\ &= x^{6}\end{aligned}$$

r) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+y} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+y} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{x+y} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-(x-y)}\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{x+y-(x-y)}\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{2y}\end{aligned}$$

s) $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2 &= (a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}-(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}))(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}+(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}))\\ &= (2a^{-\frac{1}{2}})(2a^{\frac{1}{2}})\\ &= 4a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\\ &= 4a^{0}\\ &= 4\end{aligned}$$

3. Los op:

a) $3^x = \dfrac{1}{27}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}3^x &= \frac{1}{27}\\ 3^x &= \frac{1}{3^3}\\ 3^x &= 3^{-3}\\ \therefore x &= -3\end{aligned}$$

b) $121 = 11^{m-1}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 121 &= 11^{m-1} \\ 11^2 &= 11^{m-1} \\ \therefore 2 &= m - 1 \\ 2 + 1 &= m \\ 3 &= m \end{aligned}$$

c) $5^{t-1} = 1$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 5^{t-1} &= 1 \\ 5^{t-1} &= 5^0 \\ \therefore t - 1 &= 0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

d) $2 \times 7^{3x} = 98$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2 \times 7^{3x} &= 98 \\ 7^{3x} &= 49 \\ 7^{3x} &= 7^2 \\ \therefore 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

e) $-\frac{64}{3} = -\frac{4}{3}2^{-\frac{c}{3}+1}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{64}{3}\right) &= \left(-\frac{4}{3} \, . \, 2^{-\frac{c}{3}+1}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) \\ 16 &= 2^{-\frac{c}{3}+1} \\ \therefore 2^4 &= 2^{-\frac{c}{3}+1} \\ 4 &= -\frac{c}{3} + 1 \\ -9 &= c \end{aligned}$$

f) $-\frac{1}{2}6^{-n-3} = -18$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (-2)\left(-\frac{1}{2} \, . \, 6^{-n-3}\right) &= (-18)(-2) \\ 6^{-n-3} &= 36 \\ 6^{-n-3} &= 6^2 \\ \therefore -n - 3 &= 2 \\ n &= -5 \end{aligned}$$

g) $2^{m+1} = (0{,}5)^{m-2}$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2^{m+1} &= (0{,}5)^{m-2} \\
2^{m+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} \\
2^{m+1} &= \left(2^{-1}\right)^{m-2} \\
2^{m+1} &= 2^{2-m} \\
\therefore m+1 &= 2-m \\
m &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

h) $3^{y+1} = 5^{y+1}$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
3^{y+1} &= 5^{y+1} \\
\therefore y+1 &= 0 \\
y &= -1
\end{aligned}
$$

i) $z^{\frac{3}{2}} = 64$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
z^{\frac{3}{2}} &= 64 \\
z^{\frac{3}{2}} &= 4^3 \\
\left(z^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} &= \left(4^3\right)^{\frac{2}{3}} \\
z &= 4^2 \\
z &= 16
\end{aligned}
$$

j) $16x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
16x^{\frac{1}{2}} - 4 &= 0 \\
16x^{\frac{1}{2}} &= 4 \\
x^{\frac{1}{2}} &= \frac{4}{16} \\
x^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} \\
\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
x &= \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

k) $m^0 + m^{-1} = 0$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m^0 + m^{-1} &= 0 \\
1 + m^{-1} &= 0 \\
m^{-1} &= -1 \\
\left(m^{-1}\right)^{-1} &= (-1)^{-1} \\
m &= -1
\end{aligned}
$$

l) $t^{\frac{1}{2}} - 3t^{\frac{1}{4}} + 2 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
t^{\frac{1}{2}} - 3t^{\frac{1}{4}} + 2 &= 0 \\
\left(t^{\frac{1}{4}} - 1\right)\left(t^{\frac{1}{4}} - 2\right) &= 0 \\
t^{\frac{1}{4}} - 1 = 0 \text{ of } t^{\frac{1}{4}} - 2 &= 0 \\
t^{\frac{1}{4}} = 1 \text{ of } t^{\frac{1}{4}} &= 2 \\
\left(t^{\frac{1}{4}}\right)^4 = (1)^4 \text{ of } \left(t^{\frac{1}{4}}\right)^4 &= (2)^4 \\
t &= 1 \text{ of } 16
\end{aligned}$$

m) $3^p + 3^p + 3^p = 27$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
3^p + 3^p + 3^p &= 27 \\
3.3^p &= 27 \\
3^{p+1} &= 3^3 \\
\therefore p + 1 &= 3 \\
p &= 2
\end{aligned}$$

n) $k^{-1} - 7k^{-\frac{1}{2}} - 18 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
k^{-1} - 7k^{-\frac{1}{2}} - 18 &= 0 \\
\left(k^{-\frac{1}{2}} - 9\right)\left(k^{-\frac{1}{2}} + 2\right) &= 0 \\
k^{-\frac{1}{2}} - 9 = 0 \text{ of } k^{-\frac{1}{2}} + 2 &= 0 \\
k^{-\frac{1}{2}} = 9 \text{ of } k^{-\frac{1}{2}} &= -2 \\
\left(k^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = (9)^{-2} \text{ of } \left(k^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} &= (-2)^{-2} \\
k &= \frac{1}{81} \text{ of } \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ons kontroleer beide antwoorde en vind dat $k = \frac{1}{81}$ die enigste oplossing is.

o) $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{4}} - 18 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\left(x^{\frac{1}{4}} + 6\right)\left(x^{\frac{1}{4}} - 3\right) &= 0 \\
x^{\frac{1}{4}} + 6 = 0 \text{ of } x^{\frac{1}{4}} - 3 &= 0 \\
x^{\frac{1}{4}} = -6 \text{ of } x^{\frac{1}{4}} &= 3 \\
\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4 = (-6)^4 \text{ of } \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4 &= (3)^4 \\
x &= 1296 \text{ of } 81
\end{aligned}$$

Ons kontroleer beide antwoorde en vind dat $x = 81$ die enigste oplossing is.

p) $\dfrac{16^x - 1}{4^2 x + 1} = 3$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{16^x - 1}{4^2x + 1} &= 3 \\
\frac{(4^{2x} - 1)(4^{2x} + 1)}{4^{2x} + 1} &= 3 \\
4^{2x} - 1 &= 3 \\
4^{2x} &= 4^1 \\
\therefore 2x &= 1 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

q) $(2^x - 8)(3^x - 9) = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
(2^x - 8)(3^x - 9) &= 0 \\
(2^x - 2^3)(3^x - 3^2) &= 0 \\
\therefore 2^x - 2^3 &= 0 \text{ of } 3^x - 3^2 = 0 \\
\therefore x &= 3 \text{ of } x = 2
\end{aligned}$$

r) $(6^x - 36)(16 - 4^x) = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
(6^x - 36)(16 - 4^x) &= 0 \\
(6^x - 6^2)(4^2 - 4^x) &= 0 \\
\therefore 6^x - 6^2 &= 0 \text{ of } 4^2 - 4^x = 0 \\
\therefore x &= 2
\end{aligned}$$

s) $5.2^{x^2+1} = 20$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
5.2^{x^2+1} &= 20 \\
2^{x^2+1} &= 4 \\
2^{x^2+1} &= 2^2 \\
\therefore x^2 + 1 &= 2 \\
x^2 - 1 &= 0 \\
(x + 1)(x - 1) &= 0 \\
\\
\therefore x &= 1 \text{ of } x = -1
\end{aligned}$$

t) $27^{x-2} = 9^{2x+1}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
27^{x-2} &= 9^{2x+1} \\
(3^3)^{x-2} &= (3^2)^{2x+1} \\
3^{3x-6} &= 3^{4x+2} \\
\therefore 3x - 6 &= 4x + 2 \\
x &= -8
\end{aligned}$$

u) $\dfrac{8^x - 1}{2^x - 1} = 7$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{8^x - 1}{2^x - 1} &= 7 \\
\frac{(2^3)^x - 1}{2^x - 1} &= 7 \\
\frac{(2^x)^3 - 1}{2^x - 1} &= 7 \\
\frac{(2^x - 1)((2^x)^2 + 2^x + 1)}{(2^x - 1)} &= 7 \\
(2^{2x} + 2^x + 1) &= 7 \\
2^{2x} + 2^x - 6 &= 0 \\
(2^x + 3)\,(2^x - 2) &= 0 \\
\therefore 2^x + 3 &= 0 \text{ of } 2^x - 2 = 0 \\
2^x &\neq -3 \text{ of } 2^x - 2 = 0 \\
2^x &= 2 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

v) $\dfrac{35^x}{5^x} = \dfrac{1}{7}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{35^x}{5^x} &= \frac{1}{7} \\
\frac{7^x 5^x}{5^x} &= \frac{1}{7} \\
7^x &= 7^{-1} \\
\therefore x &= -1
\end{aligned}
$$

w) $\dfrac{a^{3x} \,.\, a^{\frac{1}{x}}}{a^{-4}} = 1$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{a^{3x} . a^{\frac{1}{x}}}{a^{-4}} &= 1 \\
a^{3x + \frac{1}{x} + 4} &= a^0 \\
\therefore 3x + \frac{1}{x} + 4 &= 0 \\
3x^2 + 1 + 4x &= 0 \\
(3x + 1)(x + 1) &= 0 \\
\therefore x &= -\frac{1}{3} \text{ of } x = -1
\end{aligned}
$$

x) $2x^{\frac{1}{2}} + 1 = -x$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2x^{\frac{1}{2}} + 1 &= -x \\
x + 2x^{\frac{1}{2}} + 1 &= 0 \\
(x^{\frac{1}{2}})^2 + 2x^{\frac{1}{2}} + 1^2 &= 0 \\
(x^{\frac{1}{2}} + 1)^2 &= 0 \\
x^{\frac{1}{2}} &= -1 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Maar $2(1)^{\frac{1}{2}} + 1 = 2 \neq -(1)$ $\therefore$ geen oplossing

4. Gebruik probeer en tref om die waarde van x te vind, korrek tot 2 desimale plekke.
   $4^x = 44$
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
4^2 &= 16 \text{ and } 4^3 = 64\\
\text{so } 2 &< x < 3\\
\text{Toets}&\\
4^{2,5} &= 32\\
4^{2,75} &= 45{,}255\\
4^{2,70} &= 42{,}224\\
4^{2,73} &= 44{,}017\\
4^{2,725} &= 43{,}713\\
\therefore x &\approx 2{,}73
\end{aligned}
$$

5. Gebruik probeer en tref om die waarde van x te vind, korrek tot 2 desimale plekke.
   $3^x = 30$
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
3^3 &= 27 \text{ and } 3^4 = 81\\
\text{so } 3 &< x < 4\\
\text{Toets}&\\
3^{3,1} &= 30{,}014\\
3^{3,05} &= 28{,}525\\
3^{3,08} &= 29{,}480\\
3^{3,09} &= 29{,}806\\
3^{3,095} &= 29{,}970\\
3^{3,096} &= 30{,}003\\
\therefore x &\approx 3{,}10
\end{aligned}
$$

6. Verduidelik waarom die volgende bewerings vals is:

   a) $\dfrac{1}{a^{-1}+b^{-1}} = a+b$
      Oplossing:
      Die som van die magte van dieselfde graad, is nie die mag van die som van die grondtalle nie

$$a+b = \frac{1}{(a+b)^{-1}} \neq \frac{1}{a^{-1}+b^{-1}}$$

   b) $(a+b)^2 = a^2+b^2$
      Oplossing:
      Die som van twee magte van dieselfde graad, is nie die mag van die som van die grondtalle nie

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \neq a^2+b^2$$

   c) $\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
      Oplossing:
      ’n Minus teken ontbreek. Wanneer ’n mag geskuif word van die noemer na die teller, verander die teken van die eksponent.
      In hierdie vraag moet ons oplet dat $a \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} &= \left(a^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}\\
&= a^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

d) $2.3^x = 6^x$
Oplossing:
Ons kan nie grondtalle vermenigvuldig nie tensy hulle tot dieselfde mag verhef word

$$6^x = (2 \times 3)^x = 2^x.3^x \neq 2.3^x$$

e) $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{-x^{\frac{1}{2}}}$
Oplossing:
Die teken van 'n grondtal verander nie wanneer die eksponent geskuif word vanaf die teller van 'n breuk na die noemer, of andersom nie.

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \neq \frac{1}{-x^{\frac{1}{2}}}$$

f) $(3x^4y^2)^3 = 3x^{12}y^6$
Oplossing:
Die mag van 'n produk is die produk van al die grondtalle verhef tot dieselfde mag

$$\begin{aligned}(3x^4y^2)^3 &= (3)^3(x^4)^3(y^2)^3 \\ &= 27x^{12}y^6 \neq 3x^{12}y^6\end{aligned}$$

7. As $2^{2013}.5^{2015}$ voluit geskryf word, uit hoeveel syfers sal dit bestaan?
Oplossing:

$$\begin{aligned}2^{2013}.5^{2015} &= 2^{2013}.5^{2013+2} \\ &= 2^{2013}.5^{2013}.5^2 \\ &= 25(2^{2013}.5^{2013}) \\ &= 25(10^{2013}) \\ &= 25 \times 10^{2013}\end{aligned}$$

10^{2013} het 2014 syfers, dus 2015 syfers.

8. Bewys dat $\frac{2^{n+1} + 2^n}{2^n - 2^{n-1}} = \frac{3^{n+1} + 3^n}{3^n - 3^{n-1}}$
Oplossing:

$$\frac{2^{n+1}+2^n}{2^n-2^{n-1}} = \frac{3^{n+1}+3^n}{3^n-3^{n-1}}$$

$$\begin{aligned}
\text{RK} &= \frac{3^{n+1}+3^n}{3^n-3^{n-1}} \\
&= \frac{3^n(3^1+3^0)}{3^n(3^0-3^{-1})} \\
&= \frac{4}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{4}{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{12}{2} \\
&= 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \frac{2^{n+1}+2^n}{2^n-2^{n-1}} \\
&= \frac{2^n(2^1+2^0)}{2^n(2^0-2^{-1})} \\
&= \frac{3}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{3}{\frac{1}{2}} \\
&= 6
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{RK} = \text{LK}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2HQW	1b. 2HQX	1c. 2HQY	1d. 2HQZ	1e. 2HR2	1f. 2HR3
1g. 2HR4	1h. 2HR5	1i. 2HR6	1j. 2HR7	1k. 2HR8	1l. 2HR9
1m. 2HRB	1n. 2HRC	1o. 2HRD	1p. 2HRF	1q. 2HRG	1r. 2HRH
1s. 2HRJ	1t. 2HRK	1u. 2HRM	1v. 2HRN	1w. 2HRP	1x. 2HRQ
1y. 2HRR	1z. 2HRS	2a. 2HRT	2b. 2HRV	2c. 2HRW	2d. 2HRX
2e. 2HRY	2f. 2HRZ	2g. 2HS2	2h. 2HS3	2i. 2HS4	2j. 2HS5
2k. 2HS6	2l. 2HS7	2m. 2HS8	2n. 2HS9	2o. 2HSB	2p. 2HSC
2q. 2HSD	2r. 2HSF	2s. 2HSG	3a. 2HSH	3b. 2HSJ	3c. 2HSK
3d. 2HSM	3e. 2HSN	3f. 2HSP	3g. 2HSQ	3h. 2HSR	3i. 2HSS
3j. 2HST	3k. 2HSV	3l. 2HSW	3m. 2HSX	3n. 2HSY	3o. 2HSZ
3p. 2HT2	3q. 2HT3	3r. 2HT4	3s. 2HT5	3t. 2HT6	3u. 2HT7
3v. 2HT8	3w. 2HT9	3x. 2HTB	4. 2HTC	5. 2HTD	6a. 2HTF
6b. 2HTG	6c. 2HTH	6d. 2HTJ	6e. 2HTK	6f. 2HTM	7. 2HTN
8. 2HTP					

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 3

Getalpatrone

- Hierdie hoofstuk dek die ondersoek van getalpatrone wat 'n gemene verskil het en waar die algemene term lineêr is.
- Rekenkundige rye word slegs gedek in graad 12, so moenie $T_n = a + (n-1)d$ hier gebruik nie.
- Die fokus van hierdie hoofstuk is meer oor die ondersoek van patrone in getalle en diagramme eerder as op formules.

3.1 Inleiding

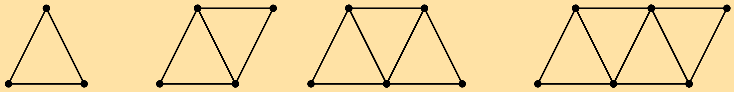
3.2 Beskrywing van rye

Sommige leerlinge mag voorbeeld 3 sien as $2^1; 2^2; 2^3; \ldots$ en 'n patroon sien van die magte. Jy mag besluit om dit in die klas te bespreek as 'n voorloper van meetkundige rye wat in Graad 12 aan die orde kom.

Gemene verskil

Exercise 3 – 1:

1. Gebruik die gegewe rye om die tabel hieronder te voltooi.



Nommer van figuur	1	2	3	4	n
Aantal kolletjies					
Aantal lyne					
Totaal					

Oplossing:

Nommer van figuur	1	2	3	4	n
Aantal kolletjies	3	4	5	6	$n+2$
Aantal lyne	3	5	7	9	$2n+1$
Totaal	6	9	12	15	$3(n+1)$

2. Beskou die volgende ry getalle: $-4\ ;\ -1\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ 11\ ;\ 14\ ;\ 17\ ;\ \ldots$
As $T_n = 2$ wat is die waarde van T_{n-1}?
Oplossing:

$$T_3 = 2$$
$$\therefore T_{n-1} = -1$$

3. Beskou die ry wat hier getoon word: $C\ ;\ D\ ;\ E\ ;\ F\ ;\ G\ ;\ H\ ;\ I\ ;\ J\ ;\ \ldots$
As $T_n = G$ wat is die waarde van T_{n-4}?
Oplossing:

$$T_5 = G$$
$$\therefore T_{n-4} = C$$

4. Vir elk van die volgende rye, bepaal die algemene verskil. As die ry nie lineêr is nie, skryf "geen gemene verskil".
   a) $9\ ;\ -7\ ;\ -8\ ;\ -25\ ;\ -34\ ;\ \ldots$
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 = (-7) - (9) = -16 \\
d &= T_3 - T_2 = (-8) - (-7) = -1 \\
d &= T_4 - T_3 = (-25) - (-8) = -17
\end{aligned}
$$

Jy kan nou sien dat die antwoorde nie dieselfde is nie - die verskil is nie gemeen nie. Dit beteken dat die ry getalle nie lineêr is nie en daar is geen gemene verskil nie.

b) $5\ ;\ 12\ ;\ 19\ ;\ 26\ ;\ 33\ ;\ \ldots$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 = (12) - (5) = 7 \\
d &= T_3 - T_2 = (19) - (12) = 7 \\
d &= T_4 - T_3 = (26) - (19) = 7
\end{aligned}
$$

Al die antwoorde is dieselfde en dit beteken dat ons 'n gemene verskil gevind het vir hierdie ry getalle: $d = 7$.

c) $2{,}93\ ;\ 1{,}99\ ;\ 1{,}14\ ;\ 0{,}35\ ;\ \ldots$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 = (1{,}99) - (2{,}93) = -0{,}94 \\
d &= T_3 - T_2 = (1{,}14) - (1{,}99) = -0{,}85
\end{aligned}
$$

In hierdie geval is die ry nie lineêr nie. Dus is die finale antwoord dat daar nie 'n gemene verskil is nie.

d) $2{,}53\ ;\ 1{,}88\ ;\ 1{,}23\ ;\ 0{,}58\ ;\ \ldots$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 = (1{,}88) - (2{,}53) = -0{,}65 \\
d &= T_3 - T_2 = (1{,}23) - (1{,}88) = -0{,}65
\end{aligned}
$$

Die gemene verskil is: $d = -0{,}65$.

5. Skryf die volgende drie terme in elk van die volgende rye neer:

a) $5\ ;\ 15\ ;\ 25\ ;\ \ldots$

Oplossing:

Die gemene verskil is:

$$
\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 \\
&= 15 - 5 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

Ons tel dus elke keer 10 by om die volgende term in die ry te kry. Die volgende drie getalle is:
35, 45 en 55
en die ry word:
$5\ ;\ 15\ ;\ 25\ ;\ 35\ ;\ 45\ ;\ 55\ ;\ \ldots$

b) $-8\ ;\ -3\ ;\ 2\ ;\ \ldots$

Oplossing:

Die gemene verskil is:

$$
\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 \\
&= -3 - (-8) \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Ons tel dus elke keer 5 by om die volgende term in die ry te kry. Die volgende drie getalle is:
7, 12 en 17
en die ry word:
$-8\ ;\ -3\ ;\ 2\ ;\ 7\ ;\ 12\ ;\ 17\ ;\ \ldots$

c) $30\ ;\ 27\ ;\ 24\ ;\ \ldots$

Oplossing:

Die gemene verskil is:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= 27 - 30 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Ons trek dus elke keer 3 af om die volgende term in die ry te kry. Die volgende drie getalle is: 21, 18 en 15

en die ry word:

$30\ ;\ 27\ ;\ 24\ ;\ 21\ ;\ 18\ ;\ 15\ ;\ \ldots$

d) $-13{,}1\ ;\ -18{,}1\ ;\ -23{,}1\ ;\ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \text{ or } T_3 - T_2 \\ &= (-18{,}1) - (-13{,}1) \text{ or } (-23{,}1) - (-18{,}1) \\ &= -5 \\ \text{Dus } T_4 &= -28{,}1 \\ T_5 &= -33{,}1 \\ T_6 &= -38{,}1 \end{aligned}$$

e) $-9x\ ;-19x\ ;-29x\ ;\ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \text{ of } T_3 - T_2 \\ &= (-19x) - (-9x) \text{ of } (-29x) - (-19x) \\ &= -10x \\ \text{Dus } T_4 &= -39x \\ T_5 &= -49x \\ T_6 &= -59x \end{aligned}$$

f) $-15{,}8\ ;\ 4{,}2\ ;\ 24{,}2\ ;\ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \text{ or } T_3 - T_2 \\ &= (4{,}2) - (-15{,}8) \text{ or } (24{,}2) - (4{,}2) \\ &= 20 \\ \text{Dus } T_4 &= 44{,}2 \\ T_5 &= 64{,}2 \\ T_6 &= 84{,}2 \end{aligned}$$

g) $30b\ ;34b\ ;38b\ ;\ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \text{ of } T_3 - T_2 \\ &= (34b) - (30b) \text{ of } (38b) - (34b) \\ &= 4b \\ \text{Dus } T_4 &= 42b \\ T_5 &= 46b \\ T_6 &= 50b \end{aligned}$$

6. Gegee 'n patroon wat begin met die getalle: $3; 8; 13; 18; \ldots$. Bepaal die waardes van T_6 en T_9.

Oplossing:

$$3;\ 8;\ 13;\ 18;\ 23;\ \underline{28};\ 33;\ 38;\ \underline{43};\ \ldots$$

T_6 is 28 en T_9 is 43

7. Gegee 'n ry wat begin met die letters: $C; D; E; F; \ldots$. Bepaal die waardes van T_5 en T_8.
   Oplossing:

$$C;\ D;\ E;\ F;\ \underline{G};\ H;\ I;\ \underline{J};\ \ldots$$

   T_5 is G en T_8 is J

8. Gegee 'n patroon wat begin met die getalle: $7; 11; 15; 19; \ldots$. Bepaal die waardes van T_5 en T_8.
   Oplossing:

$$7;\ 11;\ 15;\ 19;\ \underline{23};\ 27;\ 31;\ \underline{35};\ \ldots$$

   T_5 is 23 en T_8 is 35

9. Die algemene term vir elke ry hieronder, word gegee. Bereken die ontbrekende terme (elke ontbrekende term word deur ... aangedui).

   a) $0\ ;\ 3\ ;\ \ldots\ ;\ 15\ ;\ 24 \qquad T_n = n^2 - 1$
   Oplossing:
   Die derde term is:

$$\begin{aligned} T_n &= n^2 - 1 \\ T_3 &= (3)^2 - 1 \\ &= 9 - 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

   Die vierde term is:

$$\begin{aligned} T_n &= n^2 - 1 \\ T_4 &= (4)^2 - 1 \\ &= 16 - 1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

   Dus is die enigste ontbrekende term die derde een, en dit is 8. Die volle ry is:
   $0\ ;\ 8\ ;\ 15\ ;\ 24$

   b) $3\ ;\ 2\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ \ldots ; -2 \qquad T_n = -n + 4$
   Oplossing:
   Die vyfde term is:

$$\begin{aligned} T_n &= -n + 4 \\ T_5 &= -(5) + 4 \\ &= -1 \end{aligned}$$

   Die sesde term is:

$$\begin{aligned} T_n &= -n + 4 \\ T_6 &= -(6) + 4 \\ &= -2 \end{aligned}$$

   Dus is die enigste ontbrekende term die vyfde een en dit is -1. Die volle ry is:
   $3\ ;\ 2\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ -1\ ;\ -2$

   c) $-11\ ;\ \ldots\ ;\ -7\ ;\ \ldots\ ;\ -3 \qquad T_n = -13 + 2n$
   Oplossing:
   Die tweede term is:

$$
\begin{aligned}
T_n &= -13 + 2n \\
T_2 &= -13 + 2(2) \\
&= -13 + 4 \\
&= -9
\end{aligned}
$$

Die derde term is:

$$
\begin{aligned}
T_n &= -13 + 2n \\
T_3 &= -13 + 2(3) \\
&= -13 + 6 \\
&= -7
\end{aligned}
$$

Die vierde term is:

$$
\begin{aligned}
T_n &= -13 + 2n \\
T_4 &= -13 + 2(4) \\
&= -13 + 8 \\
&= -5
\end{aligned}
$$

Die vyfde term is:

$$
\begin{aligned}
T_n &= -13 + 2n \\
T_5 &= -13 + 2(5) \\
&= -13 + 10 \\
&= -3
\end{aligned}
$$

Gevolglik is die twee ontbrekende terme die tweede en vierde terme, en hulle is -9 en -5. Die volle ry is: $-11\ ;\ -9\ ;\ -7\ ;\ -5\ ;\ -3$

d) 1 ; 10 ; 19 ; ... ; 37 $\quad T_n = 9n - 8$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= 9n - 8 \\
T_4 &= 9(4) - 8 \\
&= 28
\end{aligned}
$$

e) 9 ; ... ; 21 ; ... ; 33 $\quad T_n = 6n + 3$

Oplossing:

Om die twee ontbrekende terme te vind, gebruik ons die vergelyking vir die algemene term:

$$
\begin{aligned}
T_n &= 6n+3 \\
T_2 &= 6(2)+3 \\
&= 15 \\
T_4 &= 6(4)+3 \\
&= 27
\end{aligned}
$$

10. Vind die algemene formule vir die volgende rye en bepaal dan T_{10}, T_{50} en T_{100}

a) $2; 5; 8; 11; 14; \ldots$

Oplossing:

Ons moet eers d kry:

$$
\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 \\
&= 5 - 2 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, ons d bytel by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$\begin{aligned}
T_1 &= a = 2 \\
T_2 &= a + d = 2 + 3 \\
&= 2 + 1(3) \\
T_3 &= T_2 + d = 2 + 3 + 3 \\
&= 2 + 2(3) \\
T_4 &= T_3 + d = 2 + 3 + 3 + 3 \\
&= 2 + 3(3) \\
T_n &= T_{n-1} + d = 2 + 3(n-1) \\
&= 3n - 1
\end{aligned}$$

Die algemene formule is $T_n = 3n - 1$.
T_{10}, T_{50} en T_{100} is:

$$\begin{aligned}
T_{10} &= 3(10) - 1 \\
&= 29 \\
T_{50} &= 3(50) - 1 \\
&= 149 \\
T_{100} &= 3(100) - 1 \\
&= 299
\end{aligned}$$

b) $0; 4; 8; 12; 16; \ldots$
Oplossing:
Ons moet eers d kry:

$$\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 \\
&= 4 - 0 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, ons d bytel by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$\begin{aligned}
T_1 &= a = 0 \\
T_2 &= a + d = 0 + 4 \\
&= 4(1) \\
T_3 &= T_2 + d = 0 + 4 + 4 \\
&= 4(2) \\
T_4 &= T_3 + d = 0 + 4 + 4 + 4 \\
&= 4(3) \\
T_n &= T_{n-1} + d = 0 + 4(n-1) \\
&= 4n - 4
\end{aligned}$$

Die algemene formule is $T_n = 4n - 4$.
T_{10}, T_{50} en T_{100} is:

$$\begin{aligned}
T_{10} &= 4(10) - 4 \\
&= 36 \\
T_{50} &= 4(50) - 4 \\
&= 196 \\
T_{100} &= 4(100) - 4 \\
&= 396
\end{aligned}$$

c) $2; -1; -4; -7; -10; \ldots$

Oplossing:
Ons moet eers d kry:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= -1 - 2 \\ &= -3 \end{aligned}$$

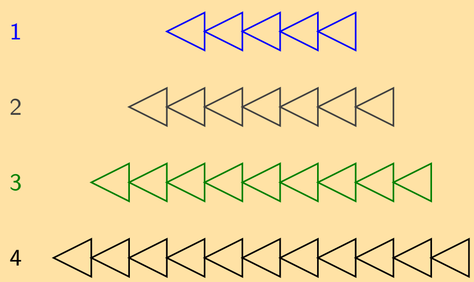
Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, ons d bytel by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$\begin{aligned} T_1 &= a = 2 \\ T_2 &= a + d = 2 + (-3) \\ &= 2 + (-3)(1) \\ T_3 &= T_2 + d = 2 + (-3) + (-3) \\ &= 2 + (-3)(2) \\ T_4 &= T_3 + d = 2 + (-3) + (-3) + (-3) \\ &= 2 + (-3)(3) \\ T_n &= T_{n-1} + d = 2 + (-3)(n-1) \\ &= 5 - 3n \end{aligned}$$

Die algemene formule is $T_n = 5 - 3n$.
T_{10}, T_{50} en T_{100} is:

$$\begin{aligned} T_{10} &= 5 - 3(10) \\ &= -25 \\ T_{50} &= 5 - 3(50) \\ &= -145 \\ T_{100} &= 5 - 3(100) \\ &= -295 \end{aligned}$$

11. Die diagram hieronder toon prentjies wat 'n patroon vorm.



a) Hoeveel driehoeke sal daar in die vyfde prentjie wees?
Oplossing:
$5;\ 7;\ 9;\ 11;\ldots$
Dus word twee driehoeke elke keer bygevoeg en die vyfde diagram sal 13 driehoeke hê.

b) Bepaal 'n formule vir die n^{de} term.
Oplossing:
Die algemene term van die patroon is:

$$\begin{aligned} T_n &= T_1 + d = 5 + (2)(n-1) \\ &= 2n + 3 \end{aligned}$$

c) Gebruik die formule om te bepaal hoeveel driehoeke daar in die 25^{ste} prentjie van die diagram is.
Oplossing:

$$\begin{aligned}T_n &= 2n+3\\ T_{25} &= 2(25)+3 \longleftarrow \text{stel n } = 25 \text{ in}\\ &= 53\end{aligned}$$

12. Bestudeer die volgende ry: $15\ ;\ 23\ ;\ 31\ ;\ 39\ ;\ \ldots$
    a) Skryf die volgende 3 terme neer.
       Oplossing:
       Ons sien dat ons 8 byvoeg by elke term om die volgende term te kry. Daarom is die volgende drie terme: $47\ ;\ 55\ ;\ 63$.
    b) Vind die algemene formule vir die ry
       Oplossing:

$$\begin{aligned}T_n &= T_1 + d(n-1)\\ &= 15 + 8(n-1)\\ &= 8n+7\end{aligned}$$

    c) Vind die waarde van n as T_n 191 is.
       Oplossing:

$$\begin{aligned}191 &= 8n+7\\ 184 &= 8n\\ n &= 23\end{aligned}$$

13. Bestudeer die volgende ry: $-44\ ;\ -14\ ;\ 16\ ;\ 46\ ;\ \ldots$
    a) Skryf die volgende 3 terme neer.
       Oplossing:
       Ons sien dat ons 30 byvoeg by elke term om die volgende term te kry. Daarom is die volgende drie terme: $76\ ;\ 106\ ;\ 136$.
    b) Vind die algemene formule vir die ry
       Oplossing:

$$\begin{aligned}T_n &= T_1 + d(n-1)\\ &= -44 + 30(n-1)\\ &= 30n-74\end{aligned}$$

    c) Vind die waarde van n as T_n 406 is .
       Oplossing:

$$\begin{aligned}406 &= 30n-74\\ 480 &= 30n\\ n &= 16\end{aligned}$$

14. Beskou die volgende lys:

$$-z-5\ ;\ -4z-5\ ;\ -6z-2\ ;\ -8z-5\ ;\ -10z-5\ ;\ \ldots$$

    a) Vind die gemene verskil vir die terme van die lys. As die ry nie lineêr is nie (dus as dit nie 'n gemene verskil het nie), skryf "geen gemene verskil".
       Oplossing:

$$\begin{aligned}d &= T_2 - T_1 = (-4z-5) - (-z-5) = -3z\\ &= T_3 - T_2 = (-6z-2) - (-4z-5) = -2z+3\\ &= T_4 - T_3 = (-8z-5) - (-6z-2) = -2z-3\end{aligned}$$

       Geen gemene verskil.

b) As daar nou vir jou gesê word dat $z = -2$, bepaal die waardes van T_1 en T_2.
Oplossing:

$$\begin{aligned} T_1 &= -z - 5 \\ &= -(-2) - 5 \\ &= -3 \\ T_2 &= -4z - 5 \\ &= -4(-2) - 5 \\ &= 3 \end{aligned}$$

15. Beskou die volgende patroon:

$$2n + 4 \; ; \; 1 \; ; \; -2n - 2 \; ; \; -4n - 5 \; ; \; -6n - 8 \; ; \; \ldots$$

a) Vind die gemene verskil vir die terme van die patroon. As die ry nie lineêr is nie (as dit nie 'n gemene verskil het nie), skryf "geen gemene verskil".
Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 = (1) - (2n + 4) = -2n - 3 \\ &= T_3 - T_2 = (-2n - 2) - (1) = -2n - 3 \\ &= T_4 - T_3 = (-4n - 5) - (-2n - 2) = -2n - 3 \end{aligned}$$

Die gemene verskil vir hierdie getalle: $d = -2n - 3$.

b) As daar nou vir jou gesê word dat $n = -1$, bepaal die waardes van T_1 en T_3.
Oplossing:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2n + 4 \\ &= 2(-1) + 4 \\ &= 2 \\ T_3 &= -2n - 2 \\ &= -2(-1) - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

16. a) Bepaal die waarde van k indien die volgende terme: $\frac{k}{3} - 1 \; ; \; -\frac{5k}{3} + 2 \; ; \; -\frac{2k}{3} + 10 \; ; \; \ldots$ 'n lineêre ry vorm. As die antwoord nie 'n heelgetal is nie, skryf die antwoord as 'n vereenvoudigde breuk.
Oplossing:

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= T_3 - T_2 \\ \left(-\frac{5k}{3} + 2\right) - \left(\frac{k}{3} - 1\right) &= \left(-\frac{2k}{3} + 10\right) - \left(-\frac{5k}{3} + 2\right) \\ 3\left(-\frac{5k}{3} + 2\right) - 3\left(\frac{k}{3} - 1\right) &= 3\left(-\frac{2k}{3} + 10\right) - 3\left(-\frac{5k}{3} + 2\right) \\ -5k + 6 - (k - 3) &= -2k + 30 - (-5k + 6) \\ -6k + 9 &= 3k + 24 \\ -15 &= 9k \\ k &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

b) Bepaal nou die numeriese waarde van die eerste drie terme. As die antwoorde nie heelgetalle is nie, skryf jou antwoorde as breuke.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Eerste term: } T_1 &= \frac{k}{3} - 1 \\
&= \frac{\left(-\frac{5}{3}\right)}{3} - 1 \\
&= -\frac{14}{9} \\
\text{Tweede term: } T_2 &= -\frac{5k}{3} + 2 \\
&= -\frac{5\left(-\frac{5}{3}\right)}{3} + 2 \\
&= \frac{43}{9} \\
\text{Derde term: } T_3 &= -\frac{2k}{3} + 10 \\
&= -\frac{2\left(-\frac{5}{3}\right)}{3} + 10 \\
&= \frac{100}{9}
\end{aligned}$$

Die eerste drie terme van hierdie ry is: $-\frac{14}{9}$, $\frac{43}{9}$ en $\frac{100}{9}$.

17. a) As die volgende terme 'n lineêre ry vorm, bepaal y:

$$y - \frac{3}{2}\ ;\ -y - \frac{7}{2}\ ;\ -7y - \frac{15}{2}\ ;\ \ldots$$

Indien die antwoord nie 'n heelgetal is nie, skryf die antwoord in vereenvoudigde breukvorm.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
T_2 - T_1 &= T_3 - T_2 \\
\left(-y - \frac{7}{2}\right) - \left(y - \frac{3}{2}\right) &= \left(-7y - \frac{15}{2}\right) - \left(-y - \frac{7}{2}\right) \\
2\left(-y - \frac{7}{2}\right) - 2\left(y - \frac{3}{2}\right) &= 2\left(-7y - \frac{15}{2}\right) - 2\left(-y - \frac{7}{2}\right) \\
-2y - 7 - (2y - 3) &= -14y - 15 - (-2y - 7) \\
-4y - 4 &= -12y - 8 \\
8y &= -4 \\
y &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Bepaal nou die numeriese waarde van die eerste drie terme. As die antwoorde nie heelgetalle is nie, skryf jou antwoorde as breuke.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Eerste term: } T_1 &= y - \frac{3}{2} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \\
&= -2 \\
\text{Tweede term: } T_2 &= -y - \frac{7}{2} \\
&= -\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{7}{2} \\
&= -3 \\
\text{Derde term: } T_3 &= -7y - \frac{15}{2} \\
&= -7\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{15}{2} \\
&= -4
\end{aligned}$$

Die eerste drie terme van hierdie ry is: $-2, -3$ en -4.

18. Wat is die 649^{ste} letter van hierdie patroon:
PATROONPATROONPATROONPATROONPATROONPATROONPATRO.............?
Oplossing:
Die woord "PATROON" bevat 7 letters, dus:

$$\frac{649}{7} = 92 \text{ res } 5$$

Die res van 5 beteken dat die 649^{ste} letter die 5^{de} letter van die woord is en dit is O.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

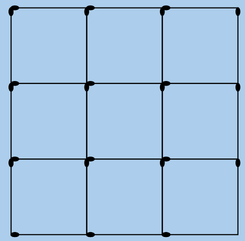
1. 2HTT	2. 2HTV	3. 2HTW	4. 2HTX	5a. 2HTY	5b. 2HTZ
5c. 2HV2	5d. 2HV3	5e. 2HV4	5f. 2HV5	5g. 2HV6	6. 2HV7
7. 2HV8	8. 2HV9	9a. 2HVB	9b. 2HVC	9c. 2HVD	9d. 2HVF
9e. 2HVG	10a. 2HVH	10b. 2HVJ	10c. 2HVK	11. 2HVM	12. 2HVN
13. 2HVP	14. 2HVQ	15. 2HVR	16. 2HVS	17. 2HVT	18. 2HVV

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

3.3 Hoofstuk opsomming

End of chapter Exercise 3 – 2:

1. Analiseer die diagram en voltooi die tabel:



Nommer van figuur $(n \times n)$	1×1	2×2	3×3	4×4	$n \times n$
Aantal horisontale vuurhoutjies					
Aantal vertikale vuurhoutjies					
Totale aantal vuurhoutjies					

Oplossing:

Nommer van figuur ($n \times n$)	1×1	2×2	3×3	4×4	$n \times n$
Aantal horisontale vuurhoutjies	2	6	12	20	$n(n+1)$
Aantal vertikale vuurhoutjies	2	6	12	20	$n(n+1)$
Totale aantal vuurhoutjies	4	12	24	40	$2n(n+1)$

2. Gegewe 'n lys van getalle: $7\ ;\ 4\ ;\ 1\ ;\ -2\ ;\ -5\ ;\ \ldots$. Bepaal die gemene verskil vir die ry (as daar 'n gemene verskil is).
Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 = (4) - (7) = -3 \\ &= T_3 - T_2 = (1) - (4) = -3 \\ &= T_4 - T_3 = (-2) - (1) = -3 \end{aligned}$$

Al die resultate is dieselfde, en dit beteken dat ons die **gemene** verskil vir hierdie getalle gevind het: $d = -3$.

3. Bepaal die gemene verskil vir hierdie patroon: $-0{,}55\ ;\ 0{,}99\ ;\ 2{,}49\ ;\ 3{,}91\ ;\ \ldots$.
As die patroon nie lineêr is nie, skryf "geen gemene verskil". Andersins, gee jou antwoord as 'n desimaal.
Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 = (0{,}99) - (-0{,}55) = 1{,}54 \\ d &= T_3 - T_2 = (2{,}49) - (0{,}99) = 1{,}5 \end{aligned}$$

In hierdie geval is die ry nie lineêr nie. Dus is die finale antwoord dat daar geen gemene verskil is nie.

4. Beskou die lys wat hier getoon word: $2\ ;\ 7\ ;\ 12\ ;\ 17\ ;\ 22\ ;\ 27\ ;\ 32\ ;\ 37\ ;\ \ldots$
As $T_5 = 22$ wat is die waarde van T_{n-3}?
Oplossing:

$$\begin{aligned} T_5 &= 22 \\ \therefore T_{n-3} &= 7 \end{aligned}$$

5. Skryf die volgende drie terme in elk van die volgende lineêre rye neer:

   a) $-10{,}2\ ;\ -29{,}2\ ;\ -48{,}2\ ;\ \ldots$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \text{ of } T_3 - T_2 \\ &= (-29{,}2) - (-10{,}2) \text{ of } (-48{,}2) - (-29{,}2) \\ &= -19 \\ \text{Dus } T_4 &= -67{,}2 \\ T_5 &= -86{,}2 \\ T_6 &= -105{,}2 \end{aligned}$$

   b) $50r\ ;\ 46r\ ;\ 42r\ ;\ \ldots$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \text{ of } T_3 - T_2 \\ &= (46r) - (50r) \text{ of } (42r) - (46r) \\ &= -4r \\ \text{Dus } T_4 &= 38r \\ T_5 &= 34r \\ T_6 &= 30r \end{aligned}$$

6. Gegee 'n ry wat begin met die getalle: $6\ ;\ 11\ ;\ 16\ ;\ 21\ ;\ \ldots$. Bepaal die waardes van T_6 en T_8.
Oplossing:

$$6;\ 11;\ 16;\ 21;\ 26;\ \underline{31};\ 36;\ \underline{41};\ \ldots$$

T_6 is 31 en T_8 is 41

7. Gegee 'n lys wat begin met die letters: A ; B ; C ; D ; .... Bepaal die waardes van T_6 en T_{10}.
   Oplossing:

$$A;\ B;\ C;\ D;\ E;\ \underline{F};\ G;\ H;\ I;\ \underline{J};\ \ldots$$

   T_6 is F en T_{10} is J

8. Vind die sesde term in elk van die volgende rye:
   a) $4\ ;\ 13\ ;\ 22\ ;\ 31\ ;\ \ldots$
      Oplossing:
      Ons moet eers d kry:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= 13 - 4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

      Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, ons d bytel by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$\begin{aligned} T_1 &= a = 4 \\ T_2 &= a + d = 4 + 9 \\ &= 4 + 9(1) \\ T_3 &= T_2 + d = 4 + 9 + 9 \\ &= 4 + 9(2) \\ T_n &= T_{n-1} + d = 4 + 9(n-1) \\ &= 9n - 5 \end{aligned}$$

      Die algemene formule is $T_n = 9n - 5$.
      T_6 is:

$$\begin{aligned} T_6 &= 9(6) - 5 \\ &= 49 \end{aligned}$$

      $T_6 = 49$
   b) $5\ ;\ 2\ ;\ -1\ ;\ -4\ ;\ \ldots$
      Oplossing:
      Ons moet eers d kry:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= 2 - 5 \\ &= -3 \end{aligned}$$

      Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, ons d bytel by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$\begin{aligned} T_1 &= a = 5 \\ T_2 &= a + d = 5 + (-3) \\ &= 5 + (-3)(1) \\ T_3 &= T_2 + d = 5 + (-3) + (-3) \\ &= 5 + (-3)(2) \\ T_n &= T_{n-1} + d = 5 + (-3)(n-1) \\ &= 7 - 3n \end{aligned}$$

      Die algemene formule is $T_n = 7 - 3n$.
      T_6 is:

$$\begin{aligned} T_6 &= 7 - 3(6) \\ &= -11 \end{aligned}$$

      $T_6 = -11$

c) 7,4 ; 9,7 ; 12 ; 14,3 ; ...

Oplossing:

Ons moet eers d kry:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= 9{,}7 - 7{,}4 \\ &= 2{,}3 \end{aligned}$$

Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, ons d bytel by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$\begin{aligned} T_1 &= a = 7{,}4 \\ T_2 &= a + d = 7{,}4 + 2{,}3 \\ &= 7{,}4 + 2{,}3(1) \\ T_3 &= T_2 + d = 7{,}4 + 2{,}3 + 2{,}3 \\ &= 7{,}4 + 2{,}3(2) \\ T_n &= T_{n-1} + d = 7{,}4 + 2{,}3(n-1) \\ &= 7{,}4 + 2{,}3n - 2{,}3 = 2{,}3n + 5{,}1 \end{aligned}$$

Die algemene formule is $T_n = 2{,}3n + 5{,}1$.

T_6 is:

$$\begin{aligned} T_6 &= 2{,}3(6) + 5{,}1 \\ &= 18{,}9 \end{aligned}$$

$T_6 = 18{,}9$

9. Vind die algemene formule vir die volgende rye en vind dan T_{10}, T_{15} en T_{30}

a) -18 ; -22 ; -26 ; -30 ; -34 ; ...

Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= (-22) - (-18) \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$T_n = -4n - 14$$

$$\begin{aligned} T_{10} &= -4(10) - 14 \\ &= -54 \\ T_{15} &= -4(15) - 14 \\ &= -74 \\ T_{30} &= -4(30) - 14 \\ &= -134 \end{aligned}$$

b) $1; -6; -13; -20; -27; \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= (-6) - (1) \\ &= -7 \end{aligned}$$

Ons let op dat vir elke volgende term, moet ons d bytel by die vorige term. Ons kan dit as volg uitdruk:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= a = 1 \\
T_2 &= a + d = 1 + (-7) \\
&= 1 + (-7)(1) \\
T_3 &= T_2 + d = 1 + (-7) + (-7) \\
&= 1 + (-7)(2) \\
T_n &= T_{n-1} + d = 1 + (-7)(n-1) \\
&= -7n + 8
\end{aligned}
$$

Die algemene formule is $T_n = -7n + 8$

$$
\begin{aligned}
T_{10} &= -7(10) + 8 \\
&= -62 \\
T_{15} &= -7(15) + 8 \\
&= -97 \\
T_{30} &= -7(30) + 8 \\
&= -202
\end{aligned}
$$

10. Die algemene term word vir elke ry hieronder gegee. Bereken die ontbrekende terme (elke ontbrekende term woord as ... aangedui).

a) $10; \ldots; 14; \ldots; 18 \qquad T_n = 2n + 8$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= 2n + 8 \\
T_2 &= 2(2) + 8 \\
&= 12 \\
T_4 &= 2(4) + 8 \\
&= 16
\end{aligned}
$$

Die ontbrekende terme is 12 en 16.

b) $2\ ;\ -2\ ;\ -6\ ;\ \ldots\ ;\ -14 \qquad T_n = -4n + 6$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= -4n + 6 \\
T_4 &= -4(4) + 6 \\
&= -10
\end{aligned}
$$

Die ontbrekende term is -10.

c) $8\ ;\ \ldots\ ;\ 38\ ;\ \ldots\ ;\ 68 \qquad T_n = 15n - 7$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= 15n - 7 \\
T_2 &= 15(2) - 7 \\
&= 23 \\
T_4 &= 15(4) - 7 \\
&= 53
\end{aligned}
$$

Die ontbrekende terme is 23 en 53.

11. Vind die algemene term in elk van die volgende rye:

a) $3\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 15\ ;\ \ldots$
Oplossing:
Ons moet eers d kry:

$$
\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 \\
&= 7 - 3 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, ons d bytel by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= a = 3 \\
T_2 &= a + d = 3 + 4 \\
&= 3 + 4(1) \\
T_3 &= T_2 + d = 3 + 4 + 4 \\
&= 3 + 4(2) \\
T_n &= T_{n-1} + d = 3 + 4(n-1) \\
&= 4n - 1
\end{aligned}
$$

Die algemene formule is $T_n = 4n - 1$.

b) $-2\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ \ldots$

Oplossing:

Ons moet eers d kry:

$$
\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 \\
&= 1 - (-2) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, ons d bytel by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= a = -2 \\
T_2 &= a + d = -2 + 3 \\
&= -2 + 3(1) \\
T_3 &= T_2 + d = -2 + 3 + 3 \\
&= -2 + 3(2) \\
T_n &= T_{n-1} + d = -2 + 3(n-1) \\
&= 3n - 5
\end{aligned}
$$

Die algemene formule is $T_n = 3n - 5$.

c) $11\ ;\ 15\ ;\ 19\ ;\ 23\ ;\ \ldots$

Oplossing:

Ons moet eers d kry:

$$
\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 \\
&= 15 - 11 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, ons d bytel by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= a = 11 \\
T_2 &= a + d = 11 + 4 \\
&= 11 + 4(1) \\
T_3 &= T_2 + d = 11 + 4 + 4 \\
&= 11 + 4(2) \\
T_n &= T_{n-1} + d = 11 + 4(n-1) \\
&= 4n + 7
\end{aligned}
$$

Die algemene formule is $T_n = 4n + 7$.

d) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1 ; $1\frac{1}{3}$; $\ldots$

Oplossing:

Ons moet eerste d kry:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, tel ons d by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$\begin{aligned} T_1 &= a = \frac{1}{3} \\ T_2 &= a + d = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1) \\ T_3 &= T_2 + d = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(2) \\ T_n &= T_{n-1} + d = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n-1) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}n \end{aligned}$$

Die algemene formule is $T_n = \frac{1}{3}n$.

12. Bestudeer die volgende ry: -7 ; -21 ; -35 ; $\ldots$

a) Skryf die volgende 3 terme neer.

Oplossing:

-49 ; -63 ; 77

b) Vind die algemene formule vir die ry.

Oplossing:

$$\begin{aligned} T_n &= -7 - 14(n-1) \\ T_n &= -7 - 14n + 14 \\ T_n &= -14n + 7 \end{aligned}$$

c) Vind die waarde van n as T_n -917 is.

Oplossing:

$$\begin{aligned} -917 &= 7 - 14n \\ -924 &= -14n \\ n &= 66 \end{aligned}$$

13. Wat is die 346^{ste} letter van die ry:

ALGEMENEALGEMENE............?

Oplossing:

Die woord "ALGEMENE" bevat 8 letters, dus:

$$\frac{346}{8} = 43 \text{ res } 4$$

Die res van 4 toon dat die 346^{ste} letter die vierde letter is van die woord, en is dus E.

14. Wat is die 1000^{ste} letter van die ry:
WISKUNDEWISKUNDEWISKUNDEWISK.............?
Oplossing:
Die woord "WISKUNDE" bevat 8 letters, dus:

$$\frac{1000}{8} = 125 \text{ res } 0$$

Die res van 0 toon aan dat die 1000^{ste} letter die laaste letter van die woord is, dus is dit E.

15. Die sitplekke van 'n sportstadion is so gerangskik dat die eerste ry 15 sitplekke het; die tweede ry het 19 sitplekke, die derde ry het 23 sitplekke, ensovoorts. Bereken hoeveel sitplekke is daar in die 25^{ste} ry.
Oplossing:
Ons begin deur die gegewe inligting as 'n ry te skryf:

$$15; 19; 23; \ldots$$

Nou bereken ons d:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= 19 - 15 \\ &= 4 \end{aligned}$$

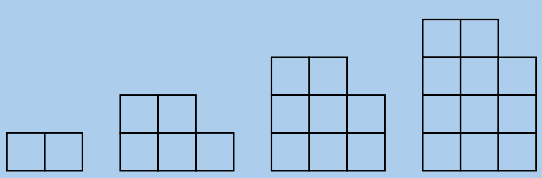
Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, ons d bytel by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$\begin{aligned} T_1 &= a = 15 \\ T_2 &= a + d = 15 + 4 \\ &= 15 + 4(1) \\ T_3 &= T_2 + d = 15 + 4 + 4 \\ &= 15 + 4(2) \\ T_n &= T_{n-1} + d = 15 + 4(n-1) \\ &= 4n + 11 \end{aligned}$$

Die algemene formule is $T_n = 4n + 11$.
Die 25^{ste} ry word verteenwoordig deur T_{25}. Die aantal sitplekke in hierdie ry is:

$$\begin{aligned} T_{25} &= 4(25) + 11 \\ &= 111 \end{aligned}$$

16. Die diagram hieronder toon prentjies wat 'n patroon vorm.



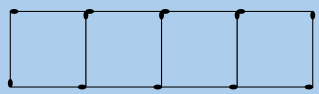
a) Hoeveel blokkies sal daar in die sesde prentjie wees?
Oplossing:
$2 \ ; \ 5 \ ; \ 8 \ ; \ 11 \ ; \ \ldots$
Daar word dus drie blokkies elke keer bygevoeg en die sesde prentjie sal 17 blokkies hê.

b) Bepaal die formule vir die n^{de} term.
Oplossing:
Die algemene term van die patroon is: $T_n = 3n - 1$.

c) Gebruik die formule om te bepaal hoeveel blokkies in die 30^{ste} prentjie van die diagram is.
Oplossing:

$$\begin{aligned} T_n &= 3n - 1 \\ T_{30} &= 3(30) - 1 \longleftarrow \text{stel n = 30} \\ &= 89 \end{aligned}$$

17. 'n Enkele vierkant word gevorm deur 4 vuurhoutjies. Twee vierkante in 'n ry benodig 7 vuurhoutjies en drie vierkante gebruik 10 vuurhoutjies.



Beantwoord die volgende vrae vir hierdie ry.

a) Bepaal die eerste term.
Oplossing:
Ons begin deur 'n ry neer te skryf om hierdie voor te stel:

$$4\ ;\ 7\ ;\ 10\ ;\ \ldots$$

Hieruit sien ons dat die eerste term 4 is.
$T_1 = 4$

b) Bepaal die gemene verskil.
Oplossing:
Die gemene verskil, (d), is:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= 7 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

c) Bepaal die algemene formule.
Oplossing:
Om die algemene formule te bepaal, let ons op dat ons vir elke opeenvolgende term d bytel tot by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$\begin{aligned} T_1 &= a = 4 \\ T_2 &= a + d = 4 + 3 \\ &= 4 + 3(1) \\ T_3 &= T_2 + d = 4 + 3 + 3 \\ &= 4 + 3(2) \\ T_n &= T_{n-1} + d = 4 + 3(n-1) \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

Die algemene formule is $T_n = 3n + 1$.

d) 'n Ry het vyf en twintig blokkies. Hoeveel vuurhoutjies is daar in die ry?
Oplossing:
Ons sien 'n ry met vyf en twintig vierkante wat verteenwoordig word deur T_{25}. Die aantal vuurhoutjies in hierdie ry is:

$$\begin{aligned} T_{25} &= 3(25) + 1 \\ &= 76 \end{aligned}$$

Daar is 76 vuurhoutjies in die ry met 25 vierkante.

18. Jy wil graag begin om geld te spaar, maar omdat jy nog nooit vantevore probeer het om geld te spaar nie, besluit jy om stadig te begin. Teen die einde van die eerste week, deponeer jy R 5 in jou bankrekening. Teen die einde van die tweede week, deponeer jy R 10 en teen die einde van die derde week, R 15. Na hoeveel weke sal jy R 50 moet deponeer in jou bankrekening?
Oplossing:
Ons begin deur 'n ry neer te skryf om hierdie situasie te verteenwoordig:

$$5\ ;\ 10\ ;\ 15\ ;\ \ldots$$

Vervolgens moet ons d vind:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= 10 - 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ons let nou op dat ons vir elke opeenvolgende term d bytel tot by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$\begin{aligned} T_1 &= a = 5 \\ T_2 &= a + d = 5 + 5 \\ &= 5 + 5(1) \\ T_3 &= T_2 + d = 5 + 5 + 5 \\ &= 5 + 5(2) \\ T_n &= T_{n-1} + d = 5 + 5(n-1) \\ &= 5n \end{aligned}$$

Die algemene formule is $T_n = 5n$.
Nou moet ons n vind, sodat $T_n = 50$:

$$\begin{aligned} T_n &= 5n \\ 50 &= 5n \\ \therefore n &= 10 \end{aligned}$$

Na die 10$^{\text{de}}$ week sal jy R 50 deponeer in jou bankrekening.

19. Beskou die volgende lys:

$$-4y - 3 \ ; \ -y \ ; \ 2y + 3 \ ; \ 5y + 6 \ ; \ 8y + 9 \ ; \ \ldots$$

a) Vind die gemene verskil vir die terme van die lys. As die ry nie lineêr is nie (dus as dit nie 'n gemene verskil het nie), skryf "geen gemene verskil".
Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 = (-y) - (-4y - 3) = 3y + 3 \\ d &= T_3 - T_2 = (2y + 3) - (-y) = 3y + 3 \\ d &= T_4 - T_3 = (5y + 6) - (2y + 3) = 3y + 3 \end{aligned}$$

Die gemene verskil vir hierdie getalle: $d = 3y + 3$.

b) As daar nou vir jou gesê word dat $y = 1$, bepaal die waardes van T_1 en T_2.
Oplossing:

$$\begin{aligned} T_1 &= -4y - 3 \\ &= -4(1) - 3 \\ &= -7 \\ T_2 &= -y \\ &= -(1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

20. a) Bepaal die waarde van n indien die volgende terme: $2n + \frac{1}{2}$; $3n + \frac{5}{2}$; $7n + \frac{11}{2}$; $\ldots$ 'n lineêre ry vorm. As die antwoord nie 'n heelgetal is nie, skryf die antwoord as 'n vereenvoudigde breuk.
Oplossing:

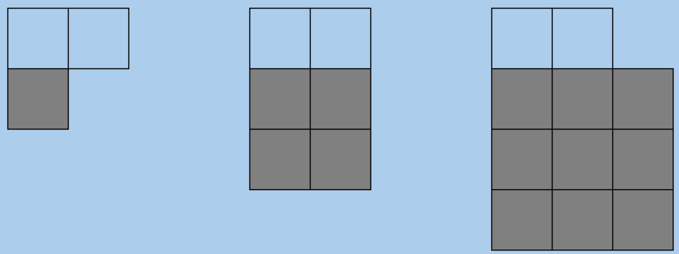
$$\begin{aligned}
T_2 - T_1 &= T_3 - T_2 \\
\left(3n + \frac{5}{2}\right) - \left(2n + \frac{1}{2}\right) &= \left(7n + \frac{11}{2}\right) - \left(3n + \frac{5}{2}\right) \\
2\left(3n + \frac{5}{2}\right) - 2\left(2n + \frac{1}{2}\right) &= 2\left(7n + \frac{11}{2}\right) - 2\left(3n + \frac{5}{2}\right) \\
6n + 5 - (4n + 1) &= 14n + 11 - (6n + 5) \\
2n + 4 &= 8n + 6 \\
-2 &= 6n \\
n &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

b) Bepaal nou die numeriese waarde van die eerste drie terme. As die antwoorde nie heelgetalle is nie, skryf jou antwoorde as breuke.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Eerste term: } T_1 &= 2n + \frac{1}{2} \\
&= 2\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{6} \\
\text{Tweede term: } T_2 &= 3n + \frac{5}{2} \\
&= 3\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{2} \\
&= \frac{3}{2} \\
\text{Derde term: } T_3 &= 7n + \frac{11}{2} \\
&= 7\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{11}{2} \\
&= \frac{19}{6}
\end{aligned}$$

Die eerste drie terme van hierdie ry is: $-\frac{1}{6}$, $\frac{3}{2}$ en $\frac{19}{6}$.

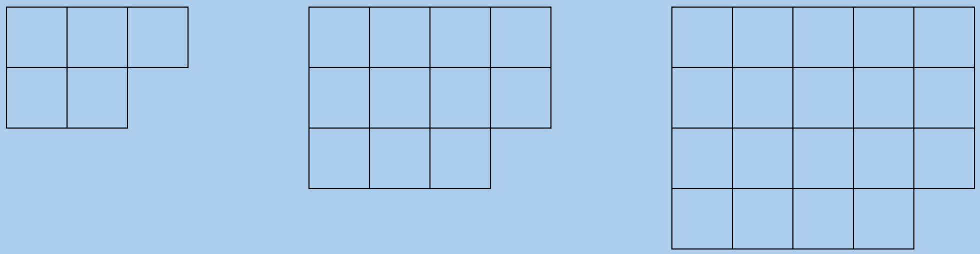
21. Hoeveel blokkies sal daar in die 85$^{\text{ste}}$ prentjie wees?
(Wenk: Gebruik die grys blokkies om te help)



Oplossing:
Die grys blokkies kan verteenwoordig word deur n^2 en daar is altyd 2 wit blokkies.

$$\begin{aligned}
T_n &= n^2 + 2 \\
T_{85} &= 85^2 + 2 \\
T_{85} &= 7227 \text{ blokkies}
\end{aligned}$$

22. Analiseer die prentjie hieronder:



a) Hoeveel blokkies is daar in die volgende prentjie?
Oplossing:
Prentjie 1: $2^2 + 1$
Prentjie 2: $3^2 + 2$
Prentjie 3: $4^2 + 3$
Prentjie 4: $5^2 + 4 = 29$ blokkies

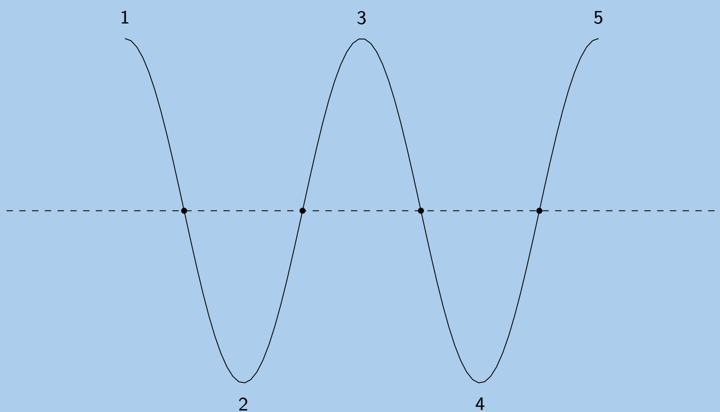
b) Skryf die algemene formule vir hierdie patroon neer.
Oplossing:
Kyk na:
Prentjie 1: $2^2 + 1 \qquad (n = 1)$

$$T_n = (n + 1)^2 + n$$

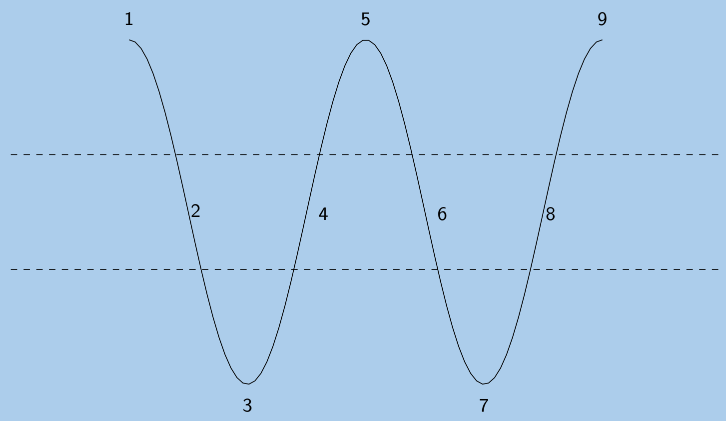
c) Hoeveel blokkies sal daar in die 14^{de} prentjie wees?
Oplossing:

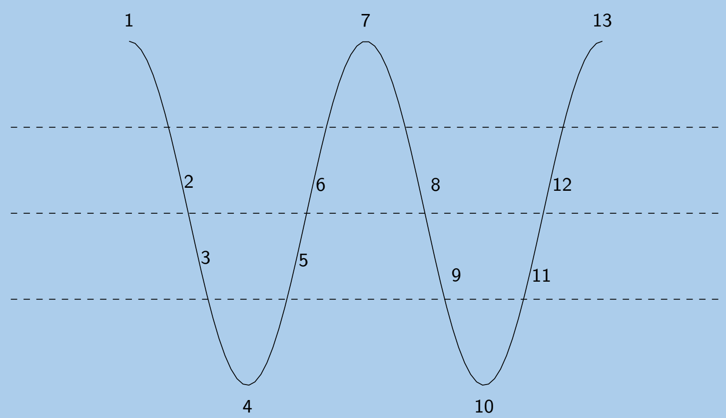
$$\begin{aligned} T_n &= (n + 1)^2 + n \\ T_{14} &= (14 + 1)^2 + 14 \\ T_{14} &= 239 \text{ blokkies} \end{aligned}$$

23. 'n Horisontale lyn sny 'n stuk tou by 4 punte en verdeel dit in vyf dele, soos hieronder aangetoon.



As die stuk tou op hierdie manier gekruis word deur 19 ewewydige lyne, wat elkeen die tou by 4 punte sny, bepaal die aantal dele waarin die stuk tou verdeel word.
Oplossing:
Ons moet 'n patroon vind vir hierdie scenario.
Die eerste lyn verdeel die tou in vyf dele. Ons kan die diagram oor teken om die tou met 2 en 3 lyne te toon:





Van die skets sien ons dat twee lyne die tou in 9 stukke verdeel en drie lyne verdeel die tou in 13 stukke. Dus vir elke lyn wat bygevoeg word, word die tou in 4 ekstra stukke verdeel.
So ons kan die volgende ry skryf:

$$5\ ;\ 9\ ;\ 13\ ;\ \ldots$$

Die gemene verskil is 4.
Vervolgens let ons op dat vir elke opeenvolgende term, ons d bytel by die laaste term. Ons kan dit uitdruk as:

$$\begin{aligned}
T_1 &= a = 5 \\
T_2 &= a + d = 5 + 4 \\
&= 5 + 4(1) \\
T_3 &= T_2 + d = 5 + 4 + 4 \\
&= 5 + 4(2) \\
T_n &= T_{n-1} + d = 5 + 4(n-1) \\
&= 4n + 1
\end{aligned}$$

Die algemene formule is $T_n = 4n + 1$.
Wanneer daar 19 lyne is waarmee ons werk T_{19}:

$$\begin{aligned}
T_{19} &= 4(19) + 1 \\
&= 77
\end{aligned}$$

Dus sal die tou opgesny word in 77 stukke.

24. Gebruik 'n sakrekenaar om 'n ondersoek te doen en veralgemeen dan jou bevindings om die volgende te bepaal:

 a) ene-syfer van 3^{2007}

 Oplossing:

$3^1 = 3$	$3^5 = 243$	$3^9 = 19683$
$3^2 = 9$	$3^6 = 729$	$3^{10} = 59049$
$3^3 = 27$	$3^7 = 2187$	$3^{11} = 177147$
$3^4 = 81$	$3^8 = 6561$	$3^{12} = 531441$

$\frac{2007}{4} = 501$ r 3

Dus 3^{2007}sal dieselfde patroon volg as die derde ry

en dus is die ene-syfer 7

b) tiene-syfer van 7^{2008}

Oplossing:

$7^1 = 07$	$7^5 = 16807$	$7^9 = 40353607$
$7^2 = 49$	$7^6 = 117649$	$7^{10} = 282475249$
$7^3 = 343$	$7^7 = 823543$	$7^{11} = 1977326743$
$7^4 = 2401$	$7^8 = 576801$	

$\frac{2008}{4} = 502$ r 0

Dus 7^{2008} sal dieselfde patroon volg as die vierde ry

Gevolglik is die tiene-syfer 0

c) res wanneer 7^{250} gedeel word deur 5

Oplossing:

$\frac{7^1}{5}$: Res $= 2$	$\frac{7^5}{5}$: Res $= 2$
$\frac{7^2}{5}$: Res $= 4$	$\frac{7^6}{5}$: Res $= 4$
$\frac{7^3}{5}$: Res $= 3$	$\frac{7^7}{5}$: Res $= 3$
$\frac{7^4}{5}$: Res $= 1$	$\frac{7^8}{5}$: Res $= 1$

$\frac{250}{4} = 62$ r 0

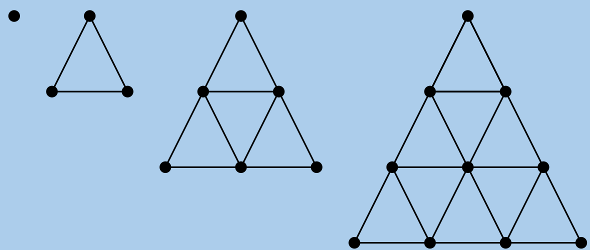
Dus 2^{250} sal dieselfde patroon volg as die tweede ry

gevolglik is die res 4

25. Analiseer die diagram en voltooi die tabel.

Die kolletjies vorm 'n driehoekige patroon en die formule is $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Die algemene formule vir die lyne is $T_n = \frac{3n(n-1)}{2}$.



Nommer van figuur	1	2	3	4	5	20	n
Aantal kolletjies							
Aantal lyne							
Totaal							

Oplossing:

Die algemene formule vir beide die lyne en die kolletjies is gegee. Ons kan die algemene formule vir die som van die lyne en kolle te bepaal deur die optelling van die algemene formule vir die lyne en die algemene formule vir die kolletjies.

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 3n^2 - 3n}{2} \\ &= \frac{4n^2 - 2n}{2} \\ &= 2n^2 - n \end{aligned}$$

Nommer van figuur	1	2	3	4	5	20	n
Aantal kolletjies	1	3	6	10	15	210	$\frac{n(n+1)}{2}$
Aantal lyne	0	3	9	18	30	570	$\frac{3n(n-1)}{2}$
Totaal	1	6	15	28	45	780	$2n^2 - n$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HVX	2. 2HVZ	3. 2HW2	4. 2HW3	5. 2HW4	6. 2HW5
7. 2HW6	8a. 2HW7	8b. 2HW8	8c. 2HW9	9. 2HWB	10. 2HWC
11a. 2HWD	11b. 2HWF	11c. 2HWG	11d. 2HWH	12. 2HWJ	13. 2HWK
14. 2HWM	15. 2HWN	16. 2HWP	17. 2HWQ	18. 2HWR	19. 2HWT
20. 2HWV	21. 2HWW	22. 2HWX	23. 2HWS	24a. 2HWY	24b. 2HWZ
24c. 2HX2	25. 2HVY				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK **4**

Vergelykings en ongelykhede

4.1 Inleiding

- Hierdie hoofstuk dek lineêre, kwadratiese en gelyktydige lineêre vergelykings sowel as woordprobleme, letter vergelykings en lineêre ongelykhede.
- Lineêre vergelykings is gedek in vorige grade en word hersien.
- Woordprobleme kan enige lineêre, kwadratiese of gelyktydige vergelykings insluit.
- Vir lineêre ongelykhede moet leerders intervalnotasie ken en in staat wees om die oplossing grafies voor te stel.

4.2 Oplos van lineêre vergelykings

Metode vir die oplossing van lineêre vergelykings

Exercise 4 – 1:

Los die volgende vergelykings op (aanvaar geen noemer is nul nie)

1. $2y - 3 = 7$
   Oplossing:
   $$\begin{aligned} 2y - 3 &= 7 \\ 2y &= 10 \\ y &= 5 \end{aligned}$$
2. $2c = c - 8$
   Oplossing:
   $$\begin{aligned} 2c &= c - 8 \\ c &= -8 \end{aligned}$$
3. $3 = 1 - 2c$
   Oplossing:
   $$\begin{aligned} 3 &= 1 - 2c \\ 2c &= 1 - (3) \\ 2c &= -2 \\ c &= \frac{-2}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$
4. $4b + 5 = -7$
   Oplossing:
   $$\begin{aligned} 4b + 5 &= -7 \\ 4b &= -7 - (5) \\ 4b &= -12 \\ b &= \frac{-12}{4} \\ &= -3 \end{aligned}$$

5. $-3y = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned} -3y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

6. $16y + 4 = -10$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 16y + 4 &= -10 \\ 16y &= -14 \\ y &= -\frac{14}{16} \\ &= -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

7. $12y + 0 = 144$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 12y + 0 &= 144 \\ 12y &= 144 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

8. $7 + 5y = 62$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 7 + 5y &= 62 \\ 5y &= 55 \\ y &= 11 \end{aligned}$$

9. $55 = 5x + \frac{3}{4}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 55 &= 5x + \frac{3}{4} \\ 220 &= 20x + 3 \\ 20x &= 217 \\ x &= \frac{217}{20} \end{aligned}$$

10. $5x = 2x + 45$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 5x &= 2x + 45 \\ 3x &= 45 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

11. $23x - 12 = 6 + 3x$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 23x - 12 &= 6 + 3x \\ 20x &= 18 \\ x &= \frac{18}{20} \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

12. $12 - 6x + 34x = 2x - 24 - 64$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 12 - 6x + 34x &= 2x - 24 - 64 \\ 12 + 28x &= 2x - 88 \\ 26x &= -100 \\ x &= -\frac{100}{26} \\ &= -\frac{50}{13} \end{aligned}$$

13. $6x + 3x = 4 - 5(2x - 3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 6x + 3x &= 4 - 5(2x - 3) \\ 9x &= 4 - 10x + 15 \\ 19x &= 19 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

14. $18 - 2p = p + 9$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 18 - 2p &= p + 9 \\ 9 &= 3p \\ p &= 3 \end{aligned}$$

15. $\frac{4}{p} = \frac{16}{24}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{4}{p} &= \frac{16}{24} \\ (4)(24) &= (16)(p) \\ 16p &= 96 \\ p &= 6 \end{aligned}$$

16. $-(-16 - p) = 13p - 1$
Oplossing:

$$\begin{aligned} -(-16 - p) &= 13p - 1 \\ 16 + p &= 13p - 1 \\ 17 &= 12p \\ p &= \frac{17}{12} \end{aligned}$$

17. $3f - 10 = 10$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3f - 10 &= 10 \\ 3f &= 20 \\ f &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

18. $3f + 16 = 4f - 10$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3f + 16 &= 4f - 10 \\ f &= 26 \end{aligned}$$

19. $10f + 5 = -2f - 3f + 80$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 10f + 5 &= -2f - 3f + 80 \\ 10f + 5 &= -5f + 80 \\ 15f &= 75 \\ f &= 5 \end{aligned}$$

20. $8(f - 4) = 5(f - 4)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 8(f - 4) &= 5(f - 4) \\ 8f - 32 &= 5f - 20 \\ 3f &= 12 \\ f &= 4 \end{aligned}$$

21. $6 = 6(f + 7) + 5f$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 6 &= 6(f + 7) + 5f \\ 6 &= 6f + 42 + 5f \\ -36 &= 11f \\ f &= -\frac{36}{11} \end{aligned}$$

22. $-7x = 8(1 - x)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} -7x &= 8(1 - x) \\ -7x &= 8 - 8x \\ x &= 8 \end{aligned}$$

23. $5 - \frac{7}{b} = \frac{2(b + 4)}{b}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 5 - \frac{7}{b} &= \frac{2(b + 4)}{b} \\ \frac{5b - 7}{b} &= \frac{2b + 8}{b} \\ 5b - 7 &= 2b + 8 \\ 3b &= 15 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

24. $\frac{x + 2}{4} - \frac{x - 6}{3} = \frac{1}{2}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{4} - \frac{x - 6}{3} &= \frac{1}{2} \\ \frac{3(x + 2) - 4(x - 6)}{12} &= \frac{1}{2} \\ \frac{3x + 6 - 4x + 24}{12} &= \frac{1}{2} \\ (-x + 30)(2) &= 12 \\ -2x + 60 &= 12 \\ -2x &= -48 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

25. $1 = \frac{3a-4}{2a+6}$
Oplossing:
Let op dat $a \neq --3$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{3a-4}{2a+6} \\ 2a+6 &= 3a-4 \\ a &= 10 \end{aligned}$$

26. $\frac{2-5a}{3} - 6 = \frac{4a}{3} + 2 - a$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{2-5a}{3} - 6 &= \frac{4a}{3} + 2 - a \\ \frac{2-5a}{3} - \frac{4a}{3} + a &= 8 \\ \frac{2-5a-4a+3a}{3} &= 8 \\ 2-6a &= 24 \\ 6a &= -22 \\ a &= -\frac{22}{6} \end{aligned}$$

27. $2 - \frac{4}{b+5} = \frac{3b}{b+5}$
Oplossing:
Let op dat $b \neq -5$

$$\begin{aligned} 2 - \frac{4}{b+5} &= \frac{3b}{b+5} \\ 2 &= \frac{3b+4}{b+5} \\ 2b+10 &= 3b+4 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

28. $3 - \frac{y-2}{4} = 4$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{y-2}{4} &= 4 \\ -\frac{y-2}{4} &= 1 \\ -y+2 &= 4 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

29. $1{,}5x + 3{,}125 = 1{,}25x$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 1{,}5x + 3{,}125 &= 1{,}25x \\ 1{,}5x - 1{,}25x &= -3{,}125 \\ 0{,}25x &= -3{,}125 \\ x &= -12{,}5 \end{aligned}$$

30. $1{,}3(2{,}7x+1) = 4{,}1 - x$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
1{,}3(2{,}7x+1) &= 4{,}1-x\\
3{,}51x+1{,}3 &= 4{,}1-x\\
4{,}51x &= 2{,}8\\
x &= \frac{2{,}8}{4{,}51}\\
&= \frac{280}{451}
\end{aligned}
$$

31. $6{,}5x-4{,}15=7+4{,}25x$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
6{,}5x-4{,}15 &= 7+4{,}25x\\
2{,}25x &= 11{,}15\\
x &= \frac{11{,}15}{2{,}25}\\
&= \frac{1115}{225}\\
&= \frac{223}{45}
\end{aligned}
$$

32. $\frac{1}{3}P+\frac{1}{2}P-10=0$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}P+\frac{1}{2}P-10 &= 0\\
\frac{2+3}{6}P &= 10\\
5P &= 60\\
P &= 12
\end{aligned}
$$

33. $1\frac{1}{4}(x-1)-1\frac{1}{2}(3x+2)=0$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
1\frac{1}{4}(x-1)-1\frac{1}{2}(3x+2) &= 0\\
\frac{5}{4}x-\frac{5}{4}-\frac{3}{2}(3x)-\frac{3}{2}(2) &= 0\\
\frac{5}{4}x-\frac{5}{4}-\frac{9}{2}x-\frac{6}{2} &= 0\\
\frac{5-18}{4}x+\frac{-5-12}{4} &= 0\\
\frac{-13}{4}x &= \frac{17}{4}\\
-13x &= 17\\
x &= -\frac{17}{13}
\end{aligned}
$$

34. $\frac{1}{5}(x-1)=\frac{1}{3}(x-2)+3$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}(x-1) &= \frac{1}{3}(x-2)+3 \\
\frac{1}{5}x - \frac{1}{5} &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 3 \\
-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 3 &= \frac{2}{15}x \\
-\frac{38}{15} &= \frac{2}{15}x \\
x &= -\frac{38}{2} \\
x &= -19
\end{aligned}$$

35. $\frac{5}{2a} + \frac{1}{6a} - \frac{3}{a} = 2$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2a} + \frac{1}{6a} - \frac{3}{a} &= 2 \\
\frac{5(3)+1-3(6)}{6a} &= 2 \\
\frac{15+1-18}{6a} &= 2 \\
\frac{-2}{6a} &= 2 \\
-2 &= 12a \\
a &= -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HX4	2. 2HX5	3. 2HX6	4. 2HX7	5. 2HX8	6. 2HX9	7. 2HXB	8. 2HXC
9. 2HXD	10. 2HXF	11. 2HXG	12. 2HXH	13. 2HXJ	14. 2HXK	15. 2HXM	16. 2HXN
17. 2HXP	18. 2HXQ	19. 2HXR	20. 2HXS	21. 2HXT	22. 2HXV	23. 2HXW	24. 2HXX
25. 2HXY	26. 2HXZ	27. 2HY2	28. 2HY3	29. 2HY4	30. 2HY5	31. 2HY6	32. 2HY7
33. 2HY8	34. 2HY9	35. 2HYB					

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.3 Oplos van kwadratiese vergelykings

Metode vir die oplos van kwadratiese vergelykings

Exercise 4 – 2:

1. Skryf die volgende in standaardvorm

   a) $(r+4)(5r-4) = -16$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
(r+4)(5r-4) &= -16 \\
5r^2 - 4r + 20r - 16 + 16 &= 0 \\
5r^2 - 4r + 20r - 16 + 16 &= 0 \\
5r^2 + 16r &= 0
\end{aligned}$$

b) $(3r-8)(2r-3) = -15$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(3r-8)(2r-3) &= -15\\
6r^2 - 9r - 16r + 24 + 15 &= 0\\
6r^2 - 9r - 16r + 24 + 15 &= 0\\
6r^2 - 25r + 39 &= 0
\end{aligned}
$$

c) $(d+5)(2d+5) = 8$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(d+5)(2d+5) &= 8\\
2d^2 + 5d + 10d + 25 - 8 &= 0\\
2d^2 + 5d + 10d + 25 - 8 &= 0\\
2d^2 + 15d + 17 &= 0
\end{aligned}
$$

2. Los die volgende vergelykings op:

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2x - 15 &= 0\\
(x-3)(x+5) &= 0\\
\therefore x &= -5 \text{ of } x = 3
\end{aligned}
$$

b) $p^2 - 7p - 18 = 0$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
p^2 - 7p - 18 &= 0\\
(p-9)(p+2) &= 0\\
\therefore p &= -2 \text{ of } p = 9
\end{aligned}
$$

c) $9x^2 - 6x - 8 = 0$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
9x^2 - 6x - 8 &= 0\\
(3x+2)(3x-4) &= 0\\
3x + 2 &= 0\\
x &= -\frac{2}{3}\\
&\text{of}\\
3x - 4 &= 0\\
x &= \frac{4}{3}\\
\therefore x &= -\frac{2}{3} \text{ of } x = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

d) $5x^2 + 21x - 54 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
5x^2 + 21x - 54 &= 0 \\
(5x - 9)(x + 6) &= 0 \\
5x - 9 &= 0 \\
x &= \frac{9}{5} \\
&\text{of} \\
x + 6 &= 0 \\
x &= -6 \\
\therefore x &= \frac{9}{5} \text{ of } x = -6
\end{aligned}$$

e) $4z^2 + 12z + 8 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
4z^2 + 12z + 8 &= 0 \\
z^2 + 3z + 2 &= 0 \\
(z + 1)(z + 2) &= 0 \\
z &= -2 \text{ of } z = -1
\end{aligned}$$

f) $-b^2 + 7b - 12 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
-b^2 + 7b - 12 &= 0 \\
b^2 - 7b + 12 &= 0 \\
(b - 4)(b - 3) &= 0 \\
b &= 3 \text{ of } b = 4
\end{aligned}$$

g) $-3a^2 + 27a - 54 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
-3a^2 + 27a - 54 &= 0 \\
a^2 - 9a + 18 &= 0 \\
(a - 6)(a - 3) &= 0 \\
a &= 3 \text{ of } a = 6.
\end{aligned}$$

h) $4y^2 - 9 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
4y^2 - 9 &= 0 \\
(2y - 3)(2y + 3) &= 0 \\
2y - 3 &= 0 \\
y &= \frac{3}{2} \\
&\text{of} \\
2y + 3 &= 0 \\
y &= -\frac{3}{2} \\
\therefore y &= \frac{3}{2} \text{ of } y = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

i) $4x^2 + 16x - 9 = 0$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
4x^2 + 16x - 9 &= 0 \\
(2x - 1)(2x + 9) &= 0 \\
2x - 1 &= 0 \\
x &= \frac{1}{2} \\
\text{of} \\
2x + 9 &= 0 \\
y &= -\frac{9}{2} \\
\therefore x = \frac{1}{2} \text{ of } x &= -\frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

j) $4x^2 - 12x = -9$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 12x &= -9 \\
4x^2 - 12x + 9 &= 0 \\
(2x - 3)(2x - 3) &= 0 \\
2x - 3 &= 0 \\
x &= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

k) $20m + 25m^2 = 0$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
20m + 25m^2 &= 0 \\
5m(4 + 5m) &= 0 \\
5m &= 0 \\
m &= 0 \\
\text{of} \\
4 + 5m &= 0 \\
m &= -\frac{4}{5} \\
\therefore m = 0 \text{ of } m &= -\frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

l) $2x^2 - 5x - 12 = 0$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 5x - 12 &= 0 \\
(2x + 3)(x - 4) &= 0 \\
2x + 3 &= 0 \\
x &= -\frac{3}{2} \\
\text{of} \\
x - 4 &= 0 \\
x &= 4 \\
\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ of } x &= 4
\end{aligned}
$$

m) $-75x^2 + 290x = 240$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
-75x^2 + 290x &= 240 \\
-75x^2 + 290x - 240 &= 0 \\
-15x^2 + 58x - 48 &= 0 \\
(5x-6)(3x-8) &= 0 \\
5x - 6 &= 0 \\
x &= \frac{6}{5} \\
&\text{of} \\
3x - 8 &= 0 \\
x &= \frac{8}{3} \\
\therefore x &= \frac{6}{5} \text{ of } x = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

n) $2x = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 14\frac{2}{3}$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2x &= \frac{1}{3}x^2 - 3x + 14\frac{2}{3} \\
6x &= x^2 - 9x + 44 \\
x^2 - 15x + 44 &= 0 \\
(x-4)(x-11) &= 0 \\
x - 4 &= 0 \\
x &= 4 \\
&\text{of} \\
x - 11 &= 0 \\
x &= 11 \\
\therefore x &= 4 \text{ of } x = 11
\end{aligned}
$$

o) $x^2 - 4x = -4$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x &= -4 \\
x^2 - 4x + 4 &= 0 \\
(x-2)(x-2) &= 0 \\
x - 2 &= 0 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

p) $-x^2 + 4x - 6 = 4x^2 - 14x + 3$
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
-x^2 + 4x - 6 &= 4x^2 - 14x + 3 \\
5x^2 - 18x + 9 &= 0 \\
(5x-3)(x-3) &= 0 \\
5x - 3 &= 0 \\
x &= \frac{3}{5} \\
&\text{of} \\
x - 3 &= 0 \\
x &= 3 \\
\therefore x &= \frac{3}{5} \text{ of } x = 3
\end{aligned}
$$

q) $t^2 = 3t$

Oplossing:

$$\begin{aligned} t^2 &= 3t \\ t^2 - 3t &= 0 \\ t(t-3) &= 0 \\ t &= 0 \\ &\text{of} \\ t - 3 &= 0 \\ t &= 3 \\ \therefore t &= 0 \text{ of } t = 3 \end{aligned}$$

r) $x^2 - 10x = -25$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x &= -25 \\ x^2 - 10x + 25 &= 0 \\ (x-5)(x-5) &= 0 \\ x - 5 &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

s) $x^2 = 18$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 &= 18 \\ \therefore x &= \sqrt{18} \text{ of } x = -\sqrt{18} \end{aligned}$$

t) $p^2 - 6p = 7$

Oplossing:

$$\begin{aligned} p^2 - 6p &= 7 \\ p^2 - 6p - 7 &= 0 \\ (p-7)(p+1) &= 0 \\ p - 7 &= 0 \\ p &= 7 \\ &\text{of} \\ p + 1 &= 0 \\ p &= -1 \\ \therefore p &= 7 \text{ of } p = -1 \end{aligned}$$

u) $4x^2 - 17x - 77 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 17x - 77 &= 0 \\ (4x+11)(x-7) &= 0 \\ 4x + 11 &= 0 \\ x &= -\frac{11}{4} \\ &\text{of} \\ x - 7 &= 0 \\ x &= 7 \\ \therefore x &= -\frac{11}{4} \text{ of } x = 7 \end{aligned}$$

v) $14x^2 + 5x = 6$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 14x^2 + 5x &= 6 \\ 14x^2 + 5x - 6 &= 0 \\ (7x+6)(2x-1) &= 0 \\ 7x + 6 &= 0 \\ x &= -\frac{6}{7} \\ &\text{of} \\ 2x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \\ \therefore x = -\frac{6}{7} &\text{ of } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

w) $2x^2 - 2x = 12$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x &= 12 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \\ (x-3)(x+2) &= 0 \\ x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \\ &\text{of} \\ x + 2 &= 0 \\ x &= -2 \\ \therefore x = 3 &\text{ of } x = -2 \end{aligned}$$

x) $(2a-3)^2 - 16 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (2a-3)^2 - 16 &= 0 \\ (2a - 3 + 4)(2a - 3 - 4) &= 0 \\ (2a+1)(2a-7) &= 0 \\ \therefore a = -\frac{1}{2} &\text{ of } a = 3{,}5 \end{aligned}$$

y) $(x-6)^2 - 24 = 1$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (x-6)^2 - 24 &= 1 \\ (x-6)^2 - 25 &= 0 \\ (x - 6 - 5)(x - 6 + 5) &= 0 \\ (x-11)(x-1) &= 0 \\ \therefore x = 11 &\text{ of } x = 1 \end{aligned}$$

3. Los die volgende vergelykings op (let op die beperkings wat van toepassing is)

a) $3y = \frac{54}{2y}$
Oplossing:
Let op dat $y \neq 0$

$$\begin{aligned}3y &= \frac{54}{2y}\\ 3y^2 &= 27\\ y^2 &= 9\\ y^2 - 9 &= 0\\ (y-3)(y+3) &= 0\\ \therefore y &= 3 \text{ of } y = -3\end{aligned}$$

b) $\frac{10z}{3} = 1 - \frac{1}{3z}$
Oplossing:
Let op dat $z \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{10z}{3} &= 1 - \frac{1}{3z}\\ 10z^2 &= 3z - 1\\ 10z^2 - 3z + 1 &= 0\\ (5z+1)(2z-1) &= 0\\ \therefore z &= -\frac{1}{5} \text{ of } z = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

c) $x + 2 = \frac{18}{x} - 1$
Oplossing:
Let op dat $x \neq 0$

$$\begin{aligned}x + 2 &= \frac{18}{x} - 1\\ x^2 + 2x &= 18 - x\\ x^2 + 3x - 18 &= 0\\ (x-3)(x+6) &= 0\\ \therefore x &= 3 \text{ of } x = -6\end{aligned}$$

d) $y - 3 = \frac{5}{4} - \frac{1}{y}$
Oplossing:
Let op dat $y \neq 0$

$$\begin{aligned}y - 3 &= \frac{5}{4} - \frac{1}{y}\\ 4y^2 - 12y &= 5y - 4\\ 4y^2 - 17y + 4 &= 0\\ (4y-1)(y-4) &= 0\\ \therefore y &= \frac{1}{4} \text{ of } y = 4\end{aligned}$$

e) $\frac{1}{2}(b-1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{b} + 4\right)$
Oplossing:
Let op dat $b \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(b-1) &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{b}+4\right) \\
3(b-1) &= 2\left(\frac{2}{b}+4\right) \\
3b-3 &= \frac{4}{b}+8 \\
3b^2-3b &= 4+8b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3b^2-11b-4 &= 0 \\
(3b+1)(b-4) &= \\
\therefore b &= -\frac{1}{3}b \text{ of } b=4
\end{aligned}$$

f) $3(y+1)=\dfrac{4}{y}+2$

Oplossing:

Let op dat $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
3(y+1) &= \frac{4}{y}+2 \\
3y+3 &= \frac{4}{y}+2 \\
3y^2+3y &= 4+2y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3y^2+y-4 &= 0 \\
(3y+4)(y-1) &= 0 \\
\therefore y &= -\frac{4}{3} \text{ of } y=1
\end{aligned}$$

g) $(x+1)^2-2(x+1)-15=0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
(x+1)^2-2(x+1)-15 &= 0 \\
((x+1)-5)((x+1)+3) &= 0 \\
(x-4)(x+4) &= 0 \\
\therefore x &= 4 \text{ of } x=-4
\end{aligned}$$

h) $z^4-1=0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
z^4-1 &= 0 \\
(z^2-1)(z^2+1) &= 0 \\
(z-1)(z+1)(z^2+1) &= 0 \\
\therefore z &= 1 \text{ of } z=-1
\end{aligned}$$

Neem kennis dat z^2+1 het geen reële oplossings nie.

i) $b^4-13b^2+36=0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
b^4-13b^2+36 &= 0 \\
(b^2-4)(b^2-9) &= 0 \\
(b-2)(b+2)(b-3)(b+3) &= 0 \\
\therefore b &= \pm 2 \text{ of } b=\pm 3
\end{aligned}$$

j) $\dfrac{a+1}{3a-4}+\dfrac{9}{2a+5}+\dfrac{2a+3}{2a+5}=0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{a+1}{3a-4}+\frac{9}{2a+5}+\frac{2a+3}{2a+5} &= 0\\
\frac{(a+1)(2a+5)+9(3a-4)+(2a+3)(3a-4)}{(3a-4)(2a+5)} &= 0\\
2a^2+7a+5+27a-36+6a^2+a-12 &= 0\\
8a^2+35a-43 &= 0\\
(8a+43)(a-1) &= 0\\
8a+43 &= 0\\
a &= -\frac{43}{8}\\
\text{of}&\\
a-1 &= 0\\
a &= 1\\
\therefore a &= -\frac{43}{8} \text{ of } a=1
\end{aligned}$$

k) $\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=0$

Oplossing:

Let op dat $x \neq -1$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-2x-3}{x+1} &= 0\\
\frac{(x+1)(x-3)}{x+1} &= 0\\
\therefore x &= 3
\end{aligned}$$

l) $x+2=\dfrac{6x-12}{x-2}$

Oplossing:

Let op dat $x \neq 2$

$$\begin{aligned}
x+2 &= \frac{6x-12}{x-2}\\
(x+2)(x-2) &= 6x-12\\
x^2-4 &= 6x-12\\
x^2-6x+8 &= 0\\
(x-2)(x-4) &= 0\\
\therefore x &= 4
\end{aligned}$$

m) $\dfrac{3(a^2+1)+10a}{3a+1}=1$

Oplossing:

Let op dat $a \neq -\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
\frac{3(a^2+1)+10a}{3a+1} &= 1\\
3(a^2+1)+10a &= 3a+1\\
3a^2+3+10a-3a-1 &= 0\\
3a^2+7a+2 &= 0\\
(3a+1)(a+2) &= 0\\
\therefore a &= -2
\end{aligned}$$

n) $\frac{3}{9a^2-3a+1} - \frac{3a+4}{27a^3+1} = \frac{1}{9a^2-1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{9a^2-3a+1} - \frac{3a+4}{27a^3+1} &= \frac{1}{9a^2-1} \\
\frac{3}{9a^2-3a+1} - \frac{3a+4}{(3a+1)(9a^2-3a+1)} &= \frac{1}{(3a-1)(3a+1)} \\
\frac{3(9a^2-1)-(3a-1)(3a+4)}{(3a+1)(3a-1)(9a^2-3a+1)} &= \frac{9a^2-3a+1}{(3a-1)(3a+1)(9a^2-3a+1)} \\
27a^2-3-9a^2-9a+4 &= 9a^2-3a+1 \\
9a^2-6a &= 0 \\
3a(3a-2) &= 0 \\
3a &= 0 \\
a &= 0 \\
&\text{of} \\
3a-2 &= 0 \\
a &= \frac{2}{3} \\
\therefore a = 0 \text{ of } a &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2HYD	1b. 2HYF	1c. 2HYG	2a. 2HYH	2b. 2HYJ	2c. 2HYK
2d. 2HYM	2e. 2HYN	2f. 2HYP	2g. 2HYQ	2h. 2HYR	2i. 2HYS
2j. 2HYT	2k. 2HYV	2l. 2HYW	2m. 2HYX	2n. 2HYY	2o. 2HYZ
2p. 2HZ2	2q. 2HZ3	2r. 2HZ4	2s. 2HZ5	2t. 2HZ6	2u. 2HZ7
2v. 2HZ8	2w. 2HZ9	2x. 2HZB	2y. 2HZC	3a. 2HZD	3b. 2HZF
3c. 2HZG	3d. 2HZH	3e. 2HZJ	3f. 2HZK	3g. 2HZM	3h. 2HZN
3i. 2HZP	3j. 2HZQ	3k. 2HZR	3l. 2HZS	3m. 2HZT	3n. 2HZV

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.4 Oplos van gelyktydige vergelykings

Oplos deur substitusie

Los op deur eliminasie

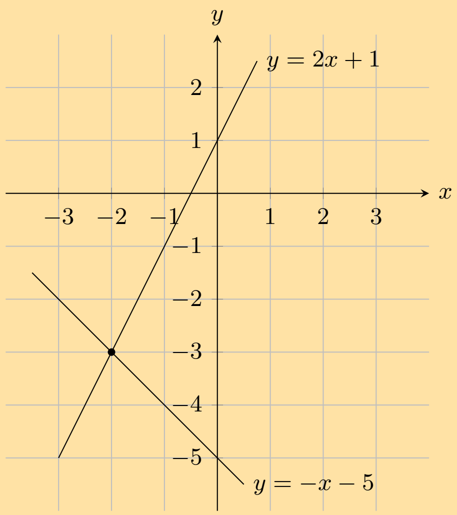
Los grafies op

Hierdie afdeling kan ingesluit word in die hoofstuk oor funksies en grafieke met grafieke van lineêre vergelykings. Voor die aanvang van hierdie afdeling mag dit nodig wees om die plot van grafieke van lineêre vergelykings te hersien met jou leerders.

Dit is ook belangrik dat leerders óf gegewe die grafieke word óf aangemoedig word om akkurate grafieke te teken op grafiekpapier om hulle te help met die grafiese oplossing van gelyktydige vergelykings. Geskikte sagteware kan gebruik word in hierdie afdeling om te verseker dat grafieke korrek is.

Exercise 4 – 3:

1. Kyk na die grafiek hieronder

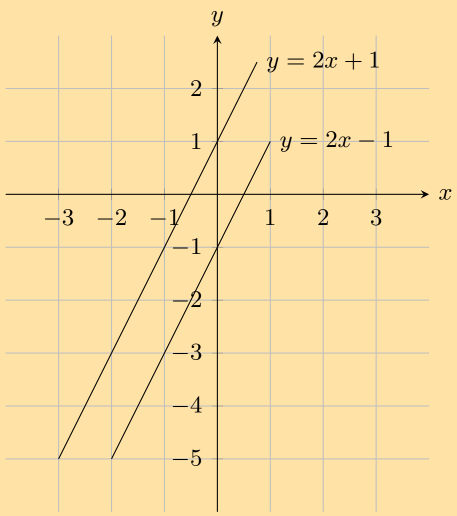


Los die vergelykings $y = 2x + 1$ en $y = -x - 5$ gelyktydig op

Oplossing:

Vanaf die grafiek kan ons sien die lyne sny by $x = -2$ en $y = -3$.

2. Kyk na die grafiek hieronder

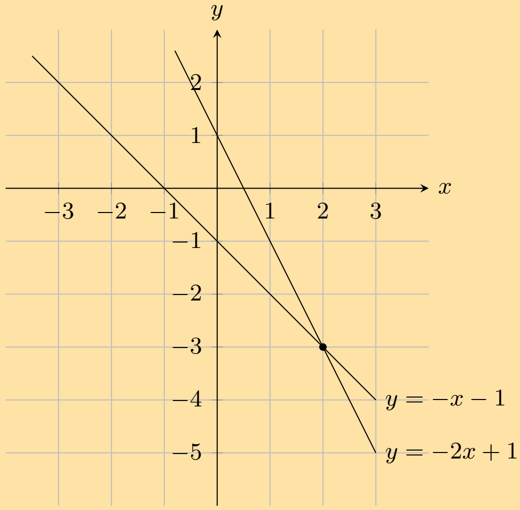


Los die vergelykings $y = 2x - 1$ en $y = 2x + 1$ gelyktydig op

Oplossing:

Die lyne is ewewydig. Dus, daar is geen oplossing nie.

3. Kyk na die grafiek hieronder



Los die vergelykings $y = -2x + 1$ en $y = -x - 1$ gelyktydig op

Oplossing:

Vanaf die grafiek kan ons sien die lyne sny by $x = 2$ en $y = -3$.

4. Los op vir x en y:

 a) $-10x = -1$ en $-4x + 10y = -9$.

 Oplossing:

 Los op vir x:

$$\begin{aligned} -10x &= -1 \\ \therefore x &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

 Substitueer die waarde van x terug in die tweede vergelyking en los op vir y:

$$\begin{aligned} -4x + 10y &= -9 \\ -4\left(\frac{1}{10}\right) + 10y &= -9 \\ \frac{-4}{10} + 10y &= -9 \\ 100y &= -90 + 4 \\ y &= \frac{-86}{100} \\ &= \frac{-43}{50} \end{aligned}$$

 Dus $x = \frac{1}{10}$ en $y = -\frac{43}{50}$.

 b) $3x - 14y = 0$ en $x - 4y + 1 = 0$

 Oplossing:

 Skryf x in terme van y:

$$\begin{aligned} 3x - 14y &= 0 \\ 3x &= 14y \\ x &= \frac{14}{3}y \end{aligned}$$

 Vervang die waarde van x in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} x - 4y + 1 &= 0 \\ \frac{14}{3}y - 4y + 1 &= 0 \\ 14y - 12y + 3 &= 0 \\ 2y &= -3 \\ y &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vervang die waarde van y terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} x &= \frac{14\left(-\frac{3}{2}\right)}{3} \\ &= -7 \end{aligned}$$

Dus $x = -7$ en $y = -\frac{3}{2}$.

c) $x + y = 8$ en $3x + 2y = 21$

Oplossing:

Skryf x in terme van y:

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ x &= 8 - y \end{aligned}$$

Vervang die waarde van x in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 21 \\ 3(8 - y) + 2y &= 21 \\ 24 - 3y + 2y &= 21 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Vervang die waarde van y terug in die eerste vergelyking:

$$x = 5$$

Dus $x = 5$ en $y = 3$.

d) $y = 2x + 1$ en $x + 2y + 3 = 0$

Oplossing:

Skryf y in terme van x:

$$y = 2x + 1$$

Vervang die waarde van y in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3 &= 0 \\ x + 2(2x + 1) + 3 &= 0 \\ x + 4x + 2 + 3 &= 0 \\ 5x &= -5 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Vervang die waarde van x terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} y &= 2(-1) + 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Dus $x = -1$ en $y = -1$.

e) $5x - 4y = 69$ en $2x + 3y = 23$
Oplossing:
Maak x die onderwerp van die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} 5x - 4y &= 69 \\ 5x &= 69 + 4y \\ x &= \frac{69 + 4y}{5} \end{aligned}$$

Vervang die waarde van x in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 23 \\ 2\left(\frac{69 + 4y}{5}\right) + 3y &= 23 \\ 2(69 + 4y) + 3(5)y &= 23(5) \\ 138 + 8y + 15y &= 115 \\ 23y &= -23 \\ \therefore y &= -1 \end{aligned}$$

Vervang die waarde van y terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} x &= \frac{69 + 4y}{5} \\ &= \frac{69 + 4(-1)}{5} \\ &= 13 \end{aligned}$$

Dus $x = 13$ en $y = -1$.

f) $x + 3y = 26$ en $5x + 4y = 75$
Oplossing:
Maak x die onderwerp van die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 26 \\ x &= 26 - 3y \\ x &= \frac{26 - 3y}{1} \end{aligned}$$

Vervang die waarde van x in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 75 \\ 5(26 - 3y) + 4y &= 75 \\ 130 - 15y + 4y &= 75 \\ -11y &= -55 \\ \therefore y &= 5 \end{aligned}$$

Vervang die waarde van y terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} x &= 26 - 3y \\ &= 26 - 3(5) \\ &= 11 \end{aligned}$$

Dus $x = 11$ en $y = 5$.

g) $3x - 4y = 19$ en $2x - 8y = 2$
Oplossing:

As ons die eerste vergelyking met 2 vermenigvuldig dan sal die koëffisiënt van y dieselfde wees in beide vergelykings:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 19 \\ 3(2)x - 4(2)y &= 19(2) \\ 6x - 8y &= 38 \end{aligned}$$

Nou kan ons die tweede vergelyking van die eerste aftrek:

$$\begin{array}{rrcl} & 6x - 8y & = & 38 \\ - & (2x - 8y & = & 2) \\ \hline & 4x + 0 & = & 36 \end{array}$$

Los op vir x:

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{36}{4} \\ &= 9 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van x terug in die eerste vergelyking en los op vir y:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 19 \\ 3(9) - 4y &= 19 \\ \therefore y &= \frac{19 - 3(9)}{-4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dus $x = 9$ en $y = 2$.

h) $\frac{a}{2} + b = 4$ en $\frac{a}{4} - \frac{b}{4} = 1$

Oplossing:

Maak a die onderwerp van die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} + b &= 4 \\ a + 2b &= 8 \\ a &= 8 - 2b \end{aligned}$$

Vervang die waarde van a in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} \frac{a}{4} - \frac{b}{4} &= 1 \\ a - b &= 4 \\ 8 - 2b - b &= 4 \\ 3b &= 4 \\ b &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vervang die waarde van b terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} a &= 8 - 2\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Dus $a = \frac{16}{3}$ en $b = \frac{4}{3}$.

i) $-10x + y = -1$ en $-10x - 2y = 5$.

Oplossing:

As ons die tweede vergelyking van die eerste aftrek dan, kan ons vir y oplos:

$$\begin{array}{rrcr} & -10x + y & = & -1 \\ - & (-10x - 2y & = & 5) \\ \hline & 0 + 3y & = & -6 \end{array}$$

Los op vir y:

$$\begin{aligned} 3y &= -6 \\ \therefore y &= -2 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van y terug in die eerste vergelyking en los op vir x:

$$\begin{aligned} -10x + y &= -1 \\ -10x - 2 &= -1 \\ -10x &= 1 \\ x &= \frac{1}{-10} \end{aligned}$$

Dus $x = \frac{-1}{10}$ en $y = -2$.

j) $-10x - 10y = -2$ en $2x + 3y = 2$

Oplossing:

Maak x die onderwerp van die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} -10x - 10y &= -2 \\ 5x + 5y &= 1 \\ 5x &= 1 - 5y \\ \therefore x &= -y + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Vervang die waarde van x in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ 2\left(-y + \frac{1}{5}\right) + 3y &= 2 \\ -2y + \frac{2}{5} + 3y &= 2 \\ y &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Vervang die waarde van y terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} -10x - 10y &= -2 \\ 5x + 5y &= 1 \\ 5x + 5\left(\frac{8}{5}\right) &= 1 \\ 5x + 8 &= 1 \\ 5x &= 9 \\ x &= \frac{-7}{5} \end{aligned}$$

Dus $x = -\frac{7}{5}$ en $y = \frac{8}{5}$.

k) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$ en $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 11$

Oplossing:
Herrangskik beide vergelykings:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$$
$$y+x=3xy$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=11$$
$$y-x=11xy$$

Tel die twee vergelykings bymekaar:

$$\begin{array}{rccc} & y+x & = & 3xy \\ + & (y-x & = & 11xy) \\ \hline & 2y+0 & = & 14xy \end{array}$$

Los op vir x:

$$\begin{aligned} 2y &= 14xy \\ y &= 7xy \\ 1 &= 7x \\ x &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Vervang die waarde van x terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} y+\frac{1}{7} &= 3\left(\frac{1}{7}\right)y \\ 7y+1 &= 3y \\ 4y &= -1 \\ y &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dus $x=\frac{1}{7}$ en $y=-\frac{1}{4}$.

l) $y=\dfrac{2(x^2+2)-3}{x^2+2}$ en $y=2-\dfrac{3}{x^2+2}$

Oplossing:
Laat

$$\begin{aligned} \frac{2(x^2+2)-3}{x^2+2} &= 2-\frac{3}{x^2+2} \\ 2x^2+4-3 &= 2(x^2+2)-3 \\ 2x^2+1 &= 2x^2+1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Aangesien dit dus waar is vir alle x in die reële getalle, kan x enige reële getalle wees.
Kyk wat gebeur met y wanneer x baie klein of baie groot is:
Die kleinste waarde van x is 0. Wanneer $x=0$, $y=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.
As x baie groot is, dan is die breuk $\dfrac{3}{x^2+2}$ baie klein (dink aan wat gebeur as jy 'n klein getal deur 'n groot getal deel). Dan is $y=2-0=2$.
Hieruit kan ons sien dat $\frac{1}{2}\leq y\leq 2$.
Dus x kan enige reële getal wees, $\frac{1}{2}\leq y<2$.

m) $3a+b=\dfrac{6}{2a}$ en $3a^2=3-ab$

Oplossing:

Let op dat $a \neq 0$
Kyk na die eerste vergelyking

$$\begin{aligned} 3a + b &= \frac{6}{2a} \\ 6a^2 + 2ab &= 6 \\ 6a^2 &= 6 - 2ab \\ 3a^2 &= 3 - ab \end{aligned}$$

Let op dat dit dieselfde is as die tweede vergelyking
a en b kan enige reële getal wees behalwe 0.

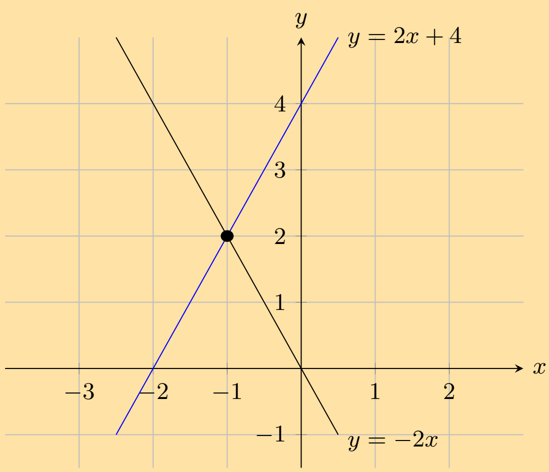
5. Los grafies op en kontroleer jou antwoord algebraïes.

   a) $y + 2x = 0$ en $y - 2x - 4 = 0$
   Oplossing:
   Skryf eers die vergelykings in standaardvorm:

$$\begin{aligned} y + 2x &= 0 \\ y &= -2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 2x - 4 &= 0 \\ y &= 2x + 4 \end{aligned}$$

Trek die grafiek:



Die grafieke sny by $(-1; 2)$, dus $x = -1$ en $y = 2$.
As ons dit algebraïes kontroleer, kry ons:

$$y = -2x$$

Vervang die waarde van y in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} y - 2x - 4 &= 0 \\ -2x - 2x - 4 &= 0 \\ -4x &= 4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van x terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} y &= -2(-1) \\ y &= 2 \end{aligned}$$

b) $x + 2y = 1$ en $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

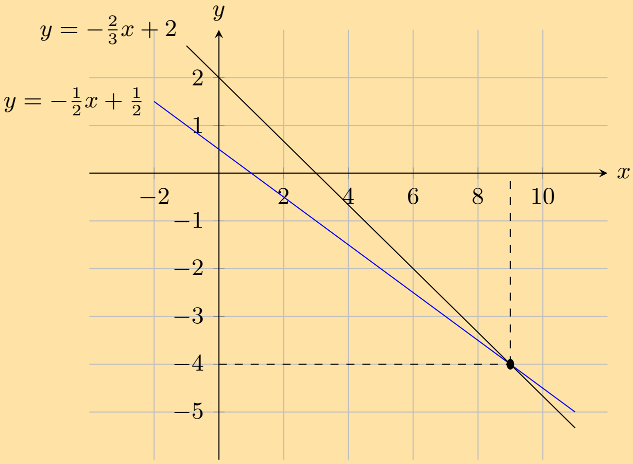
Oplossing:

Skryf eers die vergelykings in standaardvorm:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2y &= -x + 1 \\ y &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} &= 1 \\ y &= -\frac{2}{3}x + 2 \end{aligned}$$

Trek die grafiek:



Die grafieke sny by $(9; -4)$, dus $x = 9$ en $y = -4$.

As ons dit algebraïes kontroleer, kry ons

$$x = -2y + 1$$

Vervang die waarde van x in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} \frac{-2y + 1}{3} + \frac{y}{2} &= 1 \\ -4y + 2 + 3y &= 6 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van y terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} x + 2(-4) &= 1 \\ x - 8 &= 1 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

c) $y - 2 = 6x$ en $y - x = -3$

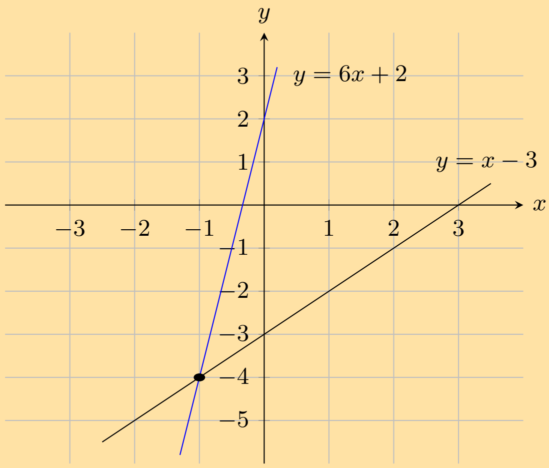
Oplossing:

Skryf eers die vergelyking in standaardvorm:

$$\begin{aligned} y - 2 &= 6x \\ y &= 6x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - x &= -3 \\ y &= x - 3 \end{aligned}$$

Trek die grafiek:



Die grafieke sny by $(-1;-4)$, dus $x = -1$ en $y = -4$.
As ons dit algebraïes kontroleer, kry ons:

$$y = 6x + 2$$

Vervang die waarde van y in die eerste vergelyking in:

$$\begin{aligned} 6x + 2 &= x - 3 \\ 5x &= -5 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van x terug in die eerste vergelyking in:

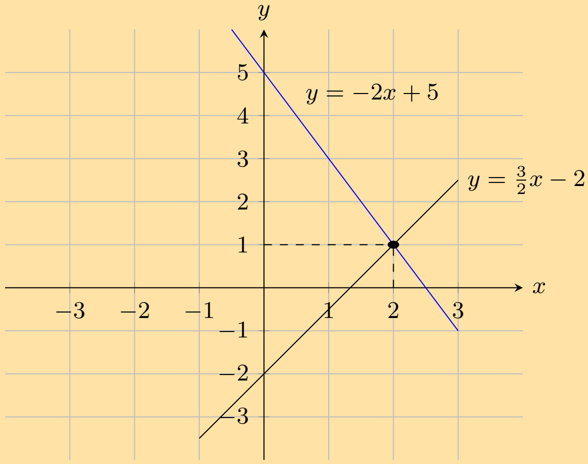
$$\begin{aligned} y &= 6(-1) + 2 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

d) $2x + y = 5$ en $3x - 2y = 4$
Oplossing:
Skryf eers die vergelykings in standaardvorm:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ y &= -2x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 2y &= 3x - 4 \\ y &= \frac{3}{2}x - 2 \end{aligned}$$

Trek die grafiek:



Die grafieke sny by $(2; 1)$, dus $x = 2$ en $y = 1$.
As ons dit algebraïes kontroleer, kry ons

$$y = -2x + 5$$

Vervang die waarde van y in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} -2x + 5 &= \frac{3}{2}x - 2 \\ -4x + 10 &= 3x - 4 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

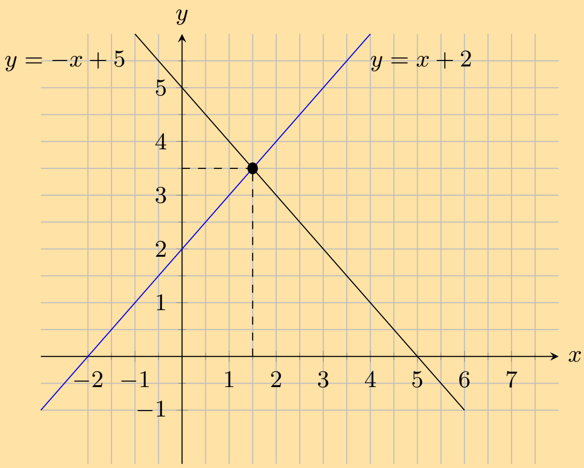
Substitueer die waarde van x terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} x &= -2(2) + 5 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

e) $5 = x + y$ en $x = y - 2$
Oplossing:
Skryf eers die vergelykings in standaardvorm:

$$\begin{aligned} 5 &= x + y \\ y &= -x + 5 \\ \\ x &= y - 2 \\ y &= x + 2 \end{aligned}$$

Trek die grafiek:



Die grafieke sny by (1,5; 3,5), dus $x = 1{,}5$ en $y = 3{,}5$.
As ons dit algebraïes kontroleer, kry ons

$$y = -x + 5$$

Vervang die waarde van y in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} x &= -x + 5 - 2 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van x terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{3}{2} + y \\ y &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2HZX	2. 2HZY	3. 2HZZ	4a. 2J2C	4b. 2J22	4c. 2J23
4d. 2J24	4e. 2J25	4f. 2J26	4g. 2J27	4h. 2J28	4i. 2J29
4j. 2J2B	4k. 2J2D	4l. 2J2F	4m. 2J2G	5a. 2J2K	5b. 2J2H
5c. 2J2M	5d. 2J2N	5e. 2J2J			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.5 Woordprobleme

Probleemoplossing strategie

Exercise 4 – 4:

1. Twee straalvliegtuie vlieg na mekaar toe vanaf verskillende lughawens wat 1200 km van mekaar is. Een vliegtuig vlieg teen 250 km·h^{-1} en die ander vlieg teen 350 km·h^{-1}. As hulle op dieselfde tyd opstyg, hoe lank sal dit vat vir die twee vliegtuie om by mekaar verby te vlieg?
Oplossing:

Gestel afstand $d_1 = 1200 - x$ km en afstand $d_2 = x$ km.
Spoed $s_1 = 250$ km·h^{-1} en spoed $s_2 = 350$ km·h^{-1}.
Tyd word bereken deur afstand te deel deur spoed.

$$\text{tyd } (t) = \frac{\text{afstand}}{\text{spoed}}$$

Wanneer die vliegtuie by mekaar verbyvlieg:

$$\begin{aligned} \frac{1200 - x}{250} &= \frac{x}{350} \\ 350(1200 - x) &= 250x \\ 420\ 000 - 350x &= 250x \\ 600x &= 420\ 000 \\ x &= 700 \text{ km} \end{aligned}$$

Nou dat ons die afstand het wat die tweede vliegtuig afgelê het teen die tyd wat dit by die eerste vliegtuig verbygaan, kan ons die tyd bereken:

$$\begin{aligned} t &= \frac{700 \text{ km}}{350 \text{ km·h}^{-1}} \\ &= 2 \text{ h} \end{aligned}$$

Dit sal die straalvliegtuie 2 uur neem om by mekaar verby te vlieg.

2. Twee bote beweeg na mekaar toe van hawens wat 144 km van mekaar af is. Een boot beweeg teen 63 km·h^{-1} en die ander boot teen 81 km·h^{-1}. As beide bote hulle reis op dieselfde tyd begin, hoe lank sal dit neem voor hulle by mekaar verbyvaar?

   Oplossing:

   Let op dat die som van die afstande vir die twee bote wanneer hulle mekaar ontmoet, gelyk moet wees aan die totale afstand: $d_1 + d_2 = d_{\text{totaal}} \longrightarrow d_1 + d_2 = 144$ km.
   Die vraag is oor afstand, spoed en tyd. Die vergelyking wat hierdie waardes verbind, is

   $$\text{spoed} = \frac{\text{afstand}}{\text{tyd}} \quad \text{- of -} \quad \text{afstand} = \text{spoed} \times \text{tyd}$$

   Jy wil weet hoeveel tyd dit sal neem vir die bote om te ontmoet - gestel dus die tyd geneem sal t wees. Dan kan jy ’n uitdrukking skryf vir die afstand wat elke boot afgelê het:

   $$\begin{aligned} \text{Vir boot 1:} \quad d_1 &= s_1 t \\ &= 63t \\ \text{Vir boot 2:} \quad d_2 &= s_2 t \\ &= 81t \end{aligned}$$

   Nou kan ons die twee uitdrukkings vir die afstande in die uitdrukking vir die totale afstand vervang:

   $$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 144 \\ (63t) + (81t) &= 144 \\ 144t &= 144 \\ \therefore t &= \frac{144}{144} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Die bote sal mekaar na 1 uur ontmoet.

3. Zwelibanzi en Jessica is vriende. Zwelibanzi neem Jessica se tegnologie antwoordstel en wil nie vir haar sê wat haar punt is nie. Hy weet sy hou nie van woordprobleme nie, dus besluit hy om haar te terg. Zwelibanzi sê: “Ek het 12 punte meer as jy en die som van albei van ons se punte saam is gelyk aan 148. Wat is ons punte”

   Oplossing:

   Gestel Zwelibanzi se punte is z en laat Jessica se punte j wees. Dan

   $$\begin{aligned} z &= j + 12 \\ z + j &= 148 \end{aligned}$$

Vervang die eerste vergelyking in die tweede vergelyking in en los op:

$$\begin{aligned}
z + j &= 148 \\
(j + 12) + j &= 148 \\
2j &= 148 - 12 \\
\therefore j &= \frac{136}{2} \\
&= 68
\end{aligned}$$

Vervanging van hierdie waarde terug in die eerste vergelyking gee:

$$\begin{aligned}
z &= j + 12 \\
&= 68 + 12 \\
&= 80
\end{aligned}$$

Die studente het die volgende punte behaal: Zwelibanzi het 80 punte en Jessica 68 punte.

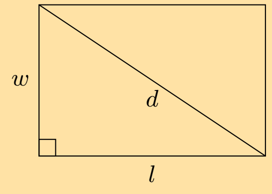
4. Kadesh koop 20 hemde teen 'n totale koste van R 980. As 'n groot hemp R 50 kos en 'n kleiner hemp kos R 40, hoeveel van elke grootte het hy gekoop?
   Oplossing:
   Gestel die aantal groot hemde is x en die aantal kleiner hemde is $20 - x$.
   Vervolgens let ons die volgende op:
   - Hy koop x groot hemde vir R 50
   - Hy koop $20 - x$ klein hemde vir R 40
   - Hy spandeer in totaal R 980

   Ons kan die koste voorstel as:

$$\begin{aligned}
50x + 40(20 - x) &= 980 \\
50x + 800 - 40x &= 980 \\
10x &= 180 \\
x &= 18
\end{aligned}$$

   Dus Kadesh koop 18 groot hemde en 2 kleiner hemde.

5. Die diagonaal of hoeklyn van 'n reghoek is 25 cm meer sy breedte. Die lengte van die reghoek is 17 cm meer as sy breedte. Wat is die afmetings van die reghoek?
   Oplossing:
   Laat die lengte $= l$, die breedte $= w$ en die diagonaal $= d$. $\therefore d = w + 25$ en $l = w + 17$.



   Met die stelling van Pythgoras:

$$\begin{aligned}
d^2 &= l^2 + w^2 \\
\therefore w^2 &= d^2 - l^2 \\
&= (w + 25)^2 - (w + 17)^2 \\
&= w^2 + 50w + 625 - w^2 - 34w - 289 \\
\therefore w^2 - 16w - 336 &= 0 \\
(w + 12)(w - 28) &= 0 \\
w = -12 \text{ of } w &= 28
\end{aligned}$$

   Die breedte moet positief wees, dus: breedte $w = 28$ cm, lengte $l = (w + 17) = 45$ cm en diagonaal $d = (w + 25) = 53$ cm.

6. Die som van 27 en 12 is 73 meer as 'n onbekende getal. Vind die onbekende getal.

Oplossing:

Gestel die onbekende getal is $= x$.

$$\begin{aligned} 27 + 12 &= x + 73 \\ 39 &= x + 73 \\ x &= -34 \end{aligned}$$

Die onbekende getal is -34.

7. 'n Groep vriende koop middagete. Hier is 'n paar feite oor hulle ete:
   - 'n melkskommel kos R 7 meer as 'n pannekoek
   - die groep koop 8 melkskommels en 2 pannekoeke
   - die totale koste vir die middagete is R 326

   Bepaal die individuele pryse vir die verskillende items.

   Oplossing:

   Laat 'n melkskommel m wees en 'n pannekoek p wees. Van die gegewe inligting ons het die volgende vergelykings:

$$\begin{aligned} m &= p + 7 \\ 8m + 2p &= 326 \end{aligned}$$

   Substitueer die eerste vergelyking in die tweede vergelyking en los op vir p:

$$\begin{aligned} 8m + 2p &= 326 \\ 8(p + 7) + 2p &= 326 \\ 8p + 56 + 2p &= 326 \\ 10p &= 326 - 56 \\ \therefore p &= \frac{270}{10} \\ &= 27 \end{aligned}$$

   Substitueer die waarde van p in die eerste vergelyking en los op vir m:

$$\begin{aligned} m &= p + 7 \\ &= 27 + 7 \\ &= 34 \end{aligned}$$

   Dus 'n melkskommel kos R 34 en 'n pannekoek kos R 27.

8. Die twee kleiner hoeke in 'n reghoekige driehoek is in die verhouding van $1 : 2$. Wat is die groottes van die twee hoeke?

   Oplossing:

   Gestel x is die kleinste hoek. Dus die ander hoek is $2x$.

   Ons weet dat die derde hoek 90° is.

$$\begin{aligned} x + 2x + 90° &= 180° \text{ (som van die hoeke van 'n driehoek)} \\ 3x &= 90° \\ x &= 30° \end{aligned}$$

   Die groottes van die hoeke is 30° en 60°.

9. Die lengte van 'n reghoek is twee maal sy breedte. As die oppervlakte 128 cm^2 is, bepaal die lengte en die breedte.

   Oplossing:

   Ons word gegee die lengte is $l = 2b$ en $A = l \times b = 128$.

   Substitueer die eerste vergelyking in die tweede vergelyking en los op vir b:

$$
\begin{aligned}
2b \times b &= 128 \\
2b^2 &= 128 \\
b^2 &= 64 \\
b &= \pm 8
\end{aligned}
$$

Maar breedte moet positief wees, dus $b = 8$.
Substitueer hierdie waarde in die eerste vergelyking en los op vir l:

$$
\begin{aligned}
l &= 2b \\
&= 2(8) \\
&= 16
\end{aligned}
$$

Dus breedte is 8 cm, en lengte is 16 cm.

10. As 4 maal 'n getal vermeerder word met 6, is die resultaat 15 minder as die kwadraat van die getal. Vind die getal.
Oplossing:
Gestel die getal is $= x$. Die vergelyking wat die inligting voorstel is:

$$
\begin{aligned}
4x + 6 &= x^2 - 15 \\
x^2 - 4x - 21 &= 0 \\
(x-7)(x+3) &= 0 \\
x &= 7 \text{ of } x = -3
\end{aligned}
$$

Ons weet nie of die getal positief of negatief is nie. Dus is die getal 7 of -3.

11. Die lengte van 'n reghoek is 2 cm meer as die breedte van die reghoek. Die omtrek van die reghoek is 20 cm. Vind die lengte en die breedte van die reghoek.
Oplossing:
Laat lengte $l = x$, breedte $b = x - 2$ en omtrek $= o$.

$$
\begin{aligned}
o &= 2l + 2b \\
&= 2x + 2(x - 2) \\
20 &= 2x + 2x - 4 \\
4x &= 24 \\
x &= 6
\end{aligned}
$$

$l = 6$ cm en $b = l - 2 = 4$ cm.
lengte: 6 cm, breedte: 4 cm

12. Stephen het 1 liter van 'n mengsel wat 69% sout bevat. Hoeveel water moet Stephen byvoeg sodat die mengsel 50% sout sal bevat? Skryf jou antwoord as 'n breukdeel van 'n liter.
Oplossing:
Die nuwe volume (x) van die mengsel moet 50% sout bevat, dus:

$$
\begin{aligned}
0{,}69 &= 0{,}5x \\
\therefore x &= \frac{0{,}69}{0{,}5} \\
x &= 2(0{,}69) \\
&= 1{,}38
\end{aligned}
$$

Die volume van die nuwe mengsel is 1,38 liter. Die hoeveelheid water (y) wat bygevoeg moet word, is:

$$
\begin{aligned}
y &= x - 1{,}00 \\
&= 1{,}38 - 1{,}00 \\
&= 0{,}38
\end{aligned}
$$

Dus 0,38 liter water moet bygevoeg word. Om dit te skryf as 'n breuk van 'n liter: $0{,}38 = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$ liter
Dus $\frac{19}{50}$ liter moet bygevoeg word.

13. Die som van twee opeenvolgende onewe getalle is 20 en hulle verskil is 2. Vind die twee getalle.
Oplossing:
Laat die getalle x en y wees.
Volgende die twee vergelykings beskryf die beperkings:

$$\begin{aligned} x + y &= 20 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

Tel die eerste vergelyking by die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 2x &= 22 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Substitueer in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} 11 - y &= 2 \\ y &= 9 \end{aligned}$$

Dus die twee getalle is 9 en 11.

14. Die noemer van 'n breuk is 1 meer as die teller. Die som van die breuk en sy resiprook is $\frac{5}{2}$. Vind die breuk.
Oplossing:
Laat die teller x wees. Dus is die noemer $x + 1$.

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{5}{2}$$

Los op vir x:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} &= \frac{5}{2} \\ 2x^2 + 2(x+1)^2 &= 5x(x+1) \\ 2x^2 + 2(x^2 + 2x + 1) &= 5x^2 + 5x \\ 2x^2 + 2x^2 + 4x + 2 &= 5x^2 + 5x \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x-1)(x+2) &= 0 \\ x &= 1 \text{ of } x = -2 \end{aligned}$$

Ons kan die breuk $\frac{1}{2}$ of $\frac{-2}{-1}$ wees. Vir die tweede oplossing kan ons die breuk vereenvoudig na 2 en in hierdie geval die noemer nie 1 minder as die teller is nie.
Dus is die breuk $\frac{1}{2}$.

15. Masindi is 21 jaar ouer as haar dogter, Mulivhu. Die som van hulle ouderdomme is 37. Hoe oud is Mulivhu?
Oplossing:
Gestel Mulivhu is x jaar oud. Dus Masinbi is $x + 21$ jaar oud.

$$\begin{aligned} x + x + 21 &= 37 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Mulivhu is 8 jaar oud.

16. Tshamano is nou vyf maal so oud as sy seun Murunwa. Oor sewe jaar sal Tshamano drie maal so oud soos sy seun wees. Bepaal hoe oud is hulle nou.
Oplossing:
Gestel Murunwa is x jaar oud. Dus Tshamano is $5x$ jaar oud.
Oor 7 jaar sal Murunwa $x + 7$ jaar oud wees. Tshamanos sal $5x + 7$ oud wees.

$$
\begin{aligned}
5x + 7 &= 3(x + 7) \\
5x + 7 &= 3x + 21 \\
2x &= 14 \\
x &= 7
\end{aligned}
$$

Dus, Murunwa is nou 7 jaar oud en Tshamano is 35 jaar oud.

17. Wanneer jy een bytel by drie maal 'n getal, is die antwoord gelyk aan die getal. Wat is hierdie getal?
Oplossing:
Laat die getal x wees. Dan:

$$
\begin{aligned}
3x + 1 &= x \\
2x &= -1 \\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

18. As 'n derde van die som van 'n getal en een ekwivalent is aan 'n breuk, waarvan die noemer dieselfde is as die getal en die teller gelyk is aan twee, wat is die getal?
Oplossing:
Laat die getal x wees. Dan:

$$
\frac{1}{3}(x + 1) = \frac{2}{x}
$$

Herrangskik totdat ons 'n drieterm het en los op vir x:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}(x + 1) &= \frac{2}{x} \\
x + 1 &= \frac{6}{x} \\
x^2 + x &= 6 \\
x^2 + x - 6 &= 0 \\
(x - 2)(x + 3) &= 0 \\
\therefore x &= 2 \text{ of } x = -3
\end{aligned}
$$

19. 'n Winkeleienaar koop 40 sakke rys en mieliemeel wat in totaal R 5250 werd is. As die rys R 150 per sak kos en die mieliemeel kos R 100 per sak, hoeveel sakke mieliemeel het hy gekoop?
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 40 \qquad (1) \\
150x + 100y &= 5250 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{beskou } (1) \\
x &= 40 - y \qquad (3) \\
&\text{stel } (3) \text{ in } (2) \\
150(40 - y) + 100y &= 5250 \\
-150y + 100y &= 5250 - 6000 \\
-50y &= -750 \\
y &= 15 \\
&\therefore 15 \text{ sakke mieliemeel is gekoop}
\end{aligned}
$$

20. Daar is 100 koekies blou en groen seep in 'n boks. Die blou seep weeg 50 g per koekie seep en die groen seep weeg 40 g per koekie seep. Die totale massa van die seep in die boks is 4,66 kg. Hoeveel koekies groen seep is daar in die boks?
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 100 \ (1) \\
50x + 40y &= 4660 \ (2) \\
\\
&\text{Beskou } (1) \\
x &= 100 - y \ (3) \\
\text{stel } (3) \text{ in } (2) \\
50(100 - y) + 40y &= 4660 \\
-50y + 40y &= 4660 - 5000 \\
-10y &= -340 \\
y &= 34 \\
&\therefore 34 \text{ koekies groen seep is gekoop}
\end{aligned}
$$

21. Lisa het 170 krale. Sy het blou, rooi en pers krale wat onderskeidelik 13 g, 4 g en 8 g per kraal weeg. As daar tweekeer soveel rooi krale as blou krale is en as al die krale saam 1,216 kg weeg, hoeveel krale van elke tipe het Lisa?
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 170 \qquad (1) \\
13x + 4y + 8z &= 1216 \qquad (2) \\
y &= 2x \qquad (3) \\
\\
(3) \text{ in } (1) \\
x + (2x) + z &= 170 \\
3x + z &= 170 \\
z &= 170 - 3x \qquad (4) \\
(3) \text{ in } \quad (2) \\
13x + 4(2x) + 8z &= 1216 \\
21x + 8z &= 1216 \qquad (5) \\
(4) \text{ in } (5) \\
21x + 8(170 - 3x) &= 1216 \\
21x + 1360 - 24x &= 1216 \\
-3x &= -144 \\
x &= 48 \\
y &= 2x = 96 \\
z &= 170 - 3x = 26 \\
\\
&\therefore \text{Lisa het } 48 \text{ blou krale, } 96 \text{ rooi krale en } 36 \text{ pers krale}
\end{aligned}
$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2J2Q	2. 2J2R	3. 2J2S	4. 2J2T	5. 2J2V	6. 2J2W	7. 2J2X	8. 2J2Y
9. 2J2Z	10. 2J32	11. 2J33	12. 2J34	13. 2J35	14. 2J36	15. 2J37	16. 2J38
17. 2J39	18. 2J3B	19. 2J3C	20. 2J3D	21. 2J3F			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.6 Vergelykings met letterkoëffisiënte

Exercise 4 – 5:

1. Los op vir x in die volgende formule: $2x + 4y = 2$.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2x + 4y &= 2 \\
2x &= 2 - 4y \\
\frac{1}{2}(2x) &= (2 - 4y)\frac{1}{2} \\
x &= 1 - 2y
\end{aligned}
$$

2. Maak a die onderwerp van die formule: $s = ut + \frac{1}{2}at^2$.
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
s &= ut + \frac{1}{2}a^2 \\
s - ut &= \frac{1}{2}at^2 \\
2s - 2ut &= at^2 \\
\frac{2(s - ut)}{t^2} &= a
\end{aligned}
$$

   Let op die beperking: $t \neq 0$
3. Los op vir n: $pV = nRT$.
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
pV &= nRT \\
\frac{pV}{RT} &= n
\end{aligned}
$$

   Let op die beperkings: $R \neq 0$, $T \neq 0$
4. Maak x die onderwerp van die formule: $\frac{1}{b} + \frac{2b}{x} = 2$.
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{b} + \frac{2b}{x} &= 2 \\
\frac{x + b(2b)}{bx} &= 2 \\
x + 2b^2 &= 2bx \\
x - 2bx &= -2b^2 \\
x(1 - 2b) &= -2b^2 \\
x &= \frac{-2b^2}{1 - 2b}
\end{aligned}
$$

   Let op die beperking: $1 \neq 2b$
5. Los op vir r : $V = \pi r^2 h$.
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi r^2 h \\
\frac{V}{\pi h} &= r^2 \\
\pm\sqrt{\frac{V}{\pi h}} &= r
\end{aligned}
$$

   Let op die beperking: $h \neq 0$
6. Los op vir h: $E = \frac{hc}{\lambda}$.
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{hc}{\lambda} \\
E\lambda &= hc \\
\frac{E\lambda}{c} &= h
\end{aligned}
$$

Let op die beperking: $c \neq 0$

7. Los op vir h: $A = 2\pi rh + 2\pi r$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
A &= 2\pi rh + 2\pi r \\
A - 2\pi r &= 2\pi rh \\
\frac{A - 2\pi r}{2\pi r} &= h
\end{aligned}
$$

Let op die beperking: $r \neq 0$

8. Maak λ die onderwerp van die formule: $t = \dfrac{D}{f\lambda}$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{D}{f\lambda} \\
t(\lambda) &= \frac{D}{f} \\
\lambda &= \frac{D}{tf}
\end{aligned}
$$

Let op die beperkings: $t \neq 0$, $f \neq 0$

9. Los op vir m: $E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
E &= mgh + \frac{1}{2}mv^2 \\
E &= m\left(gh + \frac{1}{2}v^2\right) \\
\frac{E}{gh + \frac{1}{2}v^2} &= m
\end{aligned}
$$

Let op die beperking: $gh + \frac{1}{2}v^2 \neq 0$

10. Los op vir x: $x^2 + x(a+b) + ab = 0$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x^2 + x(a+b) + ab &= 0 \\
x^2 + xa + xb + ab &= 0 \\
(x+a)(x+b) &= 0 \\
x &= -a \text{ of } x = -b
\end{aligned}
$$

11. Los op vir b: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
c^2 &= a^2 + b^2 \\
c^2 - a^2 &= b^2 \\
b &= \pm\sqrt{c^2 - a^2}
\end{aligned}
$$

12. Maak U die onderwerp van die formule: $\frac{1}{V} = \frac{1}{U} + \frac{1}{W}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} &= \frac{1}{U} + \frac{1}{W} \\ \frac{UW}{UVW} &= \frac{VW}{UVW} + \frac{UV}{UVW} \\ UW &= VW + UV \\ UW - UV &= VW \\ U &= \frac{VW}{W-V} \end{aligned}$$

Let op die beperking: $W \neq V$

13. Los op vir r: $A = \pi R^2 - \pi r^2$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 - \pi r^2 \\ A - \pi R^2 &= \pi r^2 \\ \frac{A - \pi R^2}{\pi} &= r^2 \\ r &= \pm\sqrt{\frac{A - \pi R^2}{\pi}} \end{aligned}$$

14. $F = \frac{9}{5}C + 32°$ is die formule vir die omskakeling van temperatuur in grade Celsius na grade Fahrenheit. Lei 'n formule af vir die omskakeling van grade Fahrenheit na grade Celcius.

Oplossing:

$$\begin{aligned} F &= \frac{9}{5}C + 32° \\ F - 32° &= \frac{9}{5}C \\ 5(F - 32°) &= 9C \\ \frac{5(F - 32°)}{9} &= C \end{aligned}$$

Om grade Fahrenheit om te skakel na grade Celsius, gebruik ons: $C = \frac{5}{9}(F - 32°)$

15. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ is die formule vir die bepaling van die volume van 'n sokkerbal. Druk die radius uit in terme van die volume.

Oplossing:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \frac{3}{4}V &= \pi r^3 \\ \frac{\frac{3}{4}V}{\pi} &= r^3 \\ \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{4}V}{\pi}} &= r \end{aligned}$$

Dus is die radius uitgedruk in terme van die volume : $r = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{4}V}{\pi}}$

16. Los op vir x in $x^2 - ax - 3x = 4 + a$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
x^2 - ax - 3x &= 4 + a \\
x^2 - ax - 3x + a + 4 &= 0 \\
x^2 - x(a+3) + (a+4) &= 0 \\
(x+1)(x-(a+4)) &= 0 \\
\therefore x &= a + 4 \text{ of } x = -1
\end{aligned}$$

17. Los op vir x in: $ax^2 - 4a + bx^2 - 4b = 0$

    Oplossing:

$$\begin{aligned}
ax^2 - 4a + bx^2 - 4b &= 0 \\
a(x^2 - 4) + b(x^2 - 4) &= 0 \\
(a+b)(x^2 - 4) &= 0 \\
(a+b)(x-2)(x+2) &= 0 \\
\therefore x &= 2 \text{ of } x = -2
\end{aligned}$$

18. Los op vir x in $v^2 = u^2 + 2ax$ as $v = 2$, $u = 0{,}3$, $a = 0{,}5$

    Oplossing:

$$\begin{aligned}
v^2 &= u^2 + 2ax \\
2ax &= v^2 - u^2 \\
x &= \frac{v^2 - u^2}{2a} \\
x &= \frac{2^2 - 0{,}3^2}{2(0{,}5)} \\
x &= 3{,}91
\end{aligned}$$

19. Los op vir u in $f' = f\dfrac{v}{v-u}$ as $v = 13$, $f = 40$, $f' = 50$

    Oplossing:

$$\begin{aligned}
f' &= f\frac{v}{v-u} \\
f'(v-u) &= fv \\
v - u &= \frac{fv}{f'} \\
-u &= \frac{fv}{f'} - v \\
u &= v - \frac{fv}{f'} \\
u &= 13 - \frac{40(13)}{50} \\
u &= 2{,}6
\end{aligned}$$

20. Los op vir h in $I = \dfrac{bh^2}{12}$ as $b = 18$, $I = 384$

    Oplossing:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{bh^2}{12} \\
h^2 &= \frac{12I}{b} \\
h &= \pm\sqrt{\frac{12I}{b}} \\
h &= \pm\sqrt{\frac{12(384)}{18}} \\
h &= \pm 16
\end{aligned}$$

21. Los op vir r_2 in $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ as $R = \frac{3}{2}$, $r_1 = 2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{r_1 - R}{Rr_1} \\ Rr_1 &= r_2(r_1 - R) \\ \frac{Rr_1}{r_1 - R} &= r_2 \\ r_2 &= \frac{\frac{3}{2} \times 2}{2 - \frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{\frac{1}{2}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2J3H	2. 2J3J	3. 2J3K	4. 2J3M	5. 2J3N	6. 2J3P
7. 2J3Q	8. 2J3R	9. 2J3S	10. 2J3T	11. 2J3V	12. 2J3W
13. 2J3X	14. 2J3Y	15. 2J3Z	16. 2J42	17. 2J43	18. 2J44
19. 2J45	20. 2J46	21. 2J47			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

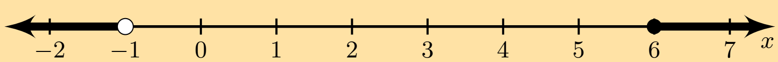
4.7 Los lineêre ongelykhede op

Intervalnotasie

Exercise 4 – 6:

1. Kyk na die getallelyn en skryf die ongelykheid neer wat dit voorstel.

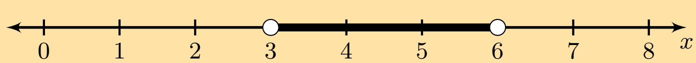
a)



Oplossing:

$x < -1$ en $x \geq 6; x \in \mathbb{R}$

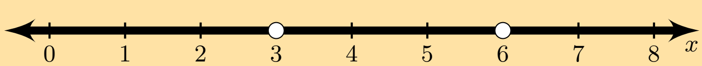
b)



Oplossing:

$3 < x < 6; x \in \mathbb{R}$

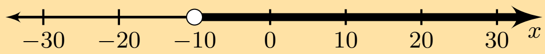
c)



Oplossing:

$x \neq 3; x \neq 6; x \in \mathbb{R}$

d)



Oplossing:

$x > -10; x \in \mathbb{R}$

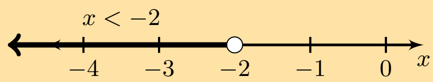
2. Los op vir x en stel die antwoord voor op 'n getallelyn en in intervalnotasie.

a) $3x + 4 > 5x + 8$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 3x + 4 &> 5x + 8 \\ 3x - 5x &> 8 - 4 \\ -2x &> 4 \\ 2x &< -4 \\ x &< -2 \end{aligned}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



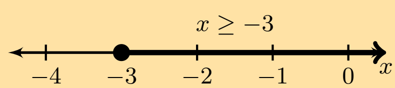
In intervalnotasie: $(-\infty; -2)$

b) $3(x - 1) - 2 \leq 6x + 4$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 3(x - 1) - 2 &\leq 6x + 4 \\ 3x - 5 &\leq 6x + 4 \\ 3x - 6x &\leq 4 + 5 \\ -3x &\leq 9 \\ x &\geq -\frac{9}{3} \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



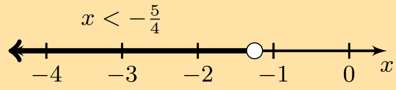
In intervalnotasie: $[-3; \infty)$

c) $\frac{x - 7}{3} > \frac{2x - 3}{2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{x - 7}{3} &> \frac{2x - 3}{2} \\ 2(x - 7) &> 3(2x - 3) \\ 2x - 14 &> 6x - 9 \\ -4x &> 5 \\ x &< -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



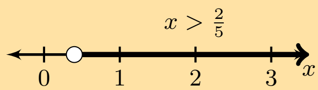
In intervalnotasie: $(-\infty; -\frac{5}{4})$

d) $-4(x-1) < x+2$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
-4(x-1) &< x+2 \\
-4x+4 &< x+2 \\
-5x &< -2 \\
x &> \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



In intervalnotasie: $(\frac{2}{5}; \infty)$

e) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(x-1) \geq \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(x-1) &\geq \frac{5}{6}x - \frac{1}{3} \\
\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} &\geq \frac{5}{6}x - \frac{1}{3} \\
\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - \frac{5}{6}x &\geq \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\
\frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x - \frac{5}{6}x &\geq 0 \\
0x &\geq 0
\end{aligned}$$

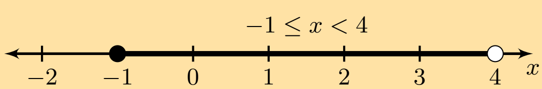
Die ongelykheid is waar vir alle reële waardes van x.

f) $-2 \leq x-1 < 3$

Oplossing:

$$\begin{array}{ccccc}
-2 & \leq & x-1 & < & 3 \\
-1 & \leq & x & < & 4
\end{array}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



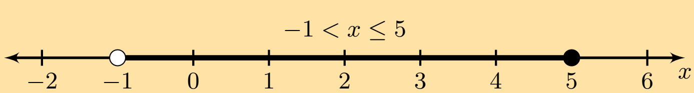
In intervalnotasie: $[-1; 4)$

g) $-5 < 2x-3 \leq 7$

Oplossing:

$$\begin{array}{ccccc}
-5 & < & 2x-3 & \leq & 7 \\
-2 & < & 2x & \leq & 10 \\
-1 & < & x & \leq & 5
\end{array}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



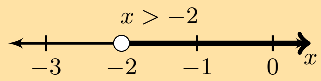
In intervalnotasie: $(-1;5]$

h) $7(3x+2)-5(2x-3)>7$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 7(3x+2)-5(2x-3)&>7\\ 21x+14-10x+15&>7\\ 11x&>-22\\ x&>-2 \end{aligned}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



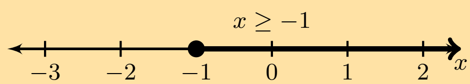
In intervalnotasie: $(-2;\infty)$

i) $\dfrac{5x-1}{-6}\geq\dfrac{1-2x}{3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{5x-1}{-6}&\geq\frac{1-2x}{3}\\ 5x-1&\geq-2(1-2x)\\ 5x-1&\geq-2+4x\\ 5x-4x&\geq-1\\ x&\geq-1 \end{aligned}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



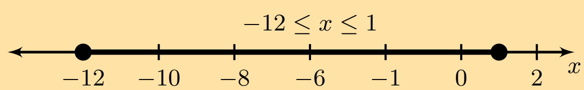
In intervalnotasie: $[-1;\infty)$

j) $3\leq4-x\leq16$

Oplossing:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \leq & 4-x & \leq & 16\\ -1 & \leq & -x & \leq & 12\\ 1 & \geq & x & \geq & -12 \end{array}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



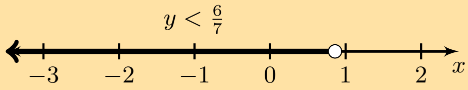
In intervalnotasie: $[1;12]$

k) $\dfrac{-7y}{3}-5>-7$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{-7y}{3}-5&>-7\\ -7y-15&>-21\\ -7y&>-6\\ y&<\frac{6}{7} \end{aligned}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



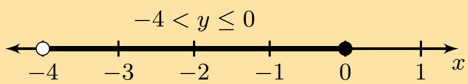
In intervalnotasie: $(-\infty; \frac{6}{7})$

l) $1 \leq 1 - 2y < 9$

Oplossing:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & 1-2y & < & 9 \\ 0 & \leq & -2y & < & 8 \\ 0 & \geq & y & > & -4 \\ -4 & < & y & \leq & 0 \end{array}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



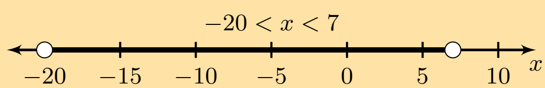
In intervalnotasie: $(-4; 0]$

m) $-2 < \dfrac{x-1}{-3} < 7$

Oplossing:

$$\begin{array}{ccccc} -2 & < & \dfrac{x-1}{-3} & < & 7 \\ 6 & > & x-1 & > & -21 \\ 7 & > & x & > & -20 \\ -20 & < & x & < & 7 \end{array}$$

Voorgestel op 'n getallelyn:



In intervalnotasie: $(-20; 7)$

3. Los op vir x en stel jou antwoord voor in intervalnotasie:

a) $2x - 1 < 3(x + 11)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &< 3(x + 11) \\ 2x - 1 &< 3x + 33 \\ 2x - 3x &< 33 + 1 \\ -1x &< 34 \\ \therefore x &> -34 \end{aligned}$$

$$(-34; \infty)$$

b) $x - 1 < -4(x - 6)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x - 1 &< -4(x - 6) \\ x - 1 &< -4x + 24 \\ x + 4x &< 24 + 1 \\ 5x &< 25 \\ \therefore x &< 5 \end{aligned}$$

$$(-\infty; 5)$$

c) $\dfrac{x-1}{8} \leq \dfrac{2(x-2)}{3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{8} &\leq \frac{2(x-2)}{3} \\
3(x-1) &\leq 16(x-2) \\
3x-3 &\leq 16x-32 \\
3x-16x &\leq -32+3 \\
-13x &\leq -29 \\
\therefore x &\geq \frac{29}{13}
\end{aligned}$$

$x \in \left[\frac{29}{13};\infty\right)$.

d) $\dfrac{x+2}{4} \leq \dfrac{-2(x-4)}{7}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{4} &\leq \frac{-2(x-4)}{7} \\
7(x+2) &\leq -8(x-4) \\
7x+14 &\leq -8x+32 \\
7x+8x &\leq 32-14 \\
15x &\leq 18 \\
\therefore x &\leq \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

$x \in \left(-\infty;\frac{6}{5}\right]$.

e) $\dfrac{1}{5}x - \dfrac{5}{4}(x+2) > \dfrac{1}{4}x+3$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}x - \frac{5}{4}(x+2) &> \frac{1}{4}x+3 \\
4x-25(x+2) &> 5x+60 \\
4x-25x-50 &> 5x+60 \\
4x-25x-5x &> 60+50 \\
-26x &> 110 \\
\therefore x &< -\frac{55}{13}
\end{aligned}$$

Die interval is:

$$\left(-\infty;-\frac{55}{13}\right)$$

f) $\dfrac{1}{5}x - \dfrac{2}{5}(x+3) \geq \dfrac{4}{2}x+3$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}(x+3) &\geq \frac{4}{2}x+3 \\
2x-4(x+3) &\geq 20x+30 \\
2x-4x-12 &\geq 20x+30 \\
2x-4x-20x &\geq 30+12 \\
-22x &\geq 42 \\
\therefore x &\leq -\frac{21}{11}
\end{aligned}$$

Die interval is:

$$\left(-\infty; -\frac{21}{11}\right]$$

g) $4x + 3 < -3 \quad \text{of} \quad 4x + 3 > 5$

Oplossing:

Los die ongelykheid op:

$$\begin{array}{rclcrcl}
4x + 3 & < & -3 & \text{of} & 4x + 3 & > & 5 \\
4x & < & -3 - 3 & \text{of} & 4x & > & 5 - 3 \\
x & < & \frac{-3-3}{4} & \text{of} & x & > & \frac{5-3}{4} \\
x & < & -\frac{3}{2} & \text{of} & x & > & \frac{1}{2}
\end{array}$$

$$\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$$

h) $4 \geq -6x - 6 \geq -3$

Oplossing:

Los die ongelykheid op:

$$\begin{array}{rcccl}
4 & \geq & -6x - 6 & \geq & -3 \\
4 + 6 & \geq & -6x & \geq & -3 + 6 \\
\frac{4+6}{-6} & \leq & x & \leq & \frac{-3+6}{-6} \\
-\frac{5}{3} & \leq & x & \leq & -\frac{1}{2}
\end{array}$$

$$\left[-\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}\right]$$

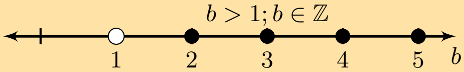
4. Los op vir die onbekende veranderlike en toon jou antwoord op 'n getallelyn.

a) $6b - 3 > b + 2,\ b \in \mathbb{Z}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
6b - 3 &> b + 2,\ b \in \mathbb{Z} \\
5b &> 5 \\
b &> 1
\end{aligned}$$

$b > 1; b \in \mathbb{Z}$



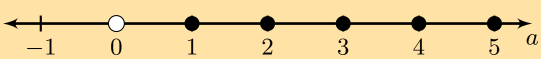
b) $3a - 1 < 4a + 6,\ a \in \mathbb{N}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
3a - 1 &< 4a + 6 \\
-a &< 7 \\
a &> -7
\end{aligned}$$

Ons is egter vertel dat $a \in \mathbb{N}$ en dus $a > 0$.

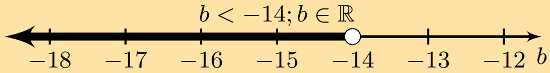
$a > 7; a \in \mathbb{N}$



c) $\dfrac{b-3}{2} + 1 < \dfrac{b}{4} - 4,\ b \in \mathbb{R}$

Oplossing:

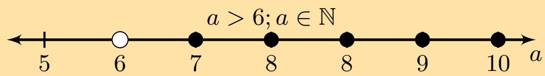
$$\begin{aligned}
\frac{b-3}{2} + 1 &< \frac{b}{4} - 4 \\
2b - 6 + 4 &< b - 16 \\
b &< -14
\end{aligned}$$



d) $\frac{4a+7}{3} - 5 > a - \frac{2}{3},\ a \in \mathbb{N}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{4a+7}{3} - 5 &> a - \frac{2}{3} \\ 4a + 7 - 15 &> 3a - 2 \\ a &> 6 \end{aligned}$$



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2J49	1b. 2J4B	1c. 2J4C	1d. 2J4D	2a. 2J4F	2b. 2J4G
2c. 2J4H	2d. 2J4J	2e. 2J4K	2f. 2J4M	2g. 2J4N	2h. 2J4P
2i. 2J4Q	2j. 2J4R	2k. 2J4S	2l. 2J4T	2m. 2J4V	3a. 2J4W
3b. 2J4X	3c. 2J4Y	3d. 2J4Z	3e. 2J52	3f. 2J53	3g. 2J54
3h. 2J55	4a. 2J56	4b. 2J57	4c. 2J58	4d. 2J59	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.8 Hoofstuk opsomming

End of chapter Exercise 4 – 7:

1. Los op:

a) $5a - 7 = -2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 5a - 7 &= -2 \\ 5a &= -2 - (-7) \\ 5a &= 5 \\ a &= \frac{5}{5} \\ &= 1 \end{aligned}$$

b) $5m + 3 = -2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 5m + 3 &= -2 \\ 5m &= -2 - 3 \\ 5m &= -5 \\ m &= \frac{-5}{5} \\ &= -1 \end{aligned}$$

c) $1 = 4 - 3y$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3y \\ 3y &= 4 - 1 \\ 3y &= 3 \\ y &= \frac{3}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

d) $2(p - 1) = 3(p + 2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2(p - 1) &= 3(p + 2) \\ 2p - 2 &= 3p + 6 \\ p &= -8 \end{aligned}$$

e) $3 - 6k = 2k - 1$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3 - 6k &= 2k - 1 \\ 8k &= 4 \\ k &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

f) $2{,}1x + 3 = 4{,}1 - 3{,}3x$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2{,}1x + 3 &= 4{,}1 - 3{,}3x \\ 5{,}4x &= 1{,}1 \\ x &= \frac{11}{54} \end{aligned}$$

g) $m + 6(-m + 1) + 8m = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned} m + 6(-m + 1) + 8m = 0 \\ m - 6m + 6 + 8m = 0 \\ 3m = -6 \\ m = -2 \end{aligned}$$

h) $2k + 3 = 2 - 3(k + 2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2k + 3 &= 2 - 3(k + 3) \\ 2k + 3 &= 2 - 3k - 9 \\ 5k &= -10 \\ k &= -2 \end{aligned}$$

i) $3 + \frac{q}{5} = \frac{q}{2}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3 + \frac{q}{5} &= \frac{q}{2} \\ 30 + 2q &= 5q \\ 3q &= 30 \\ q &= 10 \end{aligned}$$

j) $\frac{1}{2} = \frac{4z+1}{5z-6}$
Oplossing:
Neem kennis dat $z \neq \frac{6}{5}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{4z+1}{5z-6} \\ 8z+2 &= 5z-6 \\ 3z &= -8 \\ z &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

k) $2 + \frac{a-4}{2} - \frac{a}{3} = 7$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2 + \frac{a-4}{2} - \frac{a}{3} &= 7 \\ \frac{3(a-4)-2a}{6} &= 5 \\ 3a-12-2a &= 30 \\ a &= 42 \end{aligned}$$

l) $5 - \frac{2(m+4)}{m} = \frac{7}{m}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 5 - \frac{2(m+4)}{m} &= \frac{7}{m} \\ 5m - 2(m+4) &= 7 \\ 5m - 2m - 8 &= 7 \\ 3m &= 15 \\ m &= 5 \end{aligned}$$

m) $\frac{2}{t} - 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{t}\right)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{2}{t} - 2 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{t}\right) \\ \frac{2}{t} - 2 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{t} \\ \frac{4}{t} - 4 - 1 &= 1 + \frac{2}{t} \\ 4 - 4t - t &= t + 2 \\ 6t &= 2 \\ t &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. Los op:

a) $b^2 + 6b - 27 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned} b^2 + 6b - 27 &= 0 \\ (b-3)(b+9) &= 0 \\ b &= -9 \text{ of } b = 3 \end{aligned}$$

b) $-x^2 + 5x + 6 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - 6 &= 0 \\ (x-6)(x+1) &= 0 \\ x &= -1 \text{ of } x = 6 \end{aligned}$$

c) $-b^2 - 3b + 10 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned} b^2 + 3b - 10 &= 0 \\ (b-2)(b+5) &= 0 \\ b &= -5 \text{ of } b = 2 \end{aligned}$$

d) $2b - 15 = (b+1)(b-6) - b^2$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2b - 15 &= (b+1)(b-6) - b^2 \\ 2b - 15 &= b^2 - 5b - 6 - b^2 \\ 7b &= 9 \\ b &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

e) $(5x+1)(x-3) = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (5x+1)(x-3) &= 0 \\ x &= -\frac{1}{5} \text{ of } x = 3 \end{aligned}$$

f) $5t - 1 = t^2 - (t+2)(t-2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 5t - 1 &= t^2 - (t+2)(t-2) \\ 5t - 1 &= t^2 - t^2 + 4 \\ 5t - 1 &= 4 \\ 5t &= 5 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

g) $\frac{a+2}{a-3} = \frac{a+8}{a+4}$
Oplossing:
Nota beperkings: $a \neq 3; a \neq -4$.

$$\begin{aligned} \frac{a+2}{a-3} &= \frac{a+8}{a+4} \\ \frac{(a+2)(a+4)}{(a-3)(a+4)} &= \frac{(a+8)(a-3)}{(a-3)(a+4)} \\ (a+2)(a+4) &= (a+8)(a-3) \\ a^2 + 2a + 4a + (2)(4) &= a^2 - 3a + 8a + (-3)(8) \\ a^2 + 6a + 8 &= a^2 + 5a - 24 \\ 6a + 8 &= 5a - 24 \\ 6a - (5a) &= -24 - (8) \\ a &= \frac{-32}{1} \\ &= -32 \end{aligned}$$

h) $\frac{n+3}{n-2} = \frac{n-1}{n-7}$

Oplossing:

Nota beperkings: $n \neq 2; n \neq 7$.

$$\begin{aligned} \frac{n+3}{n-2} &= \frac{n-1}{n-7} \\ \frac{(n+3)(n-7)}{(n-2)(n-7)} &= \frac{(n-1)(n-2)}{(n-7)(n-2)} \\ (n+3)(n-7) &= (n-1)(n-2) \\ n^2 + 3n - 7n + (3)(-7) &= n^2 - 2n - 1n + (-2)(-1) \\ n^2 - 4n - 21 &= n^2 - 3n + 2 \\ -4n - 21 &= -3n + 2 \\ -4n - (-3n) &= 2 - (-21) \\ n &= \frac{23}{-1} \\ &= -23 \end{aligned}$$

i) $x^2 - 3x + 2 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ (x-2)(x-1) &= \\ x = 2 &\text{ of } x = 1 \end{aligned}$$

j) $y^2 + y = 6$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y^2 + y &= 6 \\ y^2 + y - 6 &= 0 \\ (y+3)(y-2) &= 0 \\ y = -3 &\text{ of } y = 2 \end{aligned}$$

k) $0 = 2x^2 - 5x - 18$

Oplossing:

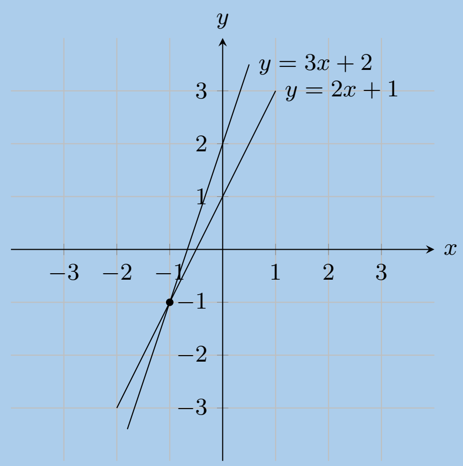
$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 5x - 18 \\ 0 &= (2x+9)(x-2) \\ 2x + 9 = 0 &\text{ or } x - 2 = 0 \\ x = -\frac{9}{2} &\text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

l) $(d+4)(d-3) - d = (3d-2)^2 - 8d(d-1)$

Oplossing:

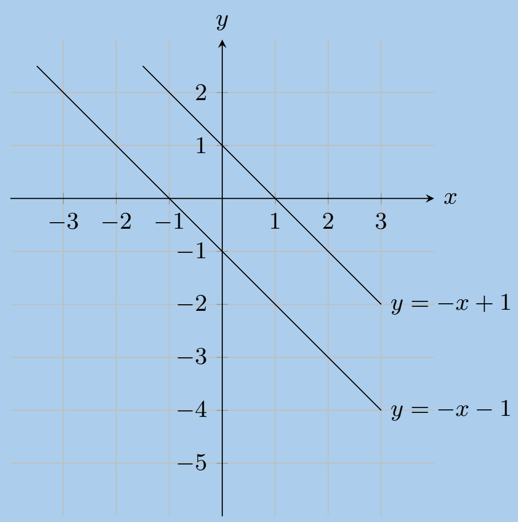
$$\begin{aligned} (d+4)(d-3) - d &= (3d-2)^2 - 8d(d-1) \\ d^2 + d - 12 - d &= 9d^2 - 12d + 4 - 8d^2 + 8d \\ d^2 - 12 &= d^2 - 4d + 4 \\ 4d &= 16 \\ d &= 4 \end{aligned}$$

3. Kyk na die grafiek hieronder:



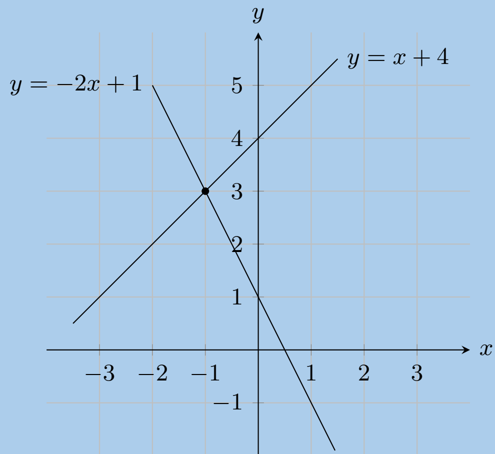
Los die vergelykings $y = 3x + 2$ en $y = 2x + 1$ gelyktydig op.
Oplossing:
Vanaf die grafiek kan ons sien die lyne sny by $x = -1$ en $y = 1$

4. Kyk na die grafiek hieronder:



Los die vergelykings $y = -x + 1$ en $y = -x - 1$ gelyktydig op.
Oplossing:
Die lyne is ewewydig en dus is daar geen oplossing nie.

5. Kyk na die grafiek hieronder:



Los die vergelykings $y = x + 4$ en $y = -2x + 1$ gelyktydig op.
Oplossing:
Vanaf die grafiek kan ons sien die lyne sny by $x = -1$ en $y = 3$

6. Los die volgende gelyktydige vergelykings op:
   a) $7x + 3y = 13$ en $2x - 3y = -4$
   Oplossing:
   Tel die twee vergelykings op om die y term te verwyder en los op vir x:

$$\begin{array}{rrcr} & 7x+3y & = & 13 \\ + & (2x-3y & = & -4) \\ \hline & 9x & = & 9 \end{array}$$

   Dus $x = 1$.
   Vervang die waarde van x in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -4 \\ 2(1) - 3y &= -4 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

   Dus $x = 1$ en $y = 2$.
   b) $10 = 2x + y$ en $y = x - 2$
   Oplossing:
   Vervang die waarde van y in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} 10 &= 2x + x - 2 \\ 10 &= 3x - 2 \\ 12 &= 3x \\ x &= 4 \end{aligned}$$

   Substitueer die waarde van x terug in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} y &= x - 2 \\ &= 4 - 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

   Dus $x = 4$ en $y = 2$.
   c) $7x - 41 = 3y$ en $17 = 3x - y$
   Oplossing:
   Maak y die onderwerp van die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} 17 &= 3x - y \\ y &= 3x - 17 \end{aligned}$$

   Vervang die waarde van y in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} 7x - 41 &= 3y \\ 7x - 41 &= 3(3x - 17) \\ 7x - 41 &= 9x - 51 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

   Substitueer die waarde van x terug in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} y &= 3x - 17 \\ y &= 3(5) - 17 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Dus $x = 5$ en $y = -2$.

d) $2x - 4y = 32$ en $7x + 2y = 32$

Oplossing:

Maak x die onderwerp van die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 32 \\ 2x &= 32 + 4y \\ x &= \frac{32 + 4y}{2} \end{aligned}$$

Vervang die waarde van x in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 7x + 2y &= 32 \\ 7\left(\frac{32 + 4y}{2}\right) + 2y &= 32 \\ 7(32 + 4y) + 2(2)y &= 32(2) \\ 224 + 28y + 4y &= 64 \\ 32y &= -160 \\ \therefore y &= -5 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van y terug in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} x &= \frac{32 + 4y}{2} \\ &= \frac{32 + 4(-5)}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Dus $x = 6$ en $y = -5$.

e) $7x + 6y = -18$ en $4x + 12y = 24$

Oplossing:

Vermenigvuldig die eerste vergelyking met 2 sodat die koëffisiënt van y dieselfde is as in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 7x + 6y &= -18 \\ 7(2)x + 6(2)y &= -18(2) \\ 14x + 12y &= -36 \end{aligned}$$

Trek die tweede vergelyking af van die eerste vergelyking:

$$\begin{array}{rrcr} & 14x + 12y & = & -36 \\ - & (4x + 12y & = & 24) \\ \hline & 10x & = & -60 \end{array}$$

Los op vir x:

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{-60}{10} \\ &= -6 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van x in die eerste vergelyking en los op vir y:

$$\begin{aligned} 7x + 6y &= -18 \\ 7(-6) + 6y &= -18 \\ \therefore y &= \frac{-18 - 7(-6)}{6} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dus $x = -6$ en $y = 4$.

f) $3x - 4y = -15$ en $12x + 5y = 66$

Oplossing:

Vermenigvuldig die eerste vergelyking met 4 sodat die koëffisiënt van x dieselfde is as in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= -15 \\ 3(4)x - 4(4)y &= -15(4) \\ 12x - 16y &= -60 \end{aligned}$$

Trek die tweede vergelyking af van die eerste vergelyking:

$$\begin{array}{rrcr} & 12x - 16y & = & -60 \\ - & (12x + 5y & = & 66) \\ \hline & -21y & = & -126 \end{array}$$

Los op vir y:

$$\begin{aligned} \therefore y &= \frac{-126}{-21} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van y in die eerste vergelyking en los op vir x:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= -15 \\ 3x - 4(6) &= -15 \\ x &= \frac{-15 + 4(6)}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Dus $x = 3$ en $y = 6$.

g) $x - 3y = -22$ en $5x + 2y = -25$

Oplossing:

Skryf die eerste vergelyking in terme van x:

$$\begin{aligned} x - 3y &= -22 \\ x &= 3y - 22 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van x in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= -25 \\ 5(3y - 22) + 2y &= -25 \\ 15y - 110 + 2y &= -25 \\ 17y &= 85 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van y in die eerste vergelyking en los op vir x:

$$\begin{aligned} x - 3y &= -22 \\ x - 3(5) &= -22 \\ x &= -22 + 15 \\ &= -7 \end{aligned}$$

Dus $x = -7$ en $y = 5$.

h) $3x + 2y = 46$ en $15x + 5y = 220$

Oplossing:

Maak y die onderwerp van die tweede vergelyking:

$$
\begin{aligned}
15x + 5y &= 220 \\
3x + y &= 44 \\
y &= 44 - 3x
\end{aligned}
$$

Substitueer die waarde van y in die eerste vergelyking:

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &= 46 \\
3x + 2(44 - 3x) &= 46 \\
3x + 88 - 6x &= 46 \\
42 &= 3x \\
x &= 14
\end{aligned}
$$

Substitueer die waarde van x in die tweede vergelyking:

$$
\begin{aligned}
3x + y &= 44 \\
3(14) + y &= 44 \\
y &= 44 - 42 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Dus $x = 14$ en $y = 2$.

i) $6x + 3y = -63$ en $24x + 4y = -212$

Oplossing:

Vermenigvuldig die eerste vergelyking met 4 sodat die koëffisiënt van x dieselfde is as in die tweede vergelyking:

$$
\begin{aligned}
6x + 3y &= -63 \\
6(4)x - 3(4)y &= -63(4) \\
24x + 12y &= -252
\end{aligned}
$$

Trek die tweede vergelyking af van die eerste vergelyking:

$$
\begin{array}{rrcr}
 & 24x + 12y & = & -252 \\
- & (24x + 4y & = & -212) \\
\hline
 & 8y & = & -40
\end{array}
$$

Los op vir y:

$$
\begin{aligned}
\therefore y &= \frac{-40}{8} \\
&= -5
\end{aligned}
$$

Substitueer die waarde van y in die eerste vergelyking en los op vir x:

$$
\begin{aligned}
6x + 3y &= -63 \\
6x - 3(-5) &= -63 \\
x &= \frac{-63 + 15}{6} \\
&= -8
\end{aligned}
$$

Dus $x = -8$ en $y = -5$.

j) $5x - 6y = 11$ en $25x - 3y = 28$

Oplossing:

Vermenigvuldig die eerste vergelyking met 5 sodat die koëffisiënt van x dieselfde is as in die tweede vergelyking:

$$
\begin{aligned}
5x - 6y &= 11 \\
5(5)x - 6(5)y &= 11(5) \\
25x - 30y &= 55
\end{aligned}
$$

Trek die tweede vergelyking af van die eerste vergelyking:

$$\begin{array}{rrcl} & 25x - 30y & = & 55 \\ - & (25x - 3y & = & 28) \\ \hline & -27y & = & 27 \end{array}$$

Los op vir y:

$$\begin{aligned} \therefore y &= \frac{27}{-27} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van y in die eerste vergelyking en los op vir x:

$$\begin{aligned} 5x - 6y &= 11 \\ 5x - 6(-1) &= 11 \\ x &= \frac{11 - 6}{5} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dus $x = 1$ en $y = -1$.

k) $-9x + 3y = 4$ en $2x + 2y = 6$

Oplossing:

Maak x die onderwerp van die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 6 \\ x &= 3 - y \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van x in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} -9x + 3y &= 4 \\ -9(3 - y) + 3y &= 4 \\ -27 + 9y + 3y &= 4 \\ 12y &= 31 \\ y &= \frac{31}{12} \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van y in die tweede vergelyking en los op vir x:

$$\begin{aligned} x &= 3 - y \\ &= 3 - \frac{31}{12} \\ &= \frac{36 - 31}{12} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Dus $x = \frac{5}{12}$ en $y = \frac{31}{12}$.

l) $3x - 7y = -10$ en $10x + 2y = -6$

Oplossing:

Maak y die onderwerp van die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 10x + 2y &= -6 \\ 5x + y &= -3 \\ y &= -3 - 5x \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van y in die eerste vergelyking:

$$
\begin{aligned}
3x - 7y &= -10 \\
3x - 7(-3 - 5x) &= -10 \\
3x + 21 + 35x &= -10 \\
38x &= -10 - 21 \\
38x &= -31 \\
x &= \frac{-31}{38}
\end{aligned}
$$

Substitueer die waarde van x in die tweede vergelyking en los op vir y:

$$
\begin{aligned}
5x + y &= -3 \\
5\left(\frac{-31}{38}\right) + y &= -3 \\
y &= \frac{-114 + 155}{38} \\
&= \frac{41}{38}
\end{aligned}
$$

Dus $x = -\frac{31}{38}$ en $y = \frac{41}{38}$.

m) $2y = x + 8$ en $4y = 2x - 44$

Oplossing:

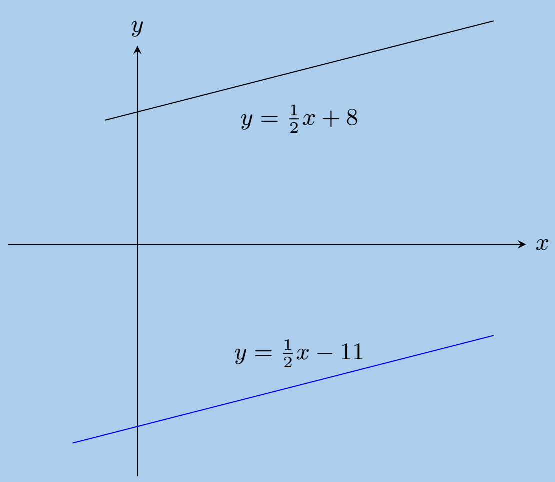
Ons let op die tweede vergelyking het 'n gemene faktor van 2:

$$
\begin{aligned}
4y &= 2x - 44 \\
2y &= x - 22
\end{aligned}
$$

Nou kan ons die tweede vergelyking aftrek van die eerste:

$$
\begin{array}{rrcr}
 & 2y & = & x + 8 \\
- & 2y & = & x - 22 \\
\hline
 & 0 & = & -22
\end{array}
$$

Daar is geen oplossing vir hierdie stelsel van vergelykings nie. Ons kan dit sien as ons hierdie twee vergelykings grafies voorstel:



Van die grafiek kan ons sien dat die lyne dieselfde gradiënt het en mekaar nie sny nie.
Dus is daar geen oplossing.

n) $2a(a - 1) - 4 + a - b = 0$ en $2a^2 - a = b + 4$

Oplossing:

Kyk na die eerste vergelyking

$$
\begin{aligned}
2a(a-1) - 4 + a - b &= 0 \\
2a^2 - 2a - 4 + a - b &= 0 \\
2a^2 - a &= b + 4
\end{aligned}
$$

Let op dat dit dieselfde is as die tweede vergelyking
a en b kan enige reële getal wees behalwe 0.

o) $y = (x-2)^2$ en $x(x+3) - y = 3x + 4(x-1)$

Oplossing:

Kyk na die tweede vergelyking:

$$
\begin{aligned}
x(x+3) - y &= 3x + 4(x-1) \\
x^2 + 3x - y &= 3x + 4x - 4 \\
x^2 - 4x + 4 &= y \\
y &= (x-2)^2
\end{aligned}
$$

Let op dat dit dieselfde is die eerste vergelyking.
x en y kan enige reële getal wees behalwe 0.

p) $\frac{x+1}{y} = 7$ en $\frac{x}{y+1} = 6$

Oplossing:

Let op dat $y \neq 0$ en $y \neq -1$

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{y} &= 7 \qquad \text{vergelyking 1} \\
\frac{x}{y+1} &= 6 \qquad \text{vergelyking 2}
\end{aligned}
$$

Maak x die onderwerp van vergelyking 1:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{y} &= 7 \\
x + 1 &= 7y \\
x &= 7y - 1 \qquad \text{vergelyking 3}
\end{aligned}
$$

Maak x die onderwerp van vergelyking 2:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{y+1} &= 6 \\
x &= 6(y+1) \\
x &= 6y + 6 \qquad \text{vergelyking 4}
\end{aligned}
$$

Substitueer vergelyking 3 in vergelyking 4:

$$
\begin{aligned}
6y + 6 &= 7y - 1 \\
6 + 1 &= 7y - 6y \\
y &= 7
\end{aligned}
$$

Substitueer die waarde van y in vergelyking 3:

$$
\begin{aligned}
x &= 7(7) - 1 \\
&= 48
\end{aligned}
$$

Dus $x = 48$ en $y = 7$

q) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 0$

Oplossing:

Let op dat $(x+3)^2$ en $(y-4)^2$ beide groter of gelyk moet wees aan nul en dus moet hulle beide gelyk wees aan nul vir die vergelyking om waar te wees.

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= 0\\ x &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(y-4)^2 &= 0\\ y &= 4\end{aligned}$$

$$\therefore x = -3 \text{ en } y = 4$$

7. Vind die oplossings vir die volgende woordprobleme:

a) $\frac{7}{8}$ van 'n sekere getal is 5 meer as 'n $\frac{1}{3}$ van die getal. Vind die getal.

Oplossing:

Gestel die getal is x.

$$\begin{aligned}\frac{7}{8}x &= \frac{1}{3}x + 5\\ 21x &= 8x + 120\\ 13x &= 120\\ x &= \frac{120}{13}\end{aligned}$$

Die getal is $\frac{120}{13}$.

b) Drie liniale en twee penne kos altesaam R 21,00. Een liniaal en een pen het 'n totale koste van R 8,00. Hoeveel kos 'n liniaal en hoeveel kos 'n pen?

Oplossing:

Gestel die prys van 'n liniaal is l en die prys van 'n pen is p.

$$\begin{aligned}3l + 2p &= 21\\ l + p &= 8\end{aligned}$$

Uit die tweede vergelyking: $l = 8 - p$

Vervang die waarde van l in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned}3(8-p) + 2p &= 21\\ 24 - 3p + 2p &= 21\\ p &= 3\end{aligned}$$

Vervang p in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned}l + 3 &= 8\\ l &= 5\end{aligned}$$

Dus elke liniaal kos R 5 en elke pen R 3.

c) 'n Groep vriende koop middagete. Hier is 'n paar feite oor hulle ete:

- 'n worsbroodjie kos R 6 meer as 'n melkskommel
- die groep koop 3 worsbroodjies en 2 melkskommels
- die totale koste vir die middagete is R 143

Bepaal die individuele pryse vir die verskillende items.

Oplossing:

Laat die prys van 'n worsbroodjie w wees en die prys van 'n melkskommel m wees. Van die gegewe inligting ons kry:

$$\begin{aligned} w &= m + 6 \\ 3w + 2m &= 143 \end{aligned}$$

Substitueer die eerste vergelyking in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} 3w + 2m &= 143 \\ 3(m + 6) + 2m &= 143 \\ 3m + 6(3) + 2m &= 143 \\ 5m &= 143 - 18 \\ \therefore m &= \frac{125}{5} \\ &= 25 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van m in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} w &= m + 6 \\ &= 25 + 6 \\ &= 31 \end{aligned}$$

Die prys van die worsbroodjie is R 31 terwyl 'n melkskommel R 25 kos.

d) Lefu en Monique is vriende. Monique neem Lefu se besigheidstudietoets antwoordstel en wil nie vir hom sê wat sy punt is nie. Sy weet Lefu hou nie van woordprobleme nie en sy besluit om hom te terg. Monique sê: "Ek het 12 meer punte as jy en die som van ons twee se punte is gelyk aan 166. Wat is ons punte?"

Oplossing:

Gestel Lefu se punt is l en Monique se punt is m. Dan

$$\begin{aligned} m &= l + 12 \\ l + m &= 166 \end{aligned}$$

Vervang die eerste vergelyking in die tweede vergelyking en los op:

$$\begin{aligned} l + m &= 166 \\ l + (l + 12) &= 166 \\ 2l &= 166 - 12 \\ \therefore l &= \frac{154}{2} \\ &= 77 \end{aligned}$$

Vervanging van hierdie waarde terug in die eerste vergelyking gee:

$$\begin{aligned} m &= l + 12 \\ &= 77 + 12 \\ &= 89 \end{aligned}$$

Die studente het die volgende punte behaal: Lefu het 77 punte en Monique het 89 punte.

e) 'n Man hardloop na die busstop en terug in 15 minute. Sy spoed op pad na die busstop is 5 km·h^{-1} en sy spoed op pad terug is 4 km·h^{-1}. Vind die afstand na die busstop.

Oplossing:

Laat die afstand na die busstop D wees.

Spoed $s_1 = 5$ km·h^{-1} en $s_2 = 4$ km·h^{-1}.

Afstand word gegee deur spoed te vermenigvuldig met tyd. Die man loop dieselfde afstand na die busstop as vanaf die busstop. Dus:

$$\begin{aligned} D &= s \times t \\ D &= 5t_1 = 4t_2 \end{aligned}$$

Hy neem 'n totaal van 15 minute om tot daar en terug te hardloop so die totale tyd is $t_1 + t_2 = 15$. Maar die spoed word gegee in kilometer per uur en dus moet ons die tyd omskakel na ure. Dus $t_1 + t_2 = 0{,}25$.

Neem kennis dat $t_1 = \frac{D}{5}$ en $t_2 = \frac{D}{4}$.

Dus:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{5} + \frac{D}{4} &= 0{,}25 \\
4D + 5D &= 0{,}25(20) \\
9D &= 5 \\
D &= \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

Die busstop is 0,56 km ver.

f) Twee trokke ry na mekaar toe vanaf fabrieke wat 175 km van mekaar is. Een trok ry teen 82 km·h^{-1} en die ander teen 93 km·h^{-1}. As beide trokke hulle reis op dieselfde tyd begin, hoe lank sal dit neem voordat hulle by mekaar verbyry?

Oplossing:

Let op dat die som van die afstande vir die twee trokke gelyk moet wees aan die totale afstand wanneer die twee trokke ontmoet: $D_1 + D_2 = D_{\text{totaal}} \longrightarrow D_1 + D_2 = 175$ km.

Die vraag is oor afstand, spoed en tyd. Die vergelyking wat hierdie waardes verbind, is

$$\text{spoed} = \frac{\text{afstand}}{\text{tyd}} \quad \text{- of -} \quad \text{afstand} = \text{spoed} \times \text{tyd}$$

Jy wil weet hoe lank dit sal vat vir die trokke om te ontmoet - gestel die tyd wat dit neem is t. Dan kan jy 'n uitdrukking skryf vir die afstand wat elk van die trokke sal aflê:

$$\begin{aligned}
\text{Vir trok 1:} \quad D_1 &= s_1 t \\
&= 82t \\
\text{Vir trok 2:} \quad D_2 &= s_2 t \\
&= 93t
\end{aligned}$$

Nou het jy drie verskillende vergelykings: jy moet hulle gelyktydig oplos; substitusie is die maklikste keuse.

$$\begin{aligned}
D_1 + D_2 &= 175 \\
(82t) + (93t) &= 175 \\
175t &= 175 \\
\therefore t &= \frac{175}{175} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Die trokke sal na 1 uur ontmoet.

g) Zanele en Piet rolskaats na mekaar toe op 'n reguit stuk pad. Hulle begin 20 km van mekaar af. Zanele skaats teen 15 km·h^{-1} en Piet teen 10 km·h^{-1}. Hoe ver sal Piet skaats voor hulle mekaar bereik?

Oplossing:

Gestel x is die afstand wat Zanele skaats en $20 - x$ is die afstand wat Piet skaats.

Vervolgens let ons die volgende op:

- Zanele skaats x km teen 'n spoed van 15 km·h^{-1} in 'n tyd van $\frac{x}{15}$
- Piet skaats $20 - x$ km teen 'n spoed van 10 km·h^{-1} in 'n tyd van $\frac{20-x}{10}$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{15} &= \frac{20-x}{10} \\
10x &= 15(20 - x) \\
10x &= 300 - 15x \\
25x &= 300 \\
x &= 12
\end{aligned}$$

Zanele sal 12 km skaats en Piet sal 8 km skaats voordat hulle by mekaar uitkom.

h) As die prys van sjokolade verhoog met R 10, kan ons vyf minder sjokolades koop vir R 300. Wat was die prys van elke sjokolade voor die prysverhoging?

Oplossing:

Gestel x is die oorspronklike prys van sjokolade. Die nuwe prys van x sjokolades is R 300.

$$
\begin{aligned}
(x+10)\left(\frac{300}{x}-5\right) &= 300 \\
300-5x+\frac{3000}{x}-50 &= 300 \\
-5x+\frac{3000}{x}-50 &= 0 \\
-5x^2+3000-50x &= 0 \\
x^2+10x-600 &= 0 \\
(x-20)(x+30) &= 0 \\
x &= 20 \text{ of } x=-30
\end{aligned}
$$

Aangesien prys ’n positiewe getal moet wees, het die sjokolade R 20 elke kos.

i) ’n Onderwyseres koop R 11 300 se handboeke. Die handboeke is vir Wetenskap en Wiskunde en elkeen van hulle word verkoop teen R 100 per boek en R 125 per boek respektiewelik. As die onderwyseres 97 boeke in totaal gekoop het, hoeveel Wetenskapboeke het sy gekoop?

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x+y &= 97 \quad (1) \\
100x+125y &= 11\,300 \quad (2) \\
\\
&\text{beskou } (1) \\
x &= 97-y \quad (3) \\
&\text{stel } (3) \text{ in } (2) \\
100(97-y)+125y &= 11\,300 \\
-100y+125y &= 11\,300-9700 \\
25y &= 1600 \\
y &= 64 \\
x &= 97-y \\
x &= 33
\end{aligned}
$$

Sy het 33 Wetenskapboeke gekoop.

j) Thom se Ma het R 91,50 se paaseiers gekoop. Die paaseiers kom in drie verskillende kleure naamlik blou, groen en geel. Die bloues kos R 2 elk, die groenes R 1,50 elk en die geles R 1 elk. Sy koop driemaal soveel geel paaseiers as groenes en 72 eiers in totaal. Hoeveel blou paaseiers het sy gekoop?

Oplossing:

$$x + y + z = 72 \ (1)$$
$$2x + 1{,}5y + z = 91{,}5 \ (2)$$
$$z = 3y \ (3)$$
$$(3) \text{ in } (1)$$
$$x + y + 3y = 72$$
$$x = 72 - 4y \ (4)$$
$$(3) \text{ in } (2)$$
$$2x + 1{,}5y + 3y = 91{,}5$$
$$2x = 91{,}5 - 4{,}5y \ (5)$$
$$(4) \text{ in } (5)$$
$$2(72 - 4y) = 91{,}5 - 4{,}5y$$
$$144 - 8y = 91{,}5 - 4{,}5y$$
$$52{,}5 = 3{,}5y$$
$$y = 15$$
$$x = 72 - 4(15) = 12$$
$$\therefore \text{Thom se ma het 12 blou paaseiers gekoop}$$

k) Twee ekwivalente breuke het beide 'n teller van een. Die noemer van een breuk is die som van twee en 'n getal, terwyl die ander breuk tweemaal die getal is minus 3. Wat is die getal?

Oplossing:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2x-3}$$
$$\text{Let op } x \neq -2 \text{ en } x \neq \frac{3}{2}$$
$$x + 2 = 2x - 3$$
$$x = 5$$

8. Oorweeg die volgende vergelykings met letterkoëffisiënte:

a) Los op vir x: $a - bx = c$

Oplossing:

$$a - bx = c$$
$$-bx = c - a$$
$$-\frac{1}{b}(-bx) = (c-a)\left(-\frac{1}{b}\right)$$
$$\therefore \ x = \frac{a-c}{b}, b \neq 0$$

b) Los op vir I: $P = VI$.

Oplossing:

$$P = VI$$
$$\frac{P}{V} = I$$

Nota beperking: $V \neq 0$.

c) Maak m die onderwerp van die formule: $E = mc^2$.

Oplossing:

$$E = mc^2$$
$$\frac{E}{c^2} = m$$

Nota beperking: $c \neq 0$.

d) Los op vir t: $v = u + at$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} v &= u + at \\ v - u &= at \\ \frac{v-u}{a} &= t \end{aligned}$$

Nota beperking: $a \neq 0$.

e) Maak f die onderwerp van die formule: $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} + \frac{1}{v} &= \frac{1}{f} \\ \frac{f}{u} + \frac{f}{v} &= 1 \\ \frac{fv}{uv} + \frac{fu}{uv} &= 1 \\ fv + fu &= uv \\ f(v+u) &= uv \\ f &= \frac{uv}{v+u} \end{aligned}$$

Nota beperking: $v \neq -u$.

f) Los op vir y: $m = \frac{y-c}{x}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y-c}{x} \\ mx &= y - c \\ mx + c &= y \end{aligned}$$

g) Los op vir x in: $ax - 4a + ab = 4b - bx - b^2 + 4c - cx - bc$

Oplossing:

$$\begin{aligned} ax - 4a + ab &= 4b - bx - b^2 + 4c - cx - bc \\ ax - 4a + ab + bx - 4b + b^2 + cx - 4c + bc &= 0 \\ a(x - 4 + b) + b(x - 4 + b) + c(x - 4 + b) &= 0 \\ (a + b + c)(x - 4 + b) &= 0 \end{aligned}$$

As $(a + b + c) \neq 0$ dan is $x = 4 - b$ as $a + b + c = 0, x \in \mathbb{R}$

h) Los op vir r in $S = \frac{a}{1-r}$ as $a = 0{,}4$ en $S = 3$

Oplossing:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{1-r} \\ 1 - r&\frac{a}{S} \\ r &= 1 - \frac{a}{S} \\ r &= 1 - \frac{0{,}4}{3} \\ r &= \frac{13}{15} \end{aligned}$$

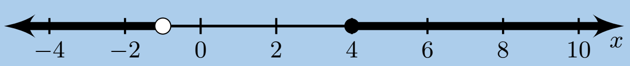
i) Los op vir b in $I = \frac{1}{2}M(a^2 + b^2)$ as $a = 4$, $M = 8$, $I = 320$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}M(a^2 + b^2) \\
\frac{2I}{M} &= a^2 + b^2 \\
b^2 &= \frac{2I}{M} - a^2 \\
b &= \pm\sqrt{\frac{2I}{M} - a^2} \\
b &= \pm\sqrt{\frac{2(320)}{8} - 4^2} \\
b &= \pm\sqrt{80 - 16} \\
b &= \pm 8
\end{aligned}$$

9. Skryf die ongelykheid neer wat voorgestel word deur die volgende:

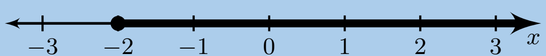
a)



Oplossing:

$x < -1$ en $x \geq 4; x \in \mathbb{R}$

b)



Oplossing:

$x \geq -2; x \in \mathbb{R}$

c)

Oplossing:

$-1 < x \leq -2; x \in \mathbb{R}$

10. Los op vir x en stel jou antwoord voor in intervalnotasie

a) $-4x + 1 > -2(x - 15)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
-4x + 1 &> -2(x - 15) \\
-4x + 1 &> -2x + 30 \\
-4x + 2x &> 30 - 1 \\
-2x &> 29 \\
\therefore x &< \frac{-29}{2}
\end{aligned}$$

$$\left(-\infty; \frac{-29}{2}\right)$$

b) $\frac{x+2}{4} \leq \frac{-1(x+1)}{6}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{4} &\leq \frac{-1(x+1)}{6} \\
6(x+2) &\leq -4(x+1) \\
6x + 12 &\leq -4x - 4
\end{aligned}$$

Los nou op. (Onthou om die ongelykheidsteken om te draai as jy vermenigvuldig of deel met 'n negatiewe getal.)

$$\begin{aligned} 6x + 12 &\leq -4x - 4 \\ 6x + 4x &\leq -4 - 12 \\ 10x &\leq -16 \\ \therefore x &\leq \frac{-8}{5} \end{aligned}$$

$x \in \left(-\infty; \frac{-8}{5}\right]$.

c) $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}(x+1) \geq \frac{2}{5}x + 2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}(x+1) &\geq \frac{2}{5}x + 2 \\ 15x + 40(x+1) &\geq 24x + 120 \\ 15x + 40x + 40 &\geq 24x + 120 \\ 15x + 40x - 24x &\geq 120 - 40 \\ 31x &\geq 80 \\ \therefore x &\geq \frac{80}{31} \end{aligned}$$

Die interval is:

$$\left[\frac{80}{31}; \infty\right)$$

d) $3x - 3 > 14$ or $3x - 3 < -2$

Oplossing:

Los die ongelykheid op:

$$\begin{array}{rclcrcl} 3x-3 & > & 14 & \text{of} & 3x-3 & < & -2 \\ 3x & > & 14+3 & \text{of} & 3x & < & -2+3 \\ x & > & \frac{14+3}{3} & \text{of} & x & < & \frac{-2+3}{3} \\ x & > & \frac{17}{3} & \text{of} & x & < & \frac{1}{3} \end{array}$$

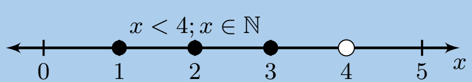
$$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{17}{3}; \infty\right)$$

11. Los op en stel jou antwoord voor op 'n getallelyn

a) $2x - 3 < \frac{3x-2}{2}$, $x \in \mathbb{N}$

Oplossing:

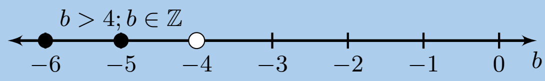
$$\begin{aligned} 2x - 3 &< \frac{3x-2}{2} \\ 4x - 6 &< 3x - 2 \\ x &< 4 \end{aligned}$$



b) $3(1-b) - 4 + b > 7 + b$, $b \in \mathbb{Z}$

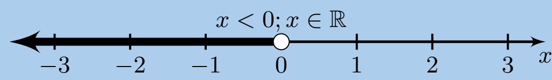
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3(1-b) - 4 + b &> 7 + b \\ 3 - 3b - 4 + b &> 7 + b \\ -2b &> 8 \\ b &< -4 \end{aligned}$$



c) $1 - 5x > 4(x+1) - 3,\ x \in \mathbb{R}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 1 - 5x &> 4(x+1) - 3 \\ 1 - 5x &> 4x + 4 - 3 \\ -9x &> 0 \\ x &< 0 \end{aligned}$$



12. Los op vir die onbekende veranderlike

a) $2 + 2\frac{1}{3}(x+4) = \frac{1}{5}(3-x) + \frac{1}{6}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2 + 2\frac{1}{3}(x+4) &= \frac{1}{5}(3-x) + \frac{1}{6} \\ 2 + 2\frac{1}{3}x + 9\frac{1}{3} &= \frac{3}{5} - \frac{1}{5}x + \frac{1}{6} \\ 2\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x &= \frac{3}{5} + \frac{1}{6} - 2 - 9\frac{1}{3} \\ \frac{38}{15}x &= -\frac{317}{30} \\ x &= -\frac{317}{76} \end{aligned}$$

b) $36 - (x-4)^2 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 36 - (x-4)^2 &= 0 \\ (6 + x - 4)(6 - (x-4)) &= 0 \\ (2 + x)(10 - x) &= 0 \\ \therefore x &= -2 \text{ of } x = 10 \end{aligned}$$

c) $64 - (a+3)^2 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 64 - (a+3)^2 &= 0 \\ (8 - a - 3)(8 + a + 3) &= 0 \\ (5 - a)(11 + a) &= 0 \\ \therefore a &= 5 \text{ of } a = -11 \end{aligned}$$

d) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{x} = 0$
Oplossing:
Let op dat $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - \frac{2}{x} &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= 0 \\ \therefore x &= 2 \text{ of } x = -2 \end{aligned}$$

e) $a-3=2\left(\frac{6}{a}+1\right)$

Oplossing:

Let op dat $a \neq 0$

$$\begin{aligned}
a-3&=2\left(\frac{6}{a}-1\right)\\
a-3&=\frac{12}{a}-2\\
a^2-3a&=12-2a\\
a^2-a-12&=0\\
(a-4)(a+3)&=0\\
\therefore a&=4 \text{ of } a=-3
\end{aligned}$$

f) $a-\frac{6}{a}=-1$

Oplossing:

Let op dat $a \neq 0$

$$\begin{aligned}
a-\frac{6}{a}&=-1\\
a^2-6&=-a\\
a^2+a-6&=0\\
(a-2)(a+3)&=0\\
\therefore a&=2 \text{ of } a=-3
\end{aligned}$$

g) $(a+6)^2-5(a+6)-24=0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
(a+6)^2-5(a+6)-24&=0\\
((a+6)-8)((a+6)+3)&=0\\
(a-2)(a+9)&=0\\
\therefore a&=2 \text{ of } a=-9
\end{aligned}$$

h) $a^4-4a^2+3=0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
a^4-4a^2+3&=0\\
(a^2-3)(a^2-1)&=0\\
(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})(a-1)(a+1)&=0\\
\therefore b&=\pm\sqrt{3} \text{ of } b=\pm 1
\end{aligned}$$

i) $9y^4-13y^2+4=0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
9y^4-13y^2+4&=0\\
(9y^2-4)(y^2-1)&=0\\
(3y-2)(3y+2)(y-1)(y+1)&=0\\
\therefore y&=\pm\frac{2}{3} \text{ of } y=\pm 1
\end{aligned}$$

j) $\frac{(b+1)^2-16}{b+5}=1$

Oplossing:

Let op dat $b \neq -5$

$$\begin{aligned}
\frac{(b+1)^2 - 16}{b+5} &= 1 \\
b^2 + 2b + 1 - 16 &= b + 5 \\
b^2 + b - 20 &= 0 \\
(b-4)(b+5) &= 0 \\
\therefore b &= 4
\end{aligned}$$

k) $\dfrac{a^2 + 8a + 7}{a + 7} = 2$

Oplossing:

Let op dat $a \neq -7$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 + 8a + 7}{a+7} &= 2 \\
a^2 + 8a + 7 &= 2a + 14 \\
a^2 + 6a - 7 &= 0 \\
(a-1)(a+7) &= 0 \\
\therefore a &= 1
\end{aligned}$$

l) $5x + 2 \leq 4(2x - 1)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
5x + 2 &\leq 4(2x - 1) \\
5x + 2 &\leq 8x - 4 \\
-3x &\leq -6 \\
x &\geq 2
\end{aligned}$$

m) $\dfrac{4x - 2}{6} > 2x + 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{4x-2}{6} &> 2x + 1 \\
4x - 2 &> 12x + 6 \\
-8x &> 8 \\
x &< -1
\end{aligned}$$

n) $\dfrac{x}{3} - 14 > 14 - \dfrac{x}{7}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3} - 14 &> 14 - \frac{x}{7} \\
7x - 294 &> 294 - 3x \\
10x &> 588 \\
x &> \frac{588}{10}
\end{aligned}$$

o) $\dfrac{1-a}{2} - \dfrac{2-a}{3} \geq 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{1-a}{2} - \frac{2-a}{3} &\geq 1 \\
3 - 3a - 4 + 2a &\geq 6 \\
-a &\geq 7 \\
a &\leq -7
\end{aligned}$$

p) $-5 \leq 2k + 1 < 5$

Oplossing:

$$\begin{array}{rcccl} -5 & \leq & 2k+1 & < & 5 \\ -6 & \leq & 2k & < & 4 \\ -3 & \leq & k & < & 2 \end{array}$$

q) $x - 1 = \frac{42}{x}$

Oplossing:

Let op dat $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} x - 1 &= \frac{42}{x} \\ x^2 - x &= 42 \\ x^2 - x - 42 &= 0 \\ (x-7)(x+6) &= 0 \\ x &= 7 \text{ of } x = -6 \end{aligned}$$

r) $(x+1)^2 = (x+1)(2x+3)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= (x+1)(2x+3) \\ x^2 + 2x + 1 &= 2x^2 + 3x + 2x + 3 \\ 0 &= 2x^2 - x^2 + 5x - 2x + 3 - 1 \\ x^2 + 3x + 2 &= 0 \\ (x+1)(x+2) &= 0 \\ \therefore x &= -1 \text{ of } x = -2 \end{aligned}$$

s) $3ax + 2a - ax = 5ax - 6a$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 3ax + 2a - ax &= 5ax - 6a \\ 0 &= 5ax - 3ax - 6a - 2a + ax \\ 3ax - 8a &= 0 \\ a(3x - 8) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{3}{8} \text{ as } a \neq 0, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Let daarop dat jy nie doodeenvoudig dwarsdeur kan deel deur met a nie, omdat dit nie gesê word dat $a \neq 0$. Dus die waarde van a mag dalk 0 wees en jy kan nie deel deur nul nie.

t) $\frac{ax}{b} - \frac{bx}{a} = \frac{a}{b} + 1$

Oplossing:

Let op dat in hierdie oplossing is a en b noemers en dit beteken hulle is nie gelyk aan nul nie.

$$\begin{aligned} \frac{ax}{b} - \frac{bx}{a} &= \frac{a}{b} + 1 \\ (ab)\frac{ax}{b} - (ab)\frac{bx}{a} &= (ab)\frac{a}{b} + (ab)1 \\ a^2x - b^2x &= a^2 + ab \\ x(a^2 - b^2) &= a(a+b) \\ x(a+b)(a-b) &= a(a+b) \\ x &= \frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)} \\ \therefore x &= \frac{a}{(a-b)} \text{ vir } a, b \neq 0 \text{ en } a \neq b \end{aligned}$$

u) $3x^2 - xy - 2y^2 = 0$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3x^2 - xy - 2y^2 &= 0 \\ (3x + 2y)(x - y) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{2}{3}y \text{ of } x = y \end{aligned}$$

v) $x(2x + 1) = 1$
Oplossing:

$$\begin{aligned} x(2x + 1) &= 1 \\ 2x^2 + x - 1 &= 0 \\ (2x - 1)(x + 1) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{2}y \text{ of } x = -1 \end{aligned}$$

w) $\frac{2x - 5}{(x + 2)(x - 4)} = \frac{1}{2(x - 4)}$
Oplossing:
Let op dat $x \neq 4$ en $x \neq -2$, omdat die noemer nie kan nul wees nie

$$\begin{aligned} \frac{2x - 5}{(x + 2)(x - 4)} &= \frac{1}{2(x - 4)} \\ 2(2x - 5) &= x + 2 \\ 4x - 10 &= x + 2 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \\ \therefore \text{ geen oplossing omdat } x &\neq 4 \end{aligned}$$

x) $x^2 + 1 = 0$
Oplossing:

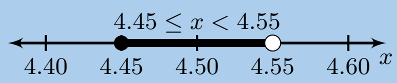
$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \sqrt{-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ geen oplossing omdat } \sqrt{-1} \text{ nie 'n reële getal is nie}$$

y) $\frac{x + 4}{3} - 2 > \frac{x - 3}{2} - \frac{x + 1}{4}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{x + 4}{3} - 2 &> \frac{x - 3}{2} - \frac{x + 1}{4} \\ 12(\frac{x + 4}{3}) - (12)(2) &> 12(\frac{x - 3}{2}) - 12(\frac{x + 1}{4}) \\ 4x + 16 - 24 &> 6x - 18 - 3x - 3 \\ 4x + 3x - 6x + 16 - 24 + 18 + 3 &> 0 \\ x + 13 &> 0 \\ x &> -13 \\ \\ \therefore x &> -13 \end{aligned}$$

13. Na hy 'n vergelyking opgelos het, gee Luke sy antwoord as 4,5, afgerond tot een desimale plek. Toon die interval waarin hierdie oplossing lê op 'n getallelyn.
Oplossing:



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2J5C	1b. 2J5D	1c. 2J5F	1d. 2J5G	1e. 2J5H	1f. 2J5J
1g. 2J5K	1h. 2J5M	1i. 2J5N	1j. 2J5P	1k. 2J5Q	1l. 2J5R
1m. 2J5S	2a. 2J5T	2b. 2J5V	2c. 2J5W	2d. 2J5X	2e. 2J5Y
2f. 2J5Z	2g. 2J62	2h. 2J63	2i. 2J64	2j. 2J65	2k. 2J66
2l. 2J67	3. 2J68	4. 2J69	5. 2J6B	6a. 2J6C	6b. 2J6D
6c. 2J6F	6d. 2J6G	6e. 2J6H	6f. 2J6J	6g. 2J6K	6h. 2J6M
6i. 2J6N	6j. 2J6P	6k. 2J6Q	6l. 2J6R	6m. 2J6S	6n. 2J6T
6o. 2J6V	6p. 2J6W	6q. 2J6X	7a. 2J6Y	7b. 2J6Z	7c. 2J72
7d. 2J73	7e. 2J74	7f. 2J75	7g. 2J76	7h. 2J77	7i. 2J78
7j. 2J79	7k. 2J7B	8a. 2J7C	8b. 2J7D	8c. 2J7F	8d. 2J7G
8e. 2J7H	8f. 2J7J	8g. 2J7K	8h. 2J7M	8i. 2J7N	9a. 2J7P
9b. 2J7Q	9c. 2J7R	10a. 2J7S	10b. 2J7T	10c. 2J7V	10d. 2J7W
11a. 2J7X	11b. 2J7Y	11c. 2J7Z	12a. 2J82	12b. 2J83	12c. 2J84
12d. 2J85	12e. 2J86	12f. 2J87	12g. 2J88	12h. 2J89	12i. 2J8B
12j. 2J8C	12k. 2J8D	12l. 2J8F	12m. 2J8G	12n. 2J8H	12o. 2J8J
12p. 2J8K	12q. 2J8M	12r. 2J8N	12s. 2J8P	12t. 2J8Q	12u. 2J8R
12v. 2J8S	12w. 2J8T	12x. 2J8V	12y. 2J8W	13. 2J8X	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 5

Trigonometrie

5.1 Inleiding

- Inhoud wat gedek word in hierdie hoofstuk sluit die definiëring in van trigonometriese verhoudings en die uitbreiding van hierdie definisies na enige grootte hoek. Die definisies van die resiproke van die trigonometriese verhoudings word ook gedek. Beide die trigonometriese verhoudings en hulle resiproke word ge-evalueer vir verskeie spesiale hoeke. Addisioneel word eenvoudige trigonometriese vergelykings opgelos.
- Oplos van probleme in twee dimensies, met die gebruik van trigonometrie, word slegs later in die jaar behandel en die inhoud daarvan kan gevind word in hoofstuk 11.
- Gelykvormigheid van driehoeke is fundamenteel tot die trigonometriese verhoudings
- Trigonometriese verhoudings is onafhanklik van die lengtes van die sye wat gebruik word en is slegs afhanklik van die hoeke.
- Verdubbeling van 'n verhouding het 'n ander effek as die verdubbeling van 'n hoek.
- Beklemtoon die waarde en belangrikheid van die maak van sketse waar van toepassing.
- Herinner leerders dat hoeke in die Cartesiese vlak altyd gemeet word vanaf die positiewe x-as.
- Wanneer ons werk met hoeke op die Cartesiese vlak, herinner leerders daaraan om te kontroleer dat hulle antwoorde in die korrekte kwadrant is.
- Sakrekenaarvaardighede is baie belangrik in hierdie hoofstuk. Metodes vir CASIO sakrekenaars word getoon, maar praktiese demonstrasie mag nodig wees. Vir 'n SHARP sakrekenaar is die sleutels in die algemeen dieselfde alhoewel die SHIFT sleutel nou die 2ndF sleutel is.
- Ons sal verwys na sinus, cosinus, tangens, secans, cosecans en cotangens as trigonometriese verhoudings of ratios, eerder as na trigonometriese funksies. Beide terme is korrek, maar vir die aard van die inhoud van hierdie hoofstuk, sal die term 'verhouding' die inhoud beter vasvang en sal dit waarskynlik meer toeganklik wees vir leerders op hierdie stadium.

Fabumaths het sekere bruikbare skakels en inhoud vir trigonometrie.

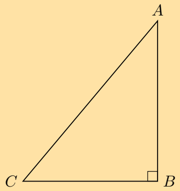
5.2 Gelykvormigheid van driehoeke

5.3 Definiëring van die trigonometriese verhoudings

Jy mag hoor dat mense praat van "Soh Cah Toa". Dit is 'n mnemoniese tegniek om die trigonometriese verhoudings te onthou maar dit maak gebruik van Engelse benamings.

Exercise 5 – 1:

1. Voltooi elk van die volgende:



a) $\sin \hat{A} =$

Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek $\hat{A}$ is tenoor die hoek $\hat{A}$. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm $\hat{A}$.

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{CB}{AC}$$

b) $\cos \hat{A} =$

Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek $\hat{A}$ is tenoor die hoek $\hat{A}$. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm $\hat{A}$.

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{AB}{AC}$$

c) $\tan \hat{A} =$

Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek $\hat{A}$ is tenoor die hoek $\hat{A}$. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm $\hat{A}$.

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{CB}{AB}$$

d) $\sin \hat{C} =$

Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek $\hat{C}$ is tenoor die hoek $\hat{C}$. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm $\hat{C}$.

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{AB}{AC}$$

e) $\cos \hat{C} =$

Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek $\hat{C}$ is tenoor die hoek $\hat{C}$. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm $\hat{C}$.

$$\cos \hat{C} = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{CB}{AC}$$

f) $\tan \hat{C} =$

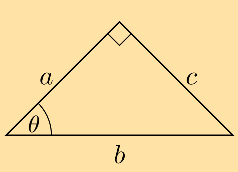
Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek $\hat{C}$ is tenoor die hoek $\hat{C}$. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm $\hat{C}$.

$$\tan \hat{C} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{AB}{CB}$$

2. In elk van die volgende driehoeke, meld of a, b en c die skuinssy, teenoorstaande of aangrensende sy is van die driehoek met betrekking tot θ.

a)

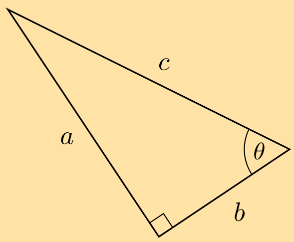


Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek θ is tenoor die hoek θ. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm θ.

- a is die aangrensende sy
- b is die skuinssy
- c is die oorstaande, of teenoorstaande, sy

b)

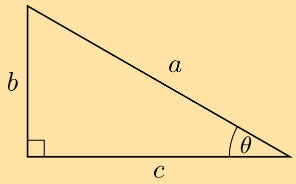


Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek θ is tenoor die hoek θ. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm θ.

- a is die oorstaande, of teenoorstaande, sy
- b is die aangrensende sy
- c is die skuinssy

c)

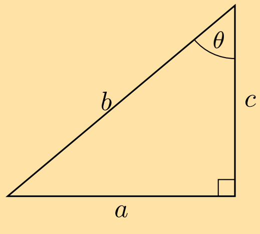


Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek θ is tenoor die hoek θ. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm θ.

- a is die skuinssy
- b is die oorstaande, of teenoorstaande, sy
- c is die aangrensende sy

d)

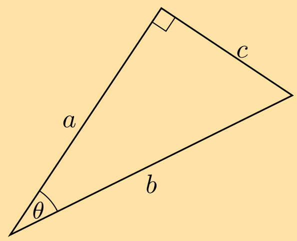


Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek θ is tenoor die hoek θ. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm θ.

- a is die oorstaande, of teenoorstaande, sy
- b is die skuinssy
- c is die aangrensende sy

e)

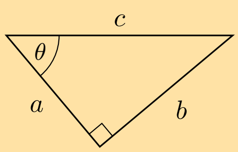


Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek θ is tenoor die hoek θ. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm θ.

- a is die aangrensende sy
- b is die skuinssy
- c is die oorstaande, of teenoorstaande, sy

f)

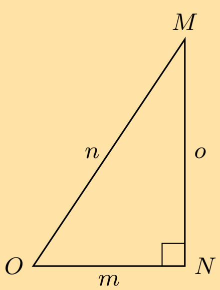


Oplossing:

Kry eerste die regte hoek, die skuinssy is altyd tenoor die regte hoek. Die teenoorstaande en aangrensende sye is afhanklik van die hoek waarna ons kyk. Die teenoorstaande sy relatief tot die hoek θ is tenoor die hoek θ. Uiteindelik is die aangrensende sy die oorblywende sy van die driehoek en dit moet een van die sye wees wat die hoek vorm θ.

- a is die aangrensende sy
- b is die oorstaande, of teenoorstaande, sy
- c is die skuinssy

3. Beskou die volgende diagram:



Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, antwoord elk van die volgende vrae.

a) Skryf $\cos \hat{O}$ neer in terme van m, n en o.

Oplossing:

- m is die aangrensende sy
- n is die skuinssy
- o is die oorstaande, of teenoorstaande, sy

$\cos \hat{O} = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{m}{o}$

b) Skryf $\tan \hat{M}$ neer in terme van m, n en o.

Oplossing:

- m is die oorstaande, of teenoorstaande, sy
- n is die skuinssy
- o is die aangrensende sy

$\tan \hat{M} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} = \frac{m}{o}$

c) Skryf $\sin \hat{O}$ neer in terme van m, n en o.

Oplossing:

- m is die aangrensende sy
- n is die skuinssy
- o is die oorstaande, of teenoorstaande, sy

$\sin \hat{O} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{o}{n}$

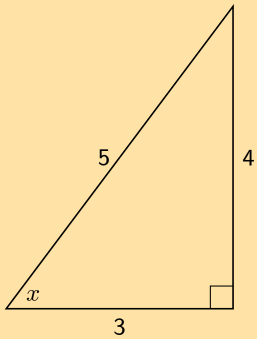
d) Skryf $\cos \hat{M}$ neer in terme van m, n en o.

Oplossing:

- m is die oorstaande, of teenoorstaande, sy
- n is die skuinssy
- o is die aangrensende sy

$\cos \hat{M} = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{o}{n}$

4. Vind x in die diagram op drie verskillende maniere. Jy hoef nie die waarde van x te bereken nie, skryf net die toepaslike verhouding neer vir x.



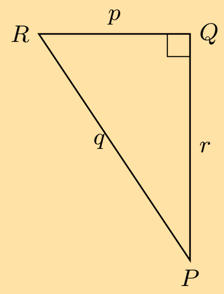
Oplossing:

- Sy met lengte 4 is die oorstaande sy
- Sy met lengte 5 is die skuinssy
- Sy met lengte 3 is die aangrensende sy

Let op dat die skuinssy die langste sy is, soos ons sal verwag.

$$\sin x = \frac{4}{5}$$
$$\cos x = \frac{3}{5}$$
$$\tan x = \frac{4}{3}$$

5. Watter van die bewerings is waar omtrent $\triangle PQR$?



a) $\sin \hat{R} = \frac{p}{q}$

b) $\tan \hat{Q} = \frac{r}{p}$

c) $\cos \hat{P} = \frac{r}{q}$

d) $\sin \hat{P} = \frac{p}{r}$

Oplossing:

Ons vind eers die teenoorstaande en aangrensende sye met betrekking tot $\hat{P}$ en $\hat{R}$:

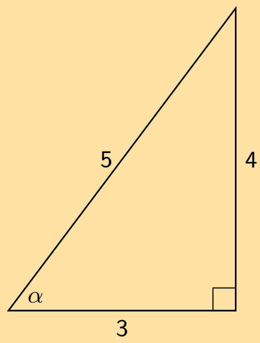
- p is die teenoorstaande sy van $\hat{P}$ en die aangrensende sy van $\hat{R}$
- q is die skuinssy
- r is die aangrensende sy met betrekking tot $\hat{P}$ en die teenoorstaande sy met betrekking tot $\hat{R}$

Ons let ook op dat:

- $\sin \theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}$
- $\cos \theta = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}$
- $\tan \theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensend}}$

As ons kyk na die gegewe verhoudings kan ons sien dat slegs $\cos \hat{P} = \frac{r}{q}$ reg is.

6. Sarah wil die waarde vind van α in die driehoek hieronder. Watter stelling verteenwoordig 'n korrekte werkwyse?



a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

b) $\cos \left(\frac{3}{5}\right) = \alpha$

c) $\tan \alpha = \frac{5}{4}$

d) $\cos 0{,}8 = \alpha$

Oplossing:

Sarah moet eers die skuinssy, teenoorstaande en aangrensende sye identifiseer. Sy moet dan 'n trigonometriese verhouding neerskryf wat haar sal toelaat om α te vind.

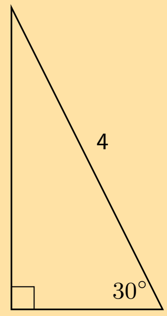
$\sin \alpha = \frac{4}{5}$ is een so 'n verhouding wat haar sal help om α te vind. Van die gegewe lys van opsies, is hierdie die enigste korrekte redenasie.

$\cos \left(\frac{3}{5}\right) = \alpha$ het die hoek en die lengtes van die sye omgeruil.

$\tan \alpha = \frac{3}{4}$ gebruik die verkeerde sye met betrekking tot α vir $\tan$.

$\cos 0{,}8 = \alpha$ gebruik die verkeerde sye met betrekking tot α vir $\cos$. Let daarop dat jy die breuk tot 'n desimale getal kan reduseer maar jy moet eers die korrekte breuk skryf.

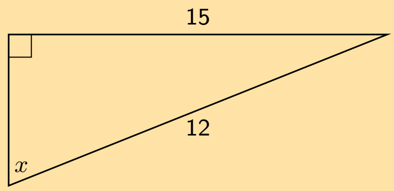
7. Verduidelik wat verkeerd is met elk van die volgende diagramme.



a)

Oplossing:

Die skuinssy is te kort. Die skuinssy is die langste sy van 'n reghoekige driehoek en in hierdie geval is een sy van die driehoek aangedui as langer as die skuinssy.



b)

Oplossing:

Die skuinssy is te kort. Die skuinssy is die langste sy van 'n reghoekige driehoek en in hierdie geval is een sy van die driehoek aangedui as langer as die skuinssy.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2J92	2a. 2J93	2b. 2J94	2c. 2J95	2d. 2J96	2e. 2J97
2f. 2J98	3a. 2J99	3b. 2J9B	3c. 2J9C	3d. 2J9D	4. 2J9F
5. 2J9G	6. 2J9H	7a. 2J9J	7b. 2J9K		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

5.4 Resiprook verhoudings

5.5 Sakrekenaar vaardighede

Exercise 5 – 2:

1. Gebruik jou sakrekenaar om die waarde van die volgende te bepaal (korrek tot 2 desimale plekke):

   a) $\tan 65°$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan 65° &= 2{,}1445069...\\ &\approx 2{,}14\end{aligned}$$

   b) $\sin 38°$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin 38° &= 0{,}615661... \\ &\approx 0{,}62 \end{aligned}$$

c) $\cos 74°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos 74° &= 0{,}275637... \\ &\approx 0{,}28 \end{aligned}$$

d) $\sin 12°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin 12° &= 0{,}20791... \\ &\approx 0{,}21 \end{aligned}$$

e) $\cos 26°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos 26° &= 0{,}898794... \\ &\approx 0{,}90 \end{aligned}$$

f) $\tan 49°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \tan 49° &= 1{,}150368... \\ &\approx 1{,}15 \end{aligned}$$

g) $\sin 305°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin 305° &= -0{,}81915... \\ &\approx -0{,}82 \end{aligned}$$

h) $\tan 124°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \tan 124° &= -1{,}482560... \\ &\approx -1{,}48 \end{aligned}$$

i) $\sec 65°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \sec 65° &= \frac{1}{\cos 65°} \\ &= 2{,}36620... \\ &\approx 2{,}37 \end{aligned}$$

j) $\sec 10°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \sec 10° &= \frac{1}{\cos 10°} \\ &= 1{,}01542... \\ &\approx 1{,}02 \end{aligned}$$

k) $\sec 48°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\sec 48° &= \frac{1}{\cos 48°}\\ &= 1{,}49447\ldots\\ &\approx 1{,}49\end{aligned}$$

l) $\cot 32°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\cot 32° &= \frac{1}{\tan 32°}\\ &= 1{,}6003334\ldots\\ &\approx 1{,}60\end{aligned}$$

m) $\text{cosec } 140°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{cosec } 140° &= \frac{1}{\sin 140°}\\ &= 1{,}555724\ldots\\ &\approx 1{,}56\end{aligned}$$

n) $\text{cosec } 237°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{cosec}237° &= \frac{1}{\sin 237°}\\ &= -1{,}192363\ldots\\ &\approx -1{,}19\end{aligned}$$

o) $\sec 231°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\sec 231° &= \frac{1}{\cos 231°}\\ &= -1{,}589016\ldots\\ &\approx -1{,}59\end{aligned}$$

p) $\text{cosec } 226°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{cosec } 226° &= \frac{1}{\sin 226°}\\ &= -1{,}390164\ldots\\ &\approx -1{,}39\end{aligned}$$

q) $\frac{1}{4}\cos 20°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\cos 20° &= \frac{1}{4}(0{,}939692\ldots)\\ &= 0{,}234923\ldots\\ &\approx 0{,}23\end{aligned}$$

r) $3\tan 40°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}3\tan 40° &= 3(0{,}83909963...)\\ &= 2{,}517298894...\\ &\approx 2{,}52\end{aligned}$$

s) $\frac{2}{3}\sin 90°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\sin 90° &= \frac{2}{3}(1)\\ &= 0{,}66666...\\ &\approx 0{,}67\end{aligned}$$

t) $\frac{5}{\cos 4{,}3°}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{5}{\cos 4{,}3°} &= \frac{5}{0{,}9971...}\\ &\approx 5{,}01\end{aligned}$$

u) $\sqrt{\sin 55°}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin 55°} &= \sqrt{0{,}81915...}\\ &\approx 0{,}91\end{aligned}$$

v) $\frac{\sin 90°}{\cos 90°}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{\sin 90°}{\cos 90°} &= \frac{1}{0}\\ &\text{ongedefinieerd}\end{aligned}$$

w) $\tan 35° + \cot 35°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan 35° + \cot 35° &= 0{,}7002... + \frac{1}{\tan 35°}\\ &= 0{,}7002... + 1{,}4281...\\ &\approx 2{,}13\end{aligned}$$

x) $\frac{2+\cos 310°}{2+\sin 87°}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2+\cos 310°}{2+\sin 87°} &= \frac{2{,}64278...}{2{,}99862...}\\ &\approx 0{,}88\end{aligned}$$

y) $\sqrt{4\sec 99°}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\sqrt{4\sec 99^\circ} &= \sqrt{\frac{4}{\cos 99^\circ}} \\ &= \sqrt{-25{,}5698...} \\ &\text{nie-reël}\end{aligned}$$

z) $\sqrt{\dfrac{\cot 103^\circ + \sin 1090^\circ}{\sec 10^\circ + 5}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\cot 85^\circ + \sin 1090^\circ}{\sec 10^\circ + 5}} &= \sqrt{\frac{\frac{1}{\tan 85^\circ} + \sin 1090^\circ}{\frac{1}{\cos 10^\circ} + 5}} \\ &= \sqrt{\frac{0{,}2611...}{6{,}015...}} \\ &= \sqrt{0{,}043411...} \\ &\approx 0{,}21\end{aligned}$$

2. As $x = 39^\circ$ en $y = 21^\circ$, gebruik 'n sakrekenaar om te bepaal op die volgende bewerings waar of vals is:

a) $\cos x + 2\cos x = 3\cos x$

Oplossing:

LK

$$\begin{aligned}\cos x + 2\cos x &= \cos 39^\circ + 2\cos 39^\circ \\ &= 0{,}7771... + 1{,}55429... \\ &= 2{,}3314... \\ &\approx 2{,}33\end{aligned}$$

RK

$$\begin{aligned}3\cos x &= 3\cos 39^\circ \\ &= 2{,}3314... \\ &\approx 2{,}33\end{aligned}$$

Dus is die bewering waar.

b) $\cos 2y = \cos y + \cos y$

Oplossing:

LK

$$\begin{aligned}\cos 2y &= \cos 2(21^\circ) \\ &= 0{,}7431... \\ &\approx 0{,}74\end{aligned}$$

RK

$$\begin{aligned}\cos y + \cos y &= \cos 21^\circ + \cos 21^\circ \\ &= 0{,}93358... + 0{,}93358... \\ &= 1{,}86716... \\ &\approx 1{,}86\end{aligned}$$

Dus is die bewering vals.

c) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Oplossing:

LK

$$\begin{aligned}\tan x &= \tan 39° \\ &= 0{,}809784... \\ &\approx 0{,}81\end{aligned}$$

RK

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\sin 39°}{\cos 39°} \\ &= \frac{0{,}62932...}{0{,}777145...} \\ &= 0{,}80978... \\ &\approx 0{,}81\end{aligned}$$

Dus is die bewering waar.

d) $\cos(x + y) = \cos x + \cos y$

Oplossing:

LK

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos 39° + 21° \\ &\approx 0{,}5\end{aligned}$$

RK

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= \cos 39° + \cos 21° \\ &= 0{,}777145... + 0{,}933358... \\ &= 1{,}71072... \\ &\approx 1{,}71\end{aligned}$$

Dus is die bewering vals.

3. Los op vir x in $5^{\tan x} = 125$.

Oplossing:

Om hierdie probleem op te los, moet ons van eksponente onthou dat as $a^x = a^y$ dan $x = y$. Dan weet ons dat $125 = 5^3$. Nou kan ons die probleem oplos:

$$\begin{aligned}5^{\tan x} &= 5^3 \\ \therefore \tan x &= 3 \\ x &= 71{,}56505... \\ &\approx 71{,}57\end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2J9N	1b. 2J9P	1c. 2J9Q	1d. 2J9R	1e. 2J9S	1f. 2J9T
1g. 2J9V	1h. 2J9W	1i. 2J9X	1j. 2J9Y	1k. 2J9Z	1l. 2JB2
1m. 2JB3	1n. 2JB4	1o. 2JB5	1p. 2JB6	1q. 2JB7	1r. 2JB8
1s. 2JB9	1t. 2JBB	1u. 2JBC	1v. 2JBD	1w. 2JBF	1x. 2JBG
1y. 2JBH	1z. 2JBJ	2. 2JBK	3. 2JBM		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Exercise 5 – 3:

1. Kies uit die gegewe lys die antwoord wat die naaste aan reg is vir elke uitdrukking:
   a) $\cos 45^\circ$

   $$\frac{1}{2} \quad 1 \quad \sqrt{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   Oplossing:

   $$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   b) $\sin 45^\circ$

   $$\sqrt{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} \quad 1$$

   Oplossing:

   $$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   c) $\tan 30^\circ$

   $$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

   Oplossing:

   $$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

   d) $\tan 60^\circ$

   $$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \frac{1}{1}$$

   Oplossing:

   $$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

   e) $\cos 45^\circ$

   $$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{2}$$

   Oplossing:

   $$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   f) $\tan 30^\circ$

   $$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

   Oplossing:

   $$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

g) $\tan 30°$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{1}$$

Oplossing:

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

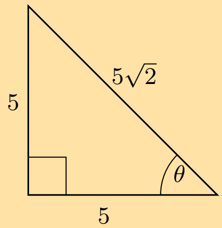
h) $\cos 60°$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Oplossing:

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

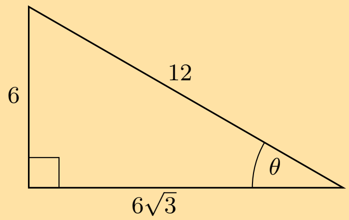
2. Bepaal die waarde van $\cos\theta$ in die volgende driehoek en laat die antwoord in wortelvorm:



Oplossing:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}\\ &= \frac{5}{5\sqrt{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

3. Los op vir $\tan\theta$ in die volgende driehoek en laat die antwoord in wortelvorm:



Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aangrensende}}\\ &= \frac{6}{6\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

4. Bereken die waarde van die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) $\sin 45° \times \cos 45°$

Oplossing:

Vir beide verhoudings is die gegewe hoek 45°. Dit is een van die spesiale hoeke. As ons spesiale hoeke gebruik, sien ons dat $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} \sin 45° \times \cos 45° &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $\cos 60° + \tan 45°$

Oplossing:

Ons word hoeke van 45° en 60° gegee. Hierdie is beide spesiale hoeke. Ons let op dat $\cos 60° = \frac{1}{2}$ en $\tan 45° = 1$ spesiale hoeke gebruik.

$$\begin{aligned} \cos 60° + \tan 45° &= \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

c) $\sin 60° - \cos 60°$

Oplossing:

'n Hoek van 60° word gegee vir beide verhoudings. Dit is een van die spesiale hoeke. Ons let op dat $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\cos 60° = \frac{1}{2}$ met die gebruik van spesiale hoeke.

$$\begin{aligned} \sin 60° - \cos 60° &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{aligned}$$

5. Evalueer die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. Kies die antwoord wat die naaste aan reg is uit die gegewe lys.

a) $\tan 45° \div \sin 60°$

$$\tfrac{2}{\sqrt{3}} \quad \tfrac{\sqrt{3}}{1} \quad \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \tfrac{1}{1} \quad \tfrac{1}{2}$$

Oplossing:

Ons moet spesiale hoeke gebruik om hierdie probleem op te los. Skryf eers elke verhouding neer met die gebruik van spesiale hoeke en vereenvoudig die antwoord.

$$\begin{aligned} \tan 45° \div \sin 60° &= \frac{1}{1} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

b) $\tan 30° - \sin 60°$

$$0 \quad \tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad -\tfrac{1}{2\sqrt{3}} \quad \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Oplossing:

Ons moet spesiale hoeke gebruik om hierdie probleem op te los. Skryf eers elke verhouding neer met die gebruik van spesiale hoeke en vereenvoudig die antwoord.

$$\begin{aligned}
\tan 30° - \sin 60° &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{2 - \left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\right)}{(2)\left(\sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{2-3}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

c) $\sin 30° - \tan 45° - \sin 30°$

$$-\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad -1 \quad -\tfrac{1}{\sqrt{3}} \quad -\tfrac{\sqrt{3}}{1} \quad -\tfrac{7}{2\sqrt{3}}$$

Oplossing:

Ons moet spesiale hoeke gebruik om hierdie probleem op te los. Skryf eers elke verhouding neer met die gebruik van spesiale hoeke en vereenvoudig die antwoord.

$$\begin{aligned}
\sin 30° - \tan 45° - \sin 30° &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1-2-1}{2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

d) $\tan 30° \div \tan 30° \div \sin 45°$

$$\tfrac{\sqrt{3}}{1} \quad \tfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \tfrac{2}{\sqrt{3}} \quad \tfrac{\sqrt{2}}{1} \quad \tfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Oplossing:

Ons moet spesiale hoeke gebruik om hierdie probleem op te los. Skryf eers elke verhouding neer met die gebruik van spesiale hoeke en vereenvoudig die antwoord.

$$\begin{aligned}
\tan 30° \div \tan 30° \div \sin 45° &= \frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{1}\right) \div \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= 1 \times \frac{\sqrt{2}}{1} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{1}
\end{aligned}$$

e) $\sin 45° \div \sin 30° \div \cos 45°$

$$\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \tfrac{4}{\sqrt{3}} \quad 2 \quad \tfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Oplossing:

Ons moet spesiale hoeke gebruik om hierdie probleem op te los. Skryf eers elke verhouding neer met die gebruik van spesiale hoeke en vereenvoudig die antwoord.

$$\begin{aligned}
\sin 45° \div \sin 30° \div \cos 45° &= \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{1}\right) \div \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

f) $\tan 60^\circ - \tan 60^\circ - \sin 60^\circ$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $-\frac{1}{1}$ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

Oplossing:
Ons moet spesiale hoeke gebruik om hierdie probleem op te los. Skryf eers elke verhouding neer met die gebruik van spesiale hoeke en vereenvoudig die antwoord.

$$\begin{aligned}\tan 60^\circ - \tan 60^\circ - \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{1} - \frac{\sqrt{3}}{1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{(2)\left(\sqrt{3}\right) - (2)\left(\sqrt{3}\right) - \sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

g) $\cos 45^\circ - \sin 60^\circ - \sin 45^\circ$

$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $-\frac{7}{2\sqrt{3}}$ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Oplossing:
Ons moet spesiale hoeke gebruik om hierdie probleem op te los. Skryf eers elke verhouding neer met die gebruik van spesiale hoeke en vereenvoudig die antwoord.

$$\begin{aligned}\cos 45^\circ - \sin 60^\circ - \sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{2 - \left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\right) - 2}{(2)\left(\sqrt{2}\right)}\\ &= \frac{-\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

6. Gebruik spesiale hoeke om te wys dat:

a) $\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \tan 60^\circ$
Oplossing:
Ons moet spesiale hoeke gebruik, dus skryf ons elke verhouding neer aan die hand van spesiale hoeke en vereenvoudig dan elke kant van die vergelyking.
LK

$$\begin{aligned}\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1}\\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

RK

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Dus is die vergelyking waar.

b) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$
Oplossing:
Ons moet spesiale hoeke gebruik, dus skryf ons elke verhouding neer aan die hand van spesiale hoeke en vereenvoudig dan elke kant van die vergelyking.
LK

$$\sin^2 45° + \cos^2 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= 1$$

RK = 1

Dus is die vergelyking waar.

c) $\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°}$

Oplossing:

Ons moet spesiale hoeke gebruik, dus skryf ons elke verhouding neer aan die hand van spesiale hoeke en vereenvoudig dan elke kant van die vergelyking.

LK

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

RK

$$\sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dus is die vergelyking waar.

7. Gebruik die definisies van die trigonometriese verhoudings om die volgende vrae te beantwoord:

a) Verduidelik hoekom $\sin\alpha \leq 1$ vir alle waardes van α.

Oplossing:

Die sinusverhouding word gedefinieer as $\frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}$. In enige reghoekige driehoek, is die skuinssy die langste sy. Dus die maksimumlengte van die teenoorstaande sy is gelyk aan die lengte van die skuinssy. Die maksimwaarde van die sinusverhouding is dan $\frac{\text{skuinssy}}{\text{skuinssy}} = 1$.

b) Verduidelik waarom $\cos\alpha$ 'n maksimumwaarde het van 1.

Oplossing:

Die cosinusverhouding word gedefinieer as $\frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}$. In enige reghoekige driehoek is die skuinssy die langste sy. Dus die maksimumlengte van die aangrensende sy is gelyk aan die lengte van die skuinssy. Die maksimumwaarde van die cosinusverhouding is dus $\frac{\text{skuinssy}}{\text{skuinssy}} = 1$.

c) Is daar 'n maksimumwaarde vir $\tan\alpha$?

Oplossing:

Die tangensverhouding word gedefinieer as $\frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$. Aangesien die teenoorstaande en aangrensende sye enige lengte kan hê (solank dit kleiner of gelyk is aan die lengte van die skuinssy), dus daar is geen maksimumwaarde vir die tangensverhouding nie.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JBN	1b. 2JBP	1c. 2JBQ	1d. 2JBR	1e. 2JBS	1f. 2JBT
1g. 2JBV	1h. 2JBW	2. 2JBX	3. 2JBY	4a. 2JBZ	4b. 2JC2
4c. 2JC3	5a. 2JC4	5b. 2JC5	5c. 2JC6	5d. 2JC7	5e. 2JC8
5f. 2JC9	5g. 2JCB	6a. 2JCC	6b. 2JCD	6c. 2JCF	7a. 2JCG
7b. 2JCH	7c. 2JCJ				

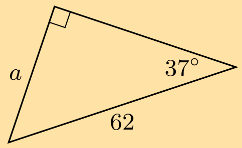
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Vind lengtes

Exercise 5 – 4:

1. Vind die lengte van 'n sy met 'n letter gemerk in elke driehoek. Gee jou antwoorde korrek tot 2 desimale plekke.

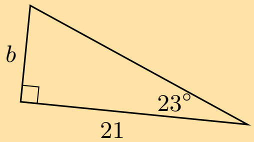
a)



Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}}\\ \sin 37° &= \frac{a}{62}\\ 62(0{,}6018...) &= a\\ a &= 36{,}10890...\\ &\approx 36{,}11\end{aligned}$$

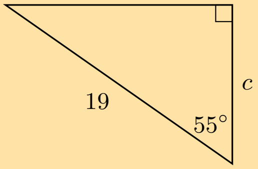
b)



Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aangrensend}}\\ \tan 23° &= \frac{b}{21}\\ 21(0{,}42447...) &= b\\ b &= 8{,}91397...\\ &\approx 8{,}91\end{aligned}$$

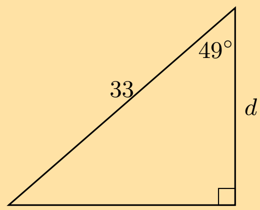
c)



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\text{aangrensend}}{\text{skuinssy}}\\
\cos 55° &= \frac{c}{19}\\
19(0{,}5735...) &= c\\
c &= 10{,}89795...\\
&\approx 10{,}90
\end{aligned}
$$

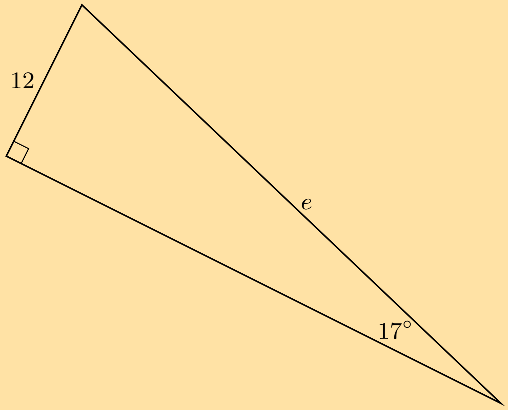
d)



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\text{aangrensend}}{\text{skuinssy}}\\
\cos 49° &= \frac{d}{33}\\
33(0{,}65605...) &= d\\
d &= 21{,}64994...\\
&\approx 21{,}65
\end{aligned}
$$

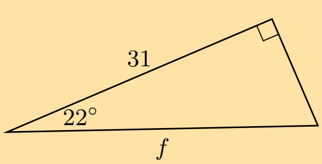
e)



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}}\\
\sin 17° &= \frac{e}{12}\\
12(0{,}29237...) &= e\\
e &= 3{,}50846...\\
&\approx 3{,}51
\end{aligned}
$$

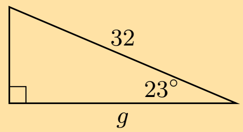
f)



Oplossing:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\text{aangrensend}}{\text{skuinssy}}\\ \cos 22° &= \frac{31}{f}\\ f(0{,}92718...) &= 31\\ f &= 33{,}434577...\\ &\approx 33{,}43\end{aligned}$$

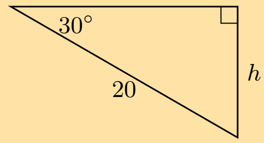
g)



Oplossing:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\text{aangrensend}}{\text{skuinssy}}\\ \cos 23° &= \frac{g}{32}\\ 32(0{,}92050...) &= g\\ g &= 29{,}4561...\\ &\approx 29{,}46\end{aligned}$$

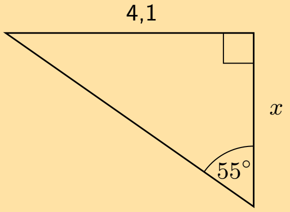
h)



Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}}\\ \sin 30° &= \frac{h}{20}\\ 20(0{,}5) &= h\\ h &\approx 10\end{aligned}$$

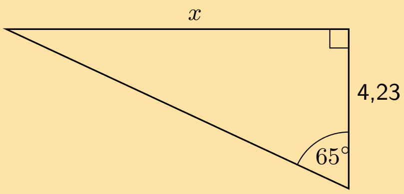
i)



Oplossing:

$$\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aangrensend}}$$
$$\tan 55^\circ = \frac{4{,}1}{x}$$
$$x = 2{,}87$$

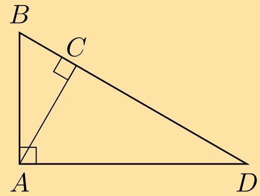
j)



Oplossing:

$$\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aangrensend}}$$
$$\tan 65^\circ = \frac{x}{4{,}23}$$
$$x = 9{,}06$$

2. Skryf twee verhoudings neer vir elk van die volgende in terme van die sye: AB; BC; BD; AD; DC en AC.



a) $\sin\hat{B}$
Oplossing:
Ons let op dat driehoeke ABC en ABD beide hoek B bevat, dus kan ons hierdie driehoeke gebruik om die verhoudings neer te skryf:

$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{BD}$$

b) $\cos\hat{D}$
Oplossing:
Ons let op dat driehoeke ACD en ABD beide hoek D bevat, dus kan ons hierdie driehoeke gebruik om die verhoudings neer te skryf:

$$\cos\hat{D} = \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$$

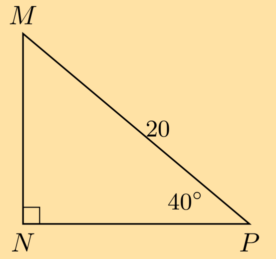
c) $\tan\hat{B}$
Oplossing:
Ons let op dat driehoeke ABC en ABD beide hoek B bevat, dus kan ons hierdie driehoeke gebruik om die verhoudings neer te skryf:

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

3. In $\triangle MNP$, $\hat{N} = 90°$, $MP = 20$ en $\hat{P} = 40°$. Bereken NP en MN (korrek tot 2 desimale plekke).

Oplossing:

Skets 'n driehoek:



Om MN te vind, gebruik ons die sinusverhouding:

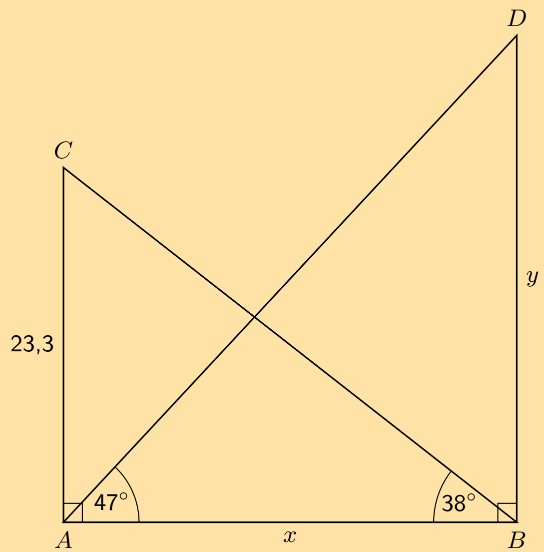
$$\begin{aligned} \sin \hat{P} &= \frac{MN}{MP} \\ \sin 40° &= \frac{MN}{20} \\ 20(0{,}642787...) &= MN \\ MN &= 12{,}8557... \\ &\approx 12{,}86 \end{aligned}$$

Om NP te vind, gebruik ons die cosinusverhouding:

$$\begin{aligned} \cos \hat{P} &= \frac{NP}{MP} \\ \cos 40° &= \frac{NP}{20} \\ 20(0{,}76604...) &= NP \\ NP &= 15{,}32088... \\ &\approx 15{,}32 \end{aligned}$$

Dus $MN = 12{,}86$ en $NP = 15{,}32$

4. Bereken x en y in die volgende diagram.



Oplossing:

Om x te vind, gebruik ons $\triangle ABC$ en die tangensverhouding. Om y te vind, gebruik ons $\triangle ABD$ en die tangensverhouding.

$$\tan 38° = \frac{23,3}{x}$$
$$x = \frac{23,3}{\tan 38°}$$
$$= 29,82264...$$
$$\approx 29,82$$

$$\tan 47° = \frac{y}{29,82264...}$$
$$y = 29,82264... \tan 47°$$
$$= 31,98086...$$
$$\approx 31,98$$

Dus $x = 29,82$ en $y = 31,98$.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JCM 1b. 2JCN 1c. 2JCP 1d. 2JCQ 1e. 2JCR 1f. 2JCS 1g. 2JCT 1h. 2JCV
1i. 2JCW 1j. 2JCX 2. 2JCY 3. 2JCZ 4. 2JD2

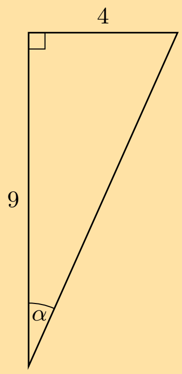
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Vind 'n hoek

Exercise 5 – 5:

Bepaal α in die volgende reghoekige driehoeke:

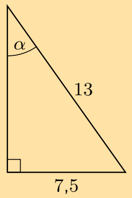
1.



Oplossing:

$$\tan \alpha = \frac{4}{9}$$
$$= 0,4444...$$
$$\alpha = 23,9624...$$
$$\approx 23,96°$$

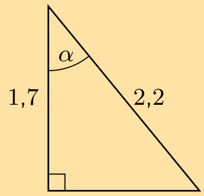
2.



Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{7{,}5}{13}\\ &= 0{,}5769...\\ \alpha &= 35{,}2344...\\ &\approx 35{,}23°\end{aligned}$$

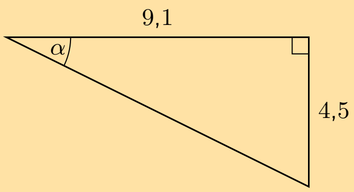
3.



Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{1{,}7}{2{,}2}\\ \alpha &= 39{,}4005...\\ &\approx 39{,}40°\end{aligned}$$

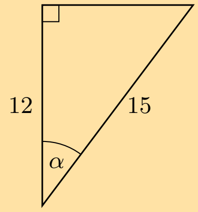
4.



Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{4{,}5}{9{,}1}\\ &= 0{,}49450...\\ \alpha &= 26{,}3126...\\ &\approx 26{,}31°\end{aligned}$$

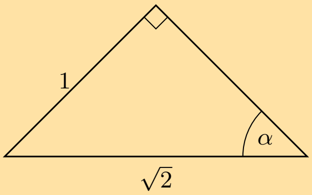
5.



Oplossing:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{12}{15}\\ &= 0{,}8\\ \alpha &= 36{,}869897...\\ &\approx 36{,}87°\end{aligned}$$

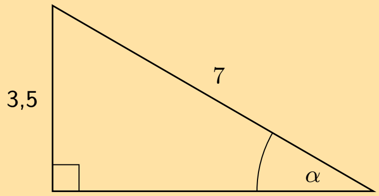
6.



Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 0{,}7071... \\ \alpha &= 45° \end{aligned}$$

7.



Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{3{,}5}{7} \\ &= 0{,}5 \\ \alpha &= 30° \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JD3 2. 2JD4 3. 2JD5 4. 2JD6 5. 2JD7 6. 2JD8
7. 2JD9

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

As leerders 'n wiskunde foutboodskap op hulle sakrekenaars kry, moet hulle aangemoedig word om te dink wat dit kon veroorsaak het. Dit is ook belangrik om seker te maak dat hulle weet hulle moet eerder 'geen oplossing' neerskryf as 'wiskunde fout' wanneer dit gebeur.

Exercise 5 – 6:

1. Bepaal die hoek (korrek tot 1 desimale plek):

   a) $\tan\theta = 1{,}7$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= 1{,}7 \\ \theta &= 59{,}5344... \\ &\approx 59{,}5° \end{aligned}$$

   b) $\sin\theta = 0{,}8$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 0{,}8 \\ \theta &= 53{,}1301... \\ &\approx 53{,}1° \end{aligned}$$

c) $\cos\alpha = 0{,}32$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= 0{,}32 \\ \alpha &= 71{,}3370... \\ &\approx 71{,}3° \end{aligned}$$

d) $\tan\beta = 4{,}2$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \tan\beta &= 4{,}2 \\ \beta &= 76{,}60750... \\ &\approx 76{,}6° \end{aligned}$$

e) $\tan\theta = 5\frac{3}{4}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= 5\frac{3}{4} \\ &= 5{,}75 \\ \theta &= 80{,}13419... \\ &\approx 80{,}1° \end{aligned}$$

f) $\sin\theta = \frac{2}{3}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{2}{3} \\ &= 0{,}666... \\ \theta &= 41{,}8103... \\ &\approx 41{,}8° \end{aligned}$$

g) $\cos\beta = 1{,}2$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos\beta &= 1{,}2 \\ &\text{geen oplossing} \end{aligned}$$

h) $4\cos\theta = 3$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 4\cos\theta &= 3 \\ \cos\theta &= \frac{3}{4} \\ &= 0{,}75 \\ \theta &= 41{,}40962... \\ &\approx 41{,}4° \end{aligned}$$

i) $\cos 4\theta = 0{,}3$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= 0{,}3 \\ 4\theta &= 72{,}54239\ldots \\ \theta &= 18{,}135599\ldots \\ &\approx 18{,}1^\circ \end{aligned}$$

j) $\sin\beta + 2 = 2{,}65$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin\beta + 2 &= 2{,}65 \\ \sin\beta &= 0{,}65 \\ \beta &= 40{,}54160\ldots \\ &\approx 40{,}5^\circ \end{aligned}$$

k) $2\sin\theta + 5 = 0{,}8$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2\sin\theta + 5 &= 0{,}8 \\ 2\sin\theta &= -4{,}2 \\ \sin\theta &= -2{,}1 \\ &\text{geen oplossing} \end{aligned}$$

l) $3\tan\beta = 1$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3\tan\beta &= 1 \\ \tan\beta &= \frac{1}{3} \\ &= 0{,}3333\ldots \\ \beta &= 18{,}434948\ldots \\ &\approx 18{,}4^\circ \end{aligned}$$

m) $\sin 3\alpha = 1{,}2$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= 1{,}2 \\ &\text{geen oplossing} \end{aligned}$$

n) $\tan\frac{\theta}{3} = \sin 48^\circ$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \tan\frac{\theta}{3} &= \sin 48^\circ \\ &= 0{,}7431\ldots \\ \frac{\theta}{3} &= 36{,}61769\ldots \\ \theta &= 109{,}8530\ldots \\ &\approx 109{,}9^\circ \end{aligned}$$

o) $\frac{1}{2}\cos 2\beta = 0{,}3$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cos 2\beta &= 0{,}3 \\
\cos 2\beta &= 0{,}6 \\
2\beta &= 53{,}1301... \\
\beta &= 26{,}56505... \\
&\approx 26{,}6°
\end{aligned}$$

p) $2\sin 3\theta + 1 = 2{,}6$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
2\sin 3\theta + 1 &= 2{,}6 \\
2\sin 3\theta &= 1{,}6 \\
\sin 3\theta &= 0{,}8 \\
3\theta &= 53{,}1301... \\
\theta &= 17{,}71003... \\
&\approx 17{,}7°
\end{aligned}$$

2. As $x = 16°$ en $y = 36°$, gebruik jou sakrekenaar om elk van die volgende te bereken, korrek tot 3 desimale plekke.

a) $\sin(x - y)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin(x - y) &= \sin(16 - 36) \\
&= \sin(-20) \\
&= -0{,}3420201... \\
&\approx -0{,}342
\end{aligned}$$

b) $3\sin x$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
3\sin x &= 3\sin(16) \\
&= 0{,}826912... \\
&\approx 0{,}827
\end{aligned}$$

c) $\tan x - \tan y$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\tan x - \tan y &= \tan(16) - \tan(36) \\
&= -0{,}439797... \\
&\approx -0{,}440
\end{aligned}$$

d) $\cos x + \cos y$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos y &= \cos(16) + \cos(36) \\
&= 1{,}77027... \\
&\approx 1{,}770
\end{aligned}$$

e) $\frac{1}{3}\tan y$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\tan y &= \frac{1}{3}\tan(36) \\
&= 0{,}24218... \\
&\approx 0{,}242
\end{aligned}$$

f) $\text{cosec}(x - y)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{cosec}(x - y) &= \text{cosec}(16 - 36) \\
&= \text{cosec}(-20) \\
&= \frac{1}{\sin(-20)} \\
&= -2{,}92380... \\
&\approx -2{,}924
\end{aligned}$$

g) $2\cos x + \cos 3y$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
2\cos x + \cos 3y &= 2\cos(16) + \cos(3(36)) \\
&= 2\cos 16 + \cos 108 \\
&= 1{,}61350... \\
&\approx 1{,}614
\end{aligned}$$

h) $\tan(2x - 5y)$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\tan(2x - 5y) &= \tan(2(16) - 5(36)) \\
&= \tan(-148) \\
&= 0{,}624869... \\
&\approx 0{,}625
\end{aligned}$$

3. In elk van die volgende, bepaal die waardes van x korrek tot twee desimale plekke.

a) $\sin x = 0{,}814$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin x &= 0{,}814 \\
x &= 54{,}48860... \\
&\approx 54{,}49°
\end{aligned}$$

b) $\sin x = \tan 45°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \tan 45° \\
&= 1 \\
x &= 90°
\end{aligned}$$

c) $\tan 2x = 3{,}123$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\tan 2x &= 3{,}123 \\
2x &= 72{,}244677... \\
x &= 36{,}12233... \\
&\approx 36{,}12°
\end{aligned}$$

d) $\tan x = 3\sin 41°$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\tan x &= 3\sin 41° \\
&= 1{,}96817... \\
x &= 63{,}06558... \\
&\approx 63{,}07°
\end{aligned}$$

e) $\sin(2x + 45) = 0{,}123$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin(2x + 45°) &= 0{,}123 \\ 2x + 45 &= 7{,}06527... \\ 2x &= -37{,}9347... \\ x &= -18{,}9673... \\ &\approx -18{,}97° \end{aligned}$$

f) $\sin(x - 10°) = \cos 57°$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin(x - 10°) &= \cos 57° \\ &= 0{,}54463... \\ x - 10 &= 33 \\ x &= 43° \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

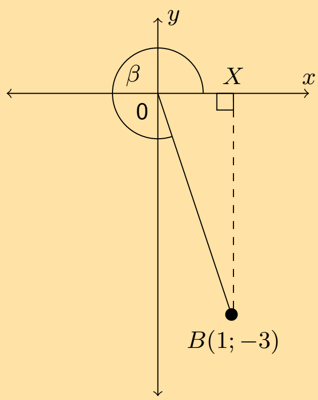
1a. 2JDB	1b. 2JDC	1c. 2JDD	1d. 2JDF	1e. 2JDG	1f. 2JDH
1g. 2JDJ	1h. 2JDK	1i. 2JDM	1j. 2JDN	1k. 2JDP	1l. 2JDQ
1m. 2JDR	1n. 2JDS	1o. 2JDT	1p. 2JDV	2a. 2JDW	2b. 2JDX
2c. 2JDY	2d. 2JDZ	2e. 2JF2	2f. 2JF3	2g. 2JF4	2h. 2JF5
3a. 2JF6	3b. 2JF7	3c. 2JF8	3d. 2JF9	3e. 2JFB	3f. 2JFC

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

5.8 Definieer verhoudings in die Cartesiese vlak

Exercise 5 – 7:

1. B is 'n punt in die Cartesiese vlak. Bepaal sonder 'n sakrekenaar:



a) OB

Oplossing:

OB is die skuinssy van $\triangle BOX$. Ons kan die lengte van OB bereken met die stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OX^2 + XB^2 \\ &= (1)^2 + (3)^2 \\ &= 10 \\ OB &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

b) $\cos\beta$
Oplossing:
Van die diagram en die eerste vraag weet ons $x = 1$, $y = -3$ en $r = \sqrt{10}$.

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{x}{r} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

c) cosec β
Oplossing:
Van die diagram en die eerste vraag weet ons $x = 1$, $y = -3$ en $r = \sqrt{10}$.

$$\begin{aligned} \text{cosec } \beta &= \frac{r}{y} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{-3} \end{aligned}$$

d) $\tan\beta$
Oplossing:
Van die diagram en die eerste vraag weet ons $x = 1$, $y = -3$ en $r = \sqrt{10}$.

$$\begin{aligned} \tan\beta &= \frac{y}{x} \\ &= \frac{-3}{1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

2. As $\sin\theta = 0{,}4$ en θ 'n stomphoek is, bepaal:

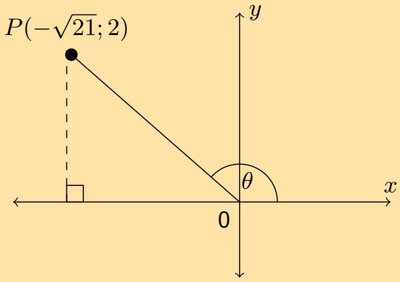
a) $\cos\theta$
Oplossing:
Ons moet eers x, y en r bepaal.

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 0{,}4 \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{2}{5} \\ &= \frac{y}{r} \end{aligned}$$

Dus $y = 2$ en $r = 5$.

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2 - y^2 \\ &= (5)^2 - (2)^2 \\ &= 21 \\ x &= \pm\sqrt{21} \end{aligned}$$

Ons weet die hoek is stomp. 'n Stomphoek is groter as 90° maar kleiner as 180°. Dus is die hoek in die tweede kwadrant en x is negatief. Gevolglik $x = -\sqrt{21}$.
Trek vervolgens 'n skets:



Nou kan ons $\cos\theta$ bepaal:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r}\\ &= \frac{-\sqrt{21}}{5}\end{aligned}$$

b) $\sqrt{21}\tan\theta$

Oplossing:

Van die eerste vraag het ons 'n skets van die hoek en x, y en r.

$$\begin{aligned}\sqrt{21}\tan\theta &= \sqrt{21}\left(\frac{y}{x}\right)\\ &= \sqrt{21}\left(\frac{2}{-\sqrt{21}}\right)\\ &= -2\end{aligned}$$

3. Gegee $\tan\theta = \frac{t}{2}$, waar $0° \leq \theta \leq 90°$. Bepaal die volgende in terme van t:

a) $\sec\theta$

Oplossing:

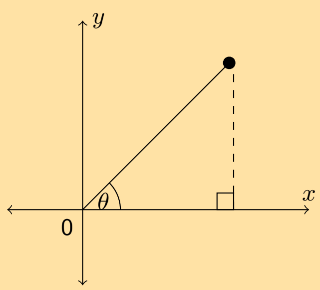
Ons moet eers x, y en r bepaal. Ons weet $\tan\theta = \frac{t}{2}$ is gegee en dus kan ons dit gebruik om x en y te vind.

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{t}{2}\\ \frac{y}{x} &= \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Dus $y = t$ en $x = 2$.

$$\begin{aligned}r^2 &= x^2 + y^2\\ &= (2)^2 + (t)^2\\ &= 4 + t^2\\ r &= \sqrt{4+t^2}\end{aligned}$$

Ons weet dat $0° \leq \theta \leq 90°$. Dus is die hoek in die eerste kwadrant. Selfs al weet ons nie wat die waarde van t is nie, kan ons 'n ruwe skets teken:



Nou kan ons $\sec\theta$ bepaal:

$$\begin{aligned}\sec\theta &= \frac{r}{x}\\ &= \frac{\sqrt{t^2+4}}{2}\end{aligned}$$

b) $\cot\theta$

Oplossing:

Van die eerste vraag het ons 'n skets van die hoek en x, y en r.

$$\begin{aligned}\cot\theta &= \frac{x}{y}\\ &= \frac{2}{t}\end{aligned}$$

c) $\cos^2\theta$

Oplossing:

Van die eerste vraag het ons 'n skets van die hoek en x, y en r.

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \left(\frac{x}{r}\right)^2\\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{t^2+4}}\right)^2\\ &= \frac{4}{t^2+4}\end{aligned}$$

d) $\tan^2\theta - \sec^2\theta$

Oplossing:

Van die eerste vraag het ons 'n skets van die hoek en x, y en r.

$$\begin{aligned}\tan^2\theta - \sec^2\theta &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^2\\ &= \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{t^2+4}}{2}\right)^2\\ &= \frac{t^2}{4} - \frac{t^2+4}{4}\\ &= \frac{t^2-t^2-4}{4}\\ &= -1\end{aligned}$$

4. Gegee: $10\cos\beta + 8 = 0$ en $180° < \beta < 360°$. Bepaal die waarde van:

a) $\cos\beta$

Oplossing:

Ons word 'n vergelyking gegee met $\cos\beta$ daarin. Ons kan hierdie vergelyking herrangskik om $\cos\beta$ te vind:

$$\begin{aligned}10\cos\beta + 8 &= 0\\ \cos\beta &= \frac{-8}{10}\\ &= \frac{-4}{5}\end{aligned}$$

b) $\dfrac{3}{\tan\beta} + 2\sin^2\beta$

Oplossing:

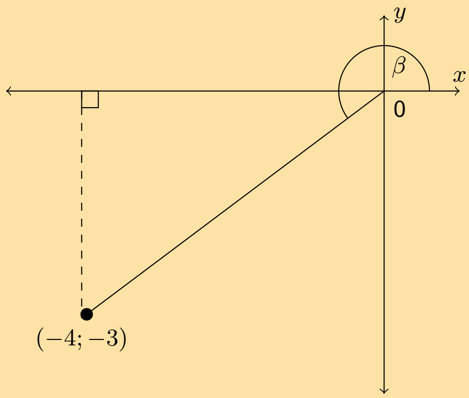
Ons moet eers x, y en r bepaal. In die eerste vraag het ons gevind dat $\cos\beta = \frac{-4}{5}$ en dus kan ons dit gebruik om x en r te kry.

$$\cos\beta = \frac{-4}{5}$$
$$\frac{x}{r} = \frac{-4}{5}$$

Dus $x = -4$ en $r = 5$.

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2 - x^2 \\ &= (5)^2 - (-4)^2 \\ &= 25 - 16 \\ y &= \pm 3 \end{aligned}$$

Ons weet $180^\circ < \beta < 360^\circ$. Dus is die hoek in die derde kwadrant en $y = -3$. Ons kan 'n ruwe skets teken van die hoek:



Ons kan nou $\frac{3}{\tan\beta} + 2\sin^2\beta$ vind:

$$\begin{aligned} \frac{3}{\tan\beta} + 2\sin^2\beta &= \frac{3}{\frac{y}{x}} + 2\left(\frac{y}{r}\right)^2 \\ &= \frac{3x}{y} + \frac{2y^2}{r^2} \\ &= \frac{3(-4)}{-3} + \frac{2(-3)^2}{(5)^2} \\ &= \frac{-12}{3} + \frac{18}{25} \\ &= -4 + \frac{18}{25} \\ &= \frac{-100+18}{25} \\ &= \frac{-82}{25} \end{aligned}$$

5. As $\sin\theta = -\dfrac{15}{17}$ en $\cos\theta < 0$, vind die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) $\cos\theta$

Oplossing:

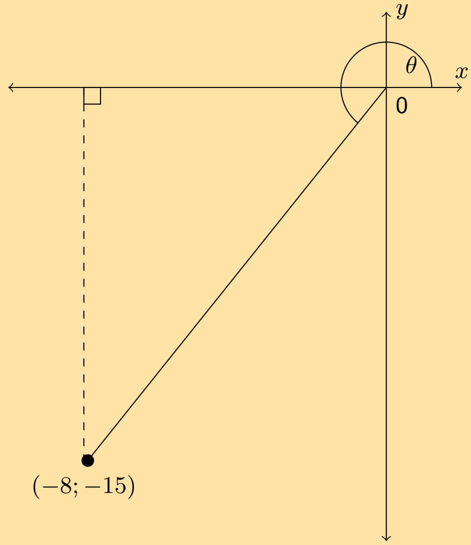
Ons moet eers x, y en r bepaal. Ons weet $\sin\theta = -\frac{15}{17}$ is gegee en dus kan ons dit gebruik om y en r te vind.

$$\sin\theta = -\frac{15}{17}$$
$$\frac{y}{r} = -\frac{15}{17}$$

Dus $y = -15$ en $r = 17$ (onthou r kan nie negatief wees nie).

$$
\begin{aligned}
x^2 &= r^2 - y^2 \\
&= (17)^2 - (-15)^2 \\
&= 289 - 225 \\
x &= \pm 8
\end{aligned}
$$

Ons weet dat $\cos\theta < 0$. Dus die hoek is in die tweede of die derde kwadrant. Van die waarde van y sien ons die hoek moet in die tweede of derde kwadrant lê en $x = -8$.



Nou kan ons $\cos\theta$ bepaal:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{x}{r} \\
&= \frac{-8}{17}
\end{aligned}
$$

b) $\tan\theta$

Oplossing:

Van die eerste deel het ons $x = -8$, $y = -15$ en $r = 17$, so ons kan $\tan\theta$ bepaal.

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{y}{x} \\
&= \frac{-15}{-8} \\
&= \frac{15}{8}
\end{aligned}
$$

c) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$

Oplossing:

Van die eerste deel het ons $x = -8$, $y = -15$ en $r = 17$, so ons kan $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ bepaal.

$$
\begin{aligned}
\cos^2\theta + \sin^2\theta &= \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 \\
&= \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \\
&= \frac{x^2 + y^2}{r^2} \\
&= \frac{(-8)^2 + (-15)^2}{(17)^2} \\
&= \frac{64 + 225}{289} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

6. Vind die waarde van $\sin A + \cos A$ sonder 'n sakrekenaar, gegewe dat $13 \sin A - 12 = 0$, waar $\cos A < 0$.

Oplossing:

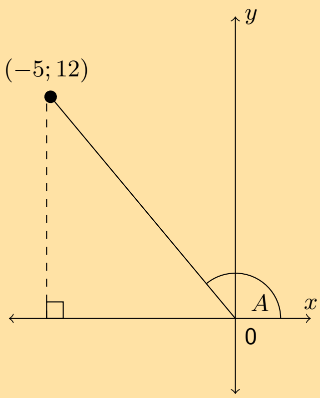
Ons moet eers x, y en r bepaal. Ons weet $13 \sin A - 12 = 0$ is gegee en dus kan ons dit gebruik om y en r te vind.

$$\begin{aligned} 13 \sin A - 12 &= 0 \\ \sin A &= \frac{12}{13} \end{aligned}$$

Dus $y = 12$ en $r = 13$.

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2 - y^2 \\ &= (13)^2 - (12)^2 \\ &= 169 - 144 \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

Ons weet $\cos A < 0$. Dus is die hoek of in die tweede of in die derde kwadrant. Van die waarde van y sien ons dat die hoek in die tweede kwadrant moet lê.



Nou kan ons $\sin A + \cos A$ bepaal:

$$\begin{aligned} \sin A + \cos A &= \frac{y}{r} + \frac{x}{r} \\ &= \frac{y + x}{r} \\ &= \frac{12 - 5}{13} \\ &= \frac{7}{13} \end{aligned}$$

7. As $17 \cos \theta = -8$ en $\tan \theta > 0$ bepaal die volgende met die hulp van 'n diagram (nie 'n sakrekenaar nie).

   a) $\dfrac{\cos \theta}{\sin \theta}$

   Oplossing:

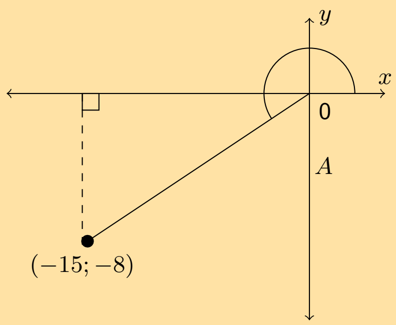
   Ons moet eers x, y en r bepaal. Ons weet $17 \cos \theta = -8$ is gegee en dus kan ons dit gebruik om x en r te vind.

$$\begin{aligned} 17 \cos \theta &= -8 = 0 \\ \cos \theta &= \frac{-8}{17} \end{aligned}$$

   Dus $x = -8$ en $r = 17$.

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2 - x^2 \\ &= (17)^2 - (8)^2 \\ y &= \pm 15 \end{aligned}$$

Ons weet dat $\tan\theta > 0$. Dus is die hoek of in die eerste of in die derde kwadrant. Van die waarde van x, sien ons die hoek moet in die derde kwadrant lê.



Nou kan ons $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ bepaal:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\theta}{\sin\theta} &= \cos\theta \times \frac{1}{\sin\theta} \\
&= \frac{y}{r} \times \frac{1}{\frac{x}{r}} \\
&= \frac{y}{r} \times \frac{r}{x} \\
&= \frac{y}{x} \\
&= \frac{-8}{-15} \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

b) $17\sin\theta - 16\tan\theta$

Oplossing:

Van die eerste deel weet ons $x = -15$, $y = -8$ en $r = 17$.

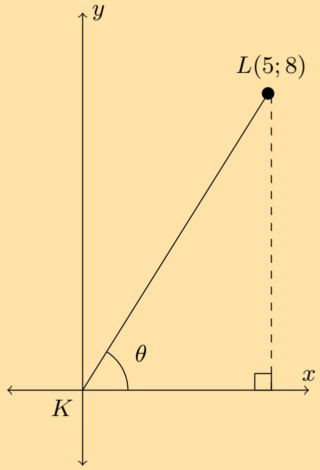
$$\begin{aligned}
17\sin\theta - 16\tan\theta &= 17\frac{y}{r} - 16\frac{y}{x} \\
&= 17\left(\frac{-15}{17}\right) - 16\left(\frac{-15}{-8}\right) \\
&= -15 - 2(15) \\
&= -45
\end{aligned}$$

8. L is 'n punt met koördinate $(5; 8)$ in 'n Cartesiese vlak. LK vorm 'n hoek, θ, met die positiewe x-as. Trek 'n diagram en gebruik dit om die volgende vrae te beanwoord.

a) Vind die afstand LK.

Oplossing:

Ons weet $L(5; 8)$. Dus die hoek lê in die eerste kwadrant. Ons kan dit skets en dan ons skets gebruik om x, y en r te vind.



Dus $x = 5$ en $y = 8$. Ons kan r bereken met die gebruik van die stelling van Pythagoras. Van die diagram let ons op dat $LK = r$.

$$\begin{aligned} LK^2 &= 5^2 + 8^2 \\ &= 89 \\ LK &= \sqrt{89} \end{aligned}$$

b) $\sin\theta$

Oplossing:

Van die vorige vraag weet ons $x = 5$, $y = 8$ en $r = \sqrt{89}$.

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{r} \\ &= \frac{8}{\sqrt{89}} \end{aligned}$$

c) $\cos\theta$

Oplossing:

Van die vorige vraag weet ons $x = 5$, $y = 8$ en $r = \sqrt{89}$.

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} \\ &= \frac{5}{\sqrt{89}} \end{aligned}$$

d) $\tan\theta$

Oplossing:

Van die vorige vraag weet ons $x = 5$, $y = 8$ en $r = \sqrt{89}$.

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

e) cosecθ

Oplossing:

Van die vorige vraag weet ons $x = 5$, $y = 8$ en $r = \sqrt{89}$.

$$\begin{aligned} \text{cosec}\ \theta &= \frac{r}{y} \\ &= \frac{\sqrt{89}}{8} \end{aligned}$$

f) $\sec\theta$

Oplossing:

Van die vorige vraag weet ons $x = 5$, $y = 8$ en $r = \sqrt{89}$.

$$\begin{aligned}\sec\theta &= \frac{r}{x}\\ &= \frac{\sqrt{89}}{5}\end{aligned}$$

g) $\cot\theta$

Oplossing:

Van die vorige vraag weet ons $x = 5$, $y = 8$ en $r = \sqrt{89}$.

$$\begin{aligned}\cot\theta &= \frac{x}{y}\\ &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

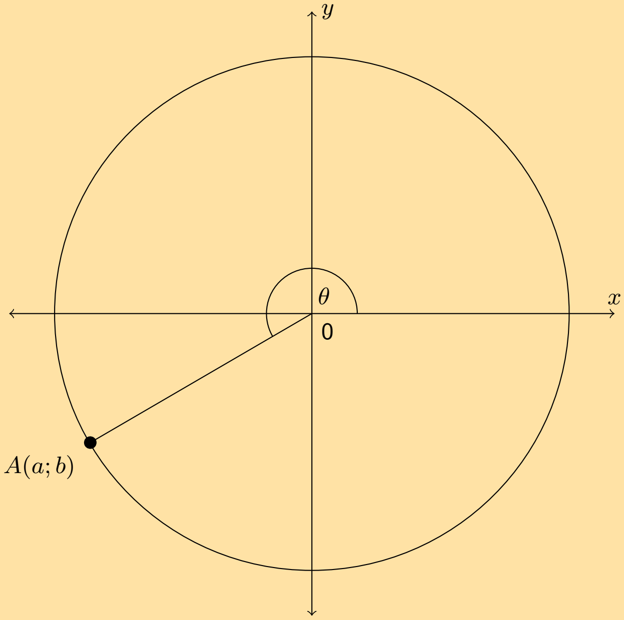
h) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$

Oplossing:

Van die vorige vraag weet ons $x = 5$, $y = 8$ en $r = \sqrt{89}$.

$$\begin{aligned}\sin^2\theta + \cos^2\theta &= \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2\\ &= \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2}\\ &= \frac{y^2 + x^2}{r^2}\\ &= \frac{64 + 25}{89}\\ &= 1\end{aligned}$$

9. Gegewe die volgende diagram en dat $\cos\theta = -\frac{24}{25}$.



a) Noem twee stelle moontlike waardes van a en b.

Oplossing:

Ons moet eers die gegewe inligting gebruik om 'n moontlike stel waardes te vind vir a en b.

Gebruik $\cos\theta = -\frac{24}{25}$ en die feit dat $\cos\theta = \frac{x}{r}$ om te bepaal dat $x = -24$ en $r = 25$. Nou kan ons y vind:

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2 - x^2 \\ &= (25)^2 - (24)^2 \\ &= 625 - 576 \\ &= 49 \\ y &= \pm 7 \end{aligned}$$

Van die diagram sien ons y moet negatief wees.

Dit gee ons een moontlike stel waardes vir a en b: $a = 24$ en $b = -7$.

Nou kan ons sien dat ons eenvoudig die grootte van die sirkel kan verdubbel en die trigonometriese verhoudings sal dieselfde bly. Ons kan selfs die radius van die sirkel vermenigvuldig met enige heelgetal en die trigonometriese verhoudings sal dieselfde bly.

Dus die moontlike stelle waardes vir $A(a, b)$ is veelvoude van $(-24; -7)$. Twee moontlike stelle is $(-24; -7)$ en $(-48; -14)$.

b) As $OA = 100$, meld die waardes van a en b.

Oplossing:

Let eerstens in die oorspronklike diagram op dat $OA = 25$. Nou vermenigvuldig ons OA met 4. Dit beteken dat die x en y waardes ook met 4 vermenigvuldig moet word.

Dus $a = 4(-24) = -96$ en $b = 4(-7) = -28$.

c) Bepaal vervolgens sonder 'n sakrekenaar die waarde van $\sin\theta$.

Oplossing:

Die vraag sê: "vervolgens". Dit beteken ons moet die waardes vir a en b wat op skaal vergroot is, gebruik en nie die oorspronklike waardes nie. Ons weet $x = -96$, $y = -28$ en $r = 100$.

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{r} \\ &= \frac{-28}{100} \\ &= \frac{-7}{25} \end{aligned}$$

Let op dat die antwoord gereduseer is tot die oorspronklike waardes van y en r, soos wat ons verwag het van die eerste vraag.

10. As $\tan\alpha = \frac{5}{-12}$ en $0° \leq \alpha \leq 180°$, bepaal **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar** die waarde van $\frac{12}{\cos\alpha}$

Oplossing:

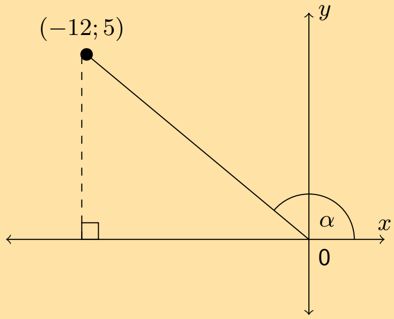
Ons moet eers x, y en r bepaal. Ons weet $\tan\alpha = \frac{5}{-12}$ is gegee en dus kan ons dit gebruik om x en y te vind.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{5}{-12} \\ \frac{y}{x} &= \frac{5}{-12} \end{aligned}$$

Dus $y = 5$ en $x = -12$.

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (-12)^2 + (5)^2 \\ &= 144 + 25 \\ r &= 13 \end{aligned}$$

Ons weet dat $0° \leq \alpha \leq 180°$. Dus die hoek is in die eerste of die tweede kwadrant. Van die waardes van x en y sien ons die hoek moet in die tweede kwadrant lê.



Nou kan ons $\frac{12}{\cos\alpha}$ bepaal:

$$\begin{aligned}\frac{12}{\cos\alpha} &= \frac{12}{\frac{x}{r}}\\ &= \frac{12r}{x}\\ &= \frac{12(13)}{-12}\\ &= -13\end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JFF 2. 2JFG 3. 2JFH 4. 2JFJ 5. 2JFK 6. 2JFM
7. 2JFN 8. 2JFP 9. 2JFQ 10. 2JFR

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

5.9 Hoofstuk opsomming

End of chapter Exercise 5 – 8:

1. Sê of elk van die volgende trigonometriese verhoudings korrek geskryf is.

   a) $\sin\theta = \frac{\text{skuinssy}}{\text{aangrensende sy}}$

   Oplossing:

   Ons onthou die definisie van die sinusverhouding: $\sin\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}$. Dus is hierdie trigonometriese verhouding nie korrek geskryf nie.

   b) $\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$

   Oplossing:

   Ons onthou die definisie van die tangensverhouding: $\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$. Dus hierdie trigonometriese verhouding korrek geskryf.

   c) $\sec\theta = \frac{\text{skuinssy}}{\text{aangrensende sy}}$

   Oplossing:

   Ons onthou die definisie van die secansverhouding: $\sec\theta = \frac{\text{skuinssy}}{\text{teenoorstaande sy}}$. Dus is hierdie trigonometriese verhouding nie korrek geskryf nie.

2. Gebruik jou sakrekenaar om die volgende uitdrukkings korrek tot twee desimale te bereken

a) $\tan 80°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \tan 80° &= 5{,}6712... \\ &\approx 5{,}67 \end{aligned}$$

b) $\cos 73°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos 73° &= 0{,}29237... \\ &\approx 0{,}29 \end{aligned}$$

c) $\sin 17°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin 17° &= 0{,}2923... \\ &\approx 0{,}29 \end{aligned}$$

d) $\tan 313°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \tan 313° &= -1{,}07236... \\ &\approx -1{,}07 \end{aligned}$$

e) $\cos 138°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos 138° &= -0{,}743144... \\ &\approx -0{,}74 \end{aligned}$$

f) $\sec 56°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \sec 56° &= \frac{1}{\cos 56°} \\ &= \frac{1}{0{,}5591...} \\ &= 1{,}78829... \\ &\approx 1{,}79 \end{aligned}$$

g) $\cot 18°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \cot 18° &= \frac{1}{\tan 18°} \\ &= \frac{1}{0{,}32491...} \\ &= 3{,}07768... \\ &\approx 3{,}08 \end{aligned}$$

h) $\text{cosec } 37°$
Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{cosec } 37° &= \frac{1}{\sin 37°} \\ &= \frac{1}{0{,}6018...} \\ &= 1{,}66164... \\ &\approx 1{,}66 \end{aligned}$$

i) $\sec 257^\circ$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\sec 257^\circ &= \frac{1}{\cos 257^\circ}\\ &= \frac{1}{-0{,}224951...}\\ &= -4{,}445411...\\ &\approx -4{,}45\end{aligned}$$

j) $\sec 304^\circ$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\sec 304^\circ &= \frac{1}{\cos 304^\circ}\\ &= \frac{1}{0{,}559193...}\\ &= 1{,}788292...\\ &\approx 1{,}79\end{aligned}$$

k) $3\sin 51^\circ$
Oplossing:

$$\begin{aligned}3\sin 51^\circ &= 2{,}3314...\\ &\approx 2{,}33\end{aligned}$$

l) $4\cot 54^\circ + 5\tan 44^\circ$
Oplossing:

$$\begin{aligned}4\cot 54^\circ + 5\tan 44^\circ &= \frac{4}{\tan 54^\circ} + 5\tan 44^\circ\\ &= 7{,}7346...\\ &\approx 7{,}73\end{aligned}$$

m) $\dfrac{\cos 205^\circ}{4}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{\cos 205^\circ}{4} &= -0{,}22657...\\ &\approx -0{,}23\end{aligned}$$

n) $\sqrt{\sin 99^\circ}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin 99^\circ} &= \sqrt{0{,}98768...}\\ &= 0{,}9938...\\ &\approx 0{,}99\end{aligned}$$

o) $\sqrt{\cos 687^\circ + \sin 120^\circ}$
Oplossing:

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos 687^\circ + \sin 120^\circ} &= \sqrt{1{,}7046...}\\ &= 1{,}3056...\\ &\approx 1{,}31\end{aligned}$$

p) $\dfrac{\tan 70^\circ}{\text{cosec } 1^\circ}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{\tan 70^\circ}{\text{cosec } 1^\circ} &= \tan 70^\circ \times \frac{1}{\frac{1}{\sin 1^\circ}} \\ &= \tan 70^\circ \times \sin 1^\circ \\ &= 0{,}04795... \\ &\approx 0{,}05\end{aligned}$$

q) $\sec 84^\circ + 4\sin 0{,}4^\circ \times 50\cos 50^\circ$

Oplossing:

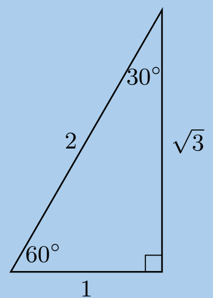
$$\begin{aligned}\sec 84^\circ + 4\sin 0{,}4^\circ \times 50\cos 50^\circ &= \frac{1}{\cos 84^\circ} + 4\sin 0{,}4^\circ \times 50\cos 50^\circ \\ &= 9{,}56677... + 0{,}89749... \\ &= 10{,}46426... \\ &\approx 10{,}46\end{aligned}$$

r) $\dfrac{\cos 40^\circ}{\sin 35^\circ} + \tan 38^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{\cos 40^\circ}{\sin 35^\circ} + \tan 38^\circ &= 1{,}3355... + 0{,}7812... \\ &= 2{,}1168... \\ &\approx 2{,}12\end{aligned}$$

3. Gebruik die driehoek hieronder om die volgende te voltooi:



a) $\sin 60^\circ =$

Oplossing:

Onthou om eers die skuinssy, teenoorstaande en aangrensende sye vir die gegewe hoek te identifiseer. Skryf dan die regte breuk neer vir elke verhouding. Jy kan jou antwoord bevestig deur jou sakrekenaar te gebruik om die waarde van die verhouding vir die spesifieke hoek te vind.

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\cos 60^\circ =$

Oplossing:

Onthou om eers die skuinssy, teenoorstaande en aangrensende sye vir die gegewe hoek te identifiseer. Skryf dan die regte breuk neer vir elke verhouding. Jy kan jou antwoord bevestig deur jou sakrekenaar te gebruik om die waarde van die verhouding vir die spesifieke hoek te vind.

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

c) $\tan 60^\circ =$

Oplossing:

Onthou om eers die skuinssy, teenoorstaande en aangrensende sye vir die gegewe hoek te identifiseer. Skryf dan die regte breuk neer vir elke verhouding. Jy kan jou antwoord bevestig deur jou sakrekenaar te gebruik om die waarde van die verhouding vir die spesifieke hoek te vind.

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

d) $\sin 30° =$

Oplossing:

Onthou om eers die skuinssy, teenoorstaande en aangrensende sye vir die gegewe hoek te identifiseer. Skryf dan die regte breuk neer vir elke verhouding. Jy kan jou antwoord bevestig deur jou sakrekenaar te gebruik om die waarde van die verhouding vir die spesifieke hoek te vind.

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

e) $\cos 30° =$

Oplossing:

Onthou om eers die skuinssy, teenoorstaande en aangrensende sye vir die gegewe hoek te identifiseer. Skryf dan die regte breuk neer vir elke verhouding. Jy kan jou antwoord bevestig deur jou sakrekenaar te gebruik om die waarde van die verhouding vir die spesifieke hoek te vind.

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

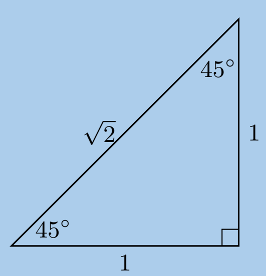
f) $\tan 30° =$

Oplossing:

Onthou om eers die skuinssy, teenoorstaande en aangrensende sye vir die gegewe hoek te identifiseer. Skryf dan die regte breuk neer vir elke verhouding. Jy kan jou antwoord bevestig deur jou sakrekenaar te gebruik om die waarde van die verhouding vir die spesifieke hoek te vind.

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4. Gebruik die driehoek hieronder om die volgende te voltooi:



a) $\sin 45° =$

Oplossing:

Onthou om eers die skuinssy, teenoorstaande en aangrensende sye vir die gegewe hoek te identifiseer. Skryf dan die regte breuk neer vir elke verhouding. Jy kan jou antwoord bevestig deur jou sakrekenaar te gebruik om die waarde van die verhouding vir die spesifieke hoek te vind.

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) $\cos 45° =$

Oplossing:

Onthou om eers die skuinssy, teenoorstaande en aangrensende sye vir die gegewe hoek te identifiseer. Skryf dan die regte breuk neer vir elke verhouding. Jy kan jou antwoord bevestig deur jou sakrekenaar te gebruik om die waarde van die verhouding vir die spesifieke hoek te vind.

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) $\tan 45° =$

Oplossing:

Onthou om eers die skuinssy, teenoorstaande en aangrensende sye vir die gegewe hoek te identifiseer. Skryf dan die regte breuk neer vir elke verhouding. Jy kan jou antwoord bevestig deur jou sakrekenaar te gebruik om die waarde van die verhouding vir die spesifieke hoek te vind.

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

5. Bereken die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. Kies die antwoord wat korrek is uit die gegewe lys.

   a) $\sin 60^\circ - \tan 60^\circ$

$$0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ - \tan 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{1} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

   b) $\tan 30^\circ - \cos 30^\circ$

$$0 \quad -\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \tan 30^\circ - \cos 30^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2 - \left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

   c) $\tan 60^\circ - \sin 60^\circ - \tan 60^\circ$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{1} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{1} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \tan 60^\circ - \sin 60^\circ - \tan 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{1} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{1} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

   d) $\sin 30^\circ \times \sin 30^\circ \times \sin 30^\circ$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ \times \sin 30^\circ \times \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

e) $\sin 45^\circ \times \tan 45^\circ \times \tan 60^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ \times \tan 45^\circ \times \tan 60^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

f) $\cos 60^\circ \times \cos 45^\circ \times \tan 60^\circ$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \frac{3}{4\sqrt{2}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\cos 60^\circ \times \cos 45^\circ \times \tan 60^\circ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

g) $\tan 45^\circ \times \sin 60^\circ \times \tan 45^\circ$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan 45^\circ \times \sin 60^\circ \times \tan 45^\circ &= \frac{1}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

h) $\cos 30^\circ \times \cos 60^\circ \times \sin 60^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\cos 30^\circ \times \cos 60^\circ \times \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

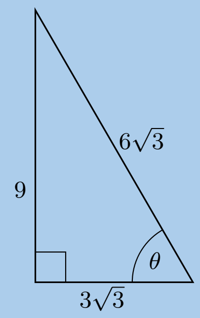
6. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bepaal die waarde van:

$$\sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30° + \tan 45°$$

Oplossing:
Hierdie is almal spesiale hoeke.

$$\begin{aligned}\sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30° + \tan 45° &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + 1 \\ &= \frac{2}{4} + 1 \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

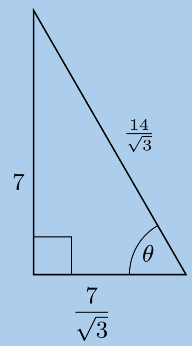
7. Bepaal $\sin\theta$ in die volgende driehoek en laat die antwoord in wortelvorm:



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{9}{6\sqrt{3}}\\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

8. Bepaal $\tan\theta$ in die volgende driehoek en laat die antwoord in wortelvorm:



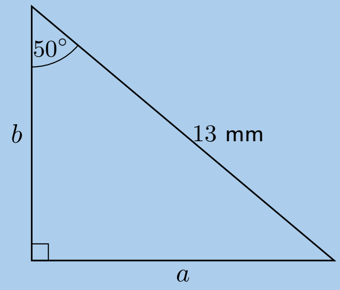
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{7}{\frac{7}{\sqrt{3}}}\\
&= 7 \times \frac{\sqrt{3}}{7}\\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

9. 'n Reghoekige driehoek het skuinssy 13 mm. Vind die lengtes van die ander twee sye as een van die hoeke van die driehoek 50° is.

Oplossing:

Teken eers 'n skets:



Vervolgens kry ons:

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \\
\sin 50° &= \frac{a}{13} \\
a &= 13\sin 50° \\
&= 9{,}9585... \\
&\approx 9{,}96 \text{ mm}
\end{aligned}$$

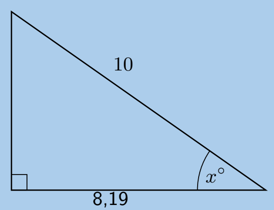
Nou kan ons die stelling van Pythagoras gebruik om die ander sy te vind:

$$\begin{aligned}
b^2 &= c^2 - a^2 \\
&= (13)^2 - (9{,}9585...)^2 \\
&= 69{,}8267... \\
b &= 8{,}3562... \\
&= 8{,}36 \text{ mm}
\end{aligned}$$

Dus die ander twee sye is 9,96 mm en 8,36 mm.

10. Los op vir x tot die naaste heelgetal.

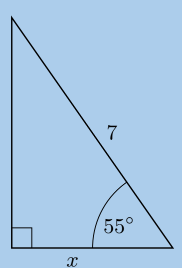
a)



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\text{aangrensend}}{\text{skuinssy}} \\
\cos x &= \frac{8{,}19}{10} \\
&= 0{,}819 \\
x &= 35{,}0151... \\
&\approx 35°
\end{aligned}$$

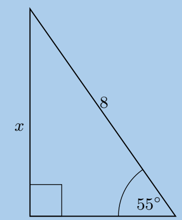
b)



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\text{aangrensend}}{\text{skuinssy}} \\
\cos 55° &= \frac{x}{7} \\
7\cos 55° &= x \\
x &= 4{,}01503... \\
&\approx 4
\end{aligned}$$

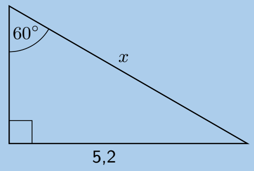
c)



Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}}\\ \sin 55^\circ &= \frac{x}{8}\\ 8\sin 55^\circ &= x\\ x &= 6{,}55321...\\ &\approx 7\end{aligned}$$

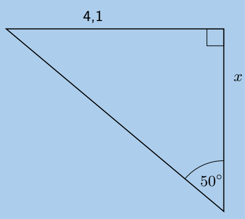
d)



Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}}\\ \sin 60^\circ &= \frac{5{,}2}{x}\\ x &= \frac{5{,}2}{\sin 60^\circ}\\ &= 6{,}00444...\\ &\approx 6\end{aligned}$$

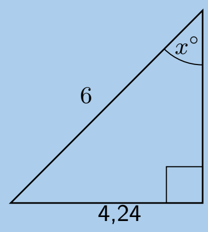
e)



Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aangrensend}}\\ \tan 50^\circ &= \frac{4{,}1}{x}\\ x &= \frac{4{,}1}{\tan 50^\circ}\\ &= 3{,}4403...\\ &\approx 3\end{aligned}$$

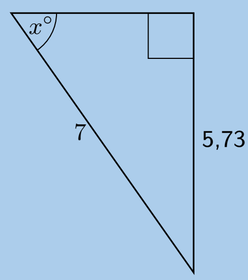
f)



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}} \\
\sin x &= \frac{4{,}24}{6} \\
&= 0{,}7067... \\
x &= 44{,}96434... \\
&\approx 45^\circ
\end{aligned}$$

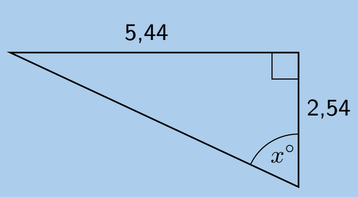
g)



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}} \\
\sin x &= \frac{5{,}73}{7} \\
&= 0{,}81857... \\
x &= 54{,}9420... \\
&\approx 55^\circ
\end{aligned}$$

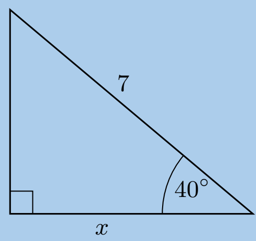
h)



Oplossing:

$$\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aangrensend}}$$
$$\tan x = \frac{5{,}44}{2{,}54}$$
$$= 2{,}14173\ldots$$
$$x = 64{,}9715\ldots$$
$$\approx 65^\circ$$

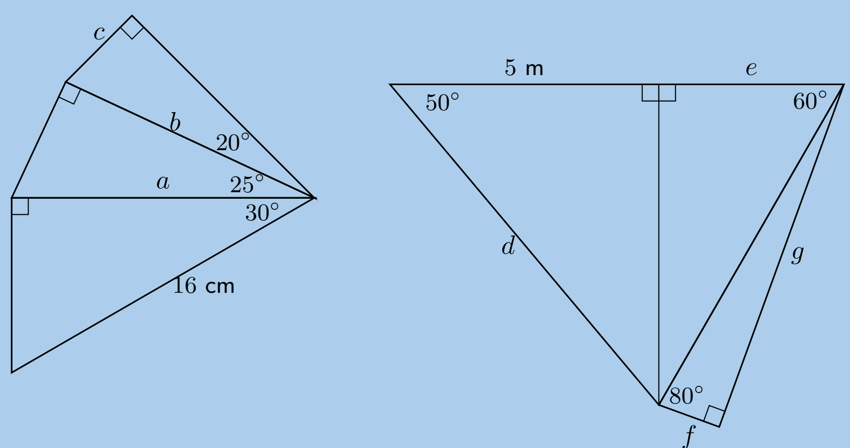
i)



Oplossing:

$$\cos\theta = \frac{\text{aangrensend}}{\text{skuinssy}}$$
$$\cos 40^\circ = \frac{x}{7}$$
$$7\cos 40^\circ = x$$
$$x = 5{,}36231\ldots$$
$$\approx 5$$

11. Bereken die onbekende lengtes in die diagramme hieronder:



Oplossing:
Vir al hierdie probleme gebruik ons die toepaslike trigonometriese verhouding of die stelling van Pythagoras.

Om a en b te vind, gebruik ons $\cos\theta = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}$:

$$\cos 30^\circ = \frac{a}{16}$$
$$a = 16\cos 30^\circ$$
$$\approx 13{,}86 \text{ cm}$$

$$\cos 25^\circ = \frac{b}{13{,}86}$$
$$b = 13{,}86\cos 25^\circ$$
$$\approx 12{,}56 \text{ cm}$$

Om c te vind, gebruik ons $\sin\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}$:

$$\begin{aligned}
\sin 20° &= \frac{c}{12{,}56} \\
c &= 12{,}56 \sin 20° \\
&\approx 4{,}30 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Om d te vind, gebruik ons $\cos\theta = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}$

$$\begin{aligned}
\cos 50° &= \frac{5}{d} \\
d \cos 50 &= 5 \\
d &= \frac{5}{\cos 50°} \\
&\approx 7{,}78 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Vervolgens gebruik ons die stelling van Pythagoras om die derde sy te vind, sodat ons trigonometriese funksies kan gebruik om e te vind:

$$\begin{aligned}
(5)^2 + (7{,}78)^2 &= 85{,}5284 \\
\sqrt{85{,}5284} &\approx 9{,}25
\end{aligned}$$

Ons gebruik $\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$ om e te vind:

$$\begin{aligned}
\tan 60° &= \frac{9{,}25}{e} \\
e \tan 60° &= 9{,}25 \\
e &= \frac{9{,}25}{\tan 60°} \\
&\approx 5{,}34 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Vervolgens gebruik ons die stelling van Pythagoras om die derde sy te kry sodat ons trigonometriese funksies kan gebruik om f en g te vind:

$$\begin{aligned}
(5{,}34)^2 + (7{,}78)^2 &= 89{,}0044... \\
\sqrt{89{,}0044...} &\approx 9{,}44
\end{aligned}$$

Ons gebruik $\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$ om g te vind:

$$\begin{aligned}
\tan 80° &= \frac{9{,}44}{g} \\
g \tan 80° &= 9{,}44 \\
g &= \frac{9{,}44}{\tan 80°} \\
&\approx 1{,}66 \text{ cm}
\end{aligned}$$

En laastens bereken ons f deur die stelling van Pythagoras te gebruik:

$$\begin{aligned}
f^2 &= (9{,}44)^2 - (1{,}65)^2 \\
f &= \sqrt{86{,}39} \\
&\approx 9{,}29 \text{ cm}
\end{aligned}$$

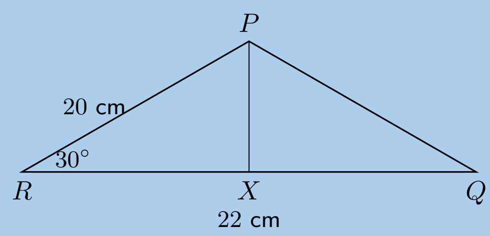
Die finale antwoorde is: $a = 13{,}86$, $b = 12{,}56$, $c = 4{,}30$, $d = 7{,}78$, $e = 5{,}34$, $f = 9{,}29$ en $g = 1{,}66$.

12. In $\triangle PQR$ is $PR = 20$ cm, $QR = 22$ cm en $P\hat{R}Q = 30°$. Die loodregte lyn van P tot QR sny QR by X. Bereken:

a) die lengte XR

Oplossing:

Teken eers 'n skets:



Aangesien ons weet dat $PX \perp QR$ kan ons $\cos\theta = \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}$ gebruik om XR te vind.

$$\begin{aligned} \cos 30° &= \frac{XR}{20} \\ XR &= 20\cos 30° \\ &= 17{,}3205... \\ &\approx 17{,}32 \text{ cm} \end{aligned}$$

b) die lengte PX

Oplossing:

Ons kan $\sin\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}$ gebruik om PX te vind.

$$\begin{aligned} \sin 30° &= \frac{PX}{20} \\ PX &= 20\sin 30° \\ &= 9{,}999... \\ &\approx 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

c) die hoek $Q\hat{P}X$

Oplossing:

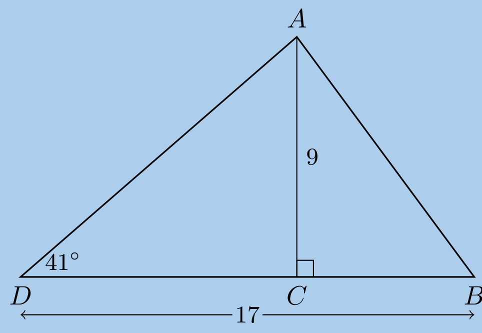
Ons weet wat is die lengte van QR en ons het die lengte van XR bereken, so ons kan die lengte van QX uitwerk:

$$\begin{aligned} QX &= QR - XR \\ &= (22) - (17{,}32) \\ &= 4{,}68 \end{aligned}$$

Aangesien ons twee sye en 'n hoek het, kan ons $\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$ gebruik om die hoek te kry:

$$\begin{aligned} \tan(Q\hat{P}X) &= \frac{4{,}68}{10} \\ &= 0{,}468 \\ Q\hat{P}X &= 25{,}0795... \\ &\approx 25{,}08° \end{aligned}$$

13. Bepaal die grootte van $A\hat{B}C$ in die volgende driehoek.



Oplossing:

Ons gebruik $\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$ om DC te vind:

$$\begin{aligned}\tan 41° &= \frac{9}{DC}\\ DC &= 9\tan 41°\\ &= 7{,}8235...\end{aligned}$$

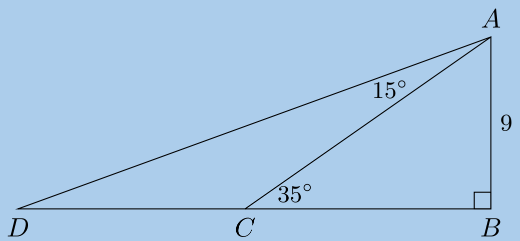
Vervolgens vind ons BC:

$$\begin{aligned}BC &= BD - DC\\ &= 17 - 7{,}8235...\\ &= 9{,}1764...\end{aligned}$$

En dan gebruik ons $\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$ om die hoek te vind:

$$\begin{aligned}\tan A\hat{B}C &= \frac{9}{9{,}1764...}\\ &= 0{,}98077...\\ A\hat{B}C &= 44{,}439...\\ &\approx 44{,}44°\end{aligned}$$

14. Vind die lengte van sy CD in die volgende driehoek:



Oplossing:

Ons gebruik die hoeke in 'n driehoek om $C\hat{A}B$ te vind:

$$C\hat{A}B = 180° - 90° - 35° = 55°$$

Dan vind ons $D\hat{A}B$:

$$D\hat{A}B = 15° + 55° = 70°$$

Nou kan ons $\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$ gebruik om BC te vind:

$$\begin{aligned}\tan 35° &= \frac{9}{BC}\\ BC &= \frac{9}{\tan 35°}\\ BC &= 12{,}85\end{aligned}$$

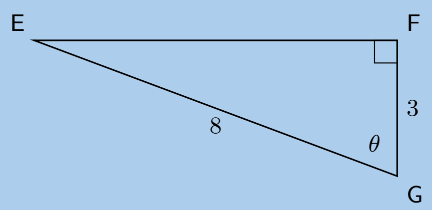
Dan vind ons BD deur ook $\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$ te gebruik:

$$\begin{aligned}\tan 70° &= \frac{BD}{9}\\ BD &= 9\tan 70°\\ BD &= 24{,}73\end{aligned}$$

Uiteindelik kan ons CD kry:

$$\begin{aligned}CD &= BD - BC\\ &= 24{,}73 - 12{,}85\\ &= 11{,}88\end{aligned}$$

15. Bepaal



a) Die lengte van EF
Oplossing:

$$\begin{aligned}GE^2 &= EF^2 + FG^2\\ EF^2 &= GE^2 - FG^2\\ EF &= \sqrt{GE^2 - FG^2}\\ &= \sqrt{8^2 - 3^2}\\ &= \sqrt{64 - 9}\\ &= \sqrt{55}\end{aligned}$$

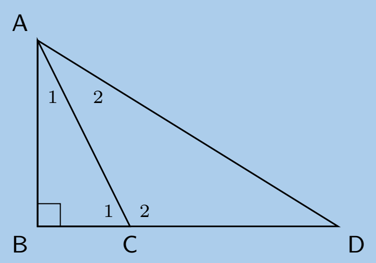
b) $\tan(90° - \theta)$
Oplossing:
Let op dat $\hat{G} = \theta$ en $\hat{F} = 90°$, dus $\hat{E} = 90° - \theta$. So ons moet $\tan\hat{E}$ vind:

$$\tan(90° - \theta) = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

c) Die waarde van θ
Oplossing:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{3}{8}\\ \theta &= \cos^{-1}\frac{3}{8}\\ \theta &= 67{,}976°\end{aligned}$$

16. Gegee: $\hat{D} = x$, $\hat{C}_1 = 2x$, $BC = 12{,}2$ cm, $AB = 24{,}6$ cm. Bereken CD.



Oplossing:

Bereken eers $\hat{C}_1$ deur die gebruik van die gegewe inligting van AB en BC.

$$\begin{aligned}\tan \hat{C}_1 &= \frac{AB}{BC} \\ &= \frac{24{,}6}{12{,}2} \\ \hat{C}_1 &= 63{,}62257...\end{aligned}$$

Vervolgens vind ons $\hat{D}$:

$$\begin{aligned}\hat{D} &= \frac{\hat{C}_1}{2} \\ &= \frac{63{,}62257...}{2} \\ &= 31{,}8107...\end{aligned}$$

Nou ons kan BD bereken:

$$\begin{aligned}\tan \hat{D} &= \frac{AB}{BD} \\ BD &= \frac{AB}{\tan \hat{D}} \\ &= \frac{24{,}6}{\tan 31{,}8107...} \\ &= 39{,}65906...\end{aligned}$$

Laaste kan ons CD bereken:

$$\begin{aligned}CD &= BD - BC \\ &= 39{,}65906... - 12{,}2 \\ &= 27{,}45906... \\ &\approx 27{,}46 \text{ cm}\end{aligned}$$

17. Los op vir θ as θ 'n positiewe skerphoek is:

a) $2 \sin \theta = 1{,}34$

Oplossing:

$$\begin{aligned}2 \sin \theta &= 1{,}34 \\ \sin \theta &= 0{,}67 \\ \theta &= 42{,}06706\ldots \\ &= 42{,}07^\circ\end{aligned}$$

b) $1 - \tan\theta = -1$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 1 - \tan\theta &= -1 \\ -\tan\theta &= -2 \\ \tan\theta &= 2 \\ \theta &= 63{,}43494\ldots \\ &= 63{,}43° \end{aligned}$$

c) $\cos 2\theta = \sin 40°$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \sin 40° \\ &= 0{,}64278\ldots \\ 2\theta &= 50 \\ \theta &= 25° \end{aligned}$$

d) $\sec\theta = 1{,}8$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \sec\theta &= 1{,}8 \\ \frac{1}{\cos\theta} &= 1{,}8 \\ 1 &= 1{,}8\cos\theta \\ \frac{1}{1{,}8} &= \cos\theta \\ \theta &= 56{,}25101... \\ &\approx 56{,}25° \end{aligned}$$

e) $\cot 4\theta = \sin 40°$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \cot 4\theta &= \sin 40° \\ \cot 4\theta &= 0{,}642787... \\ \frac{1}{\tan 4\theta} &= 0{,}642787... \\ \frac{1}{0{,}642787...} &= \tan 4\theta \\ 4\theta &= 57{,}2675... \\ \theta &= 14{,}3168... \\ &\approx 14{,}32° \end{aligned}$$

f) $\sin 3\theta + 5 = 4$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin 3\theta + 5 &= 4 \\ \sin 3\theta &= -1 \\ 3\theta &= 90 \\ \theta &= 30° \end{aligned}$$

g) $\cos(4 + \theta) = 0{,}45$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos(4 + \theta) &= 0{,}45 \\ 4 + \theta &= 63{,}25631... \\ \theta &= 59{,}25631... \\ &\approx 59{,}26 \end{aligned}$$

h) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$

Oplossing:

Eers let ons op dat:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \sin\theta \times \frac{1}{\cos\theta}\\ &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \times \frac{\text{skuinssy}}{\text{aangrensende sy}}\\ &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}\\ &= \tan\theta\end{aligned}$$

Dan kan ons vir θ oplos:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= 1\\ \tan\theta &= 1\\ \theta &= 45°\end{aligned}$$

18. As $a = 29°$, $b = 38°$ en $c = 47°$, gebruik jou sakrekenaar om elk van die volgende te bepaal, korrek tot 2 desimale plekke.

a) $\tan(a + c)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan(a + c) &= \tan(29 + 47)\\ &= \tan 76\\ &= 4{,}0107...\\ &\approx 4{,}01\end{aligned}$$

b) $\text{cosec }(c - b)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{cosec }(c - b) &= \sin(47 - 38)\\ &= \text{cosec } 9\\ &= \frac{1}{\sin 9}\\ &= 6{,}3924...\\ &\approx 6{,}39\end{aligned}$$

c) $\sin(a \times b \times c)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin(a \times b \times c) &= \sin((29)(38)(47))\\ &= \sin(114)\\ &= 0{,}9135...\\ &\approx 0{,}91\end{aligned}$$

d) $\tan a + \sin b + \cos c$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan a + \sin b + \cos c &= \tan 29 + \sin 38 + \cos 47\\ &= 1{,}8519...\\ &\approx 1{,}85\end{aligned}$$

19. As $3\tan\alpha = -5$ en $0° < \alpha < 270°$, gebruik 'n skets om die volgende te bepaal:

a) $\cos\alpha$

Oplossing:

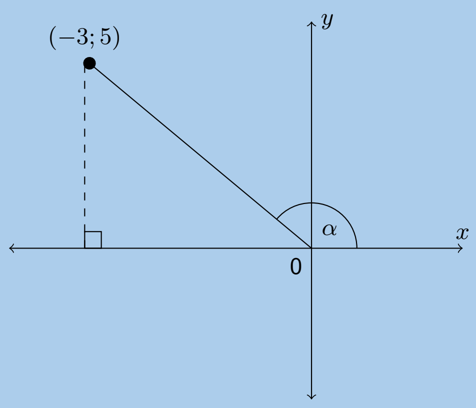
Vind x, y en r

$$\begin{aligned} 3\tan\alpha &= -5 \\ \tan\alpha &= \frac{-5}{3} \end{aligned}$$

Dus $x = -3$ en $y = 5$.

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (-3)^2 + (5)^2 \\ &= 34 \\ r &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

Teken 'n skets:



Nou kan ons $\cos\alpha$ vind:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{r} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{34}} \end{aligned}$$

b) $\tan^2\alpha - \sec^2\alpha$

Oplossing:

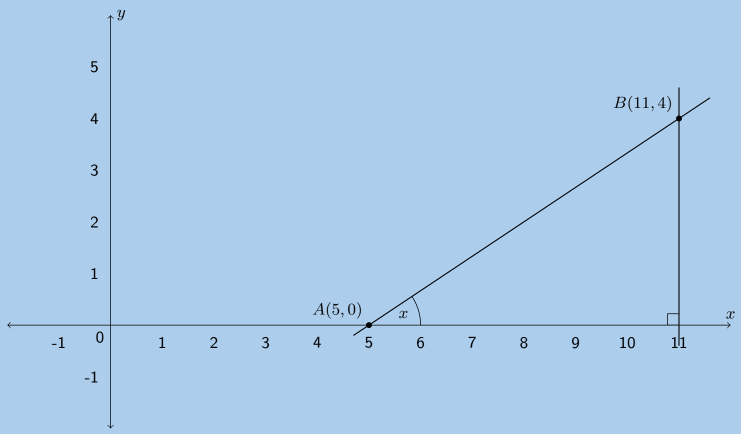
Ons het x, y en r van die eerste vraag.

$$\begin{aligned} \tan^2\alpha - \sec^2\alpha &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{r}{x}\right)^2 \\ &= \left(\frac{5}{-3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{34}}{-3}\right)^2 \\ &= \frac{25}{9} - \frac{34}{9} \\ &= \frac{-9}{9} \\ &= -1 \end{aligned}$$

20. Gegee: $A(5;0)$ en $B(11;4)$, vind die hoek tussen die lyn deur A en B en die x-as.

Oplossing:

Teken eers 'n skets:



Vervolgens let ons op dat die afstand van B tot by die x-as 4 eenhede is (B is 4 eenhede opwaarts vanaf die x-as) en die afstand van A tot C is $11 - 5 = 6$ eenhede.

Ons gebruik die tangens verhouding om die hoek te vind:

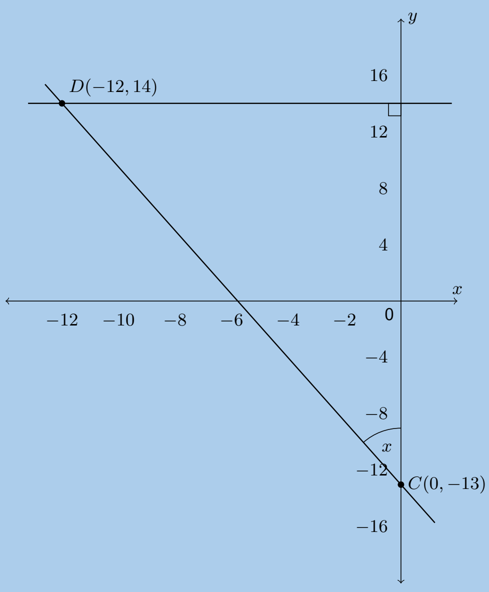
$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{4}{6} \\ \tan x &= 0{,}66666\ldots \\ x &= 33{,}69° \end{aligned}$$

Dus is die hoek tussen die lyn AB en die x-as 33,69°.

21. Gegee $C(0; -13)$ en $D(-12; 14)$, vind die hoek tussen die lyn deur C en D en die y-as.

Oplossing:

Teken eers 'n skets:



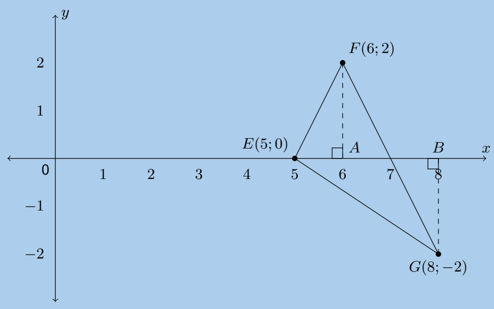
Vervolgens let ons op dat die afstand van D tot by die x-as 12 eenhede is (alhoewel D $(-12; 14)$ is, is die afstand positief). Die afstand van C tot by die punt waar die loodregte lyn vanaf D die y-as sny, is $14 - (-13) = 27$ eenhede.

Ons gebruik die tangens verhouding om die hoek te vind:

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{12}{27} \\ \tan x &= 0{,}4444\ldots \\ x &= 23{,}96° \end{aligned}$$

Dus is die hoek tussen die lyn CD en die x-as 23,96°.

22. Gegee die punte $E(5;0)$, $F(6;2)$ en $G(8;-2)$. Vind die hoek $F\hat{E}G$.
Oplossing:
Teken eers 'n skets:



Om $F\hat{E}G$ te vind, kyk ons om die beurt na $\triangle FEA$ en $\triangle GEB$. Hierdie twee driehoeke gee elk 'n deel van die hoek waarna ons soek.
In driehoek FEA kan ons die tangens verhouding gebruik. FA is 2 eenhede en EA is 1 eenheid.

$$\tan F\hat{E}X = \frac{2}{1}$$
$$F\hat{E}X = 63{,}43°$$

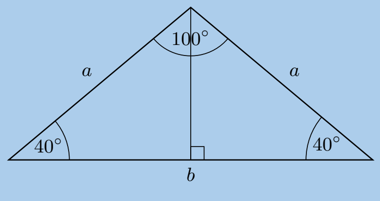
In driehoek GEB gebruik ons ook die tangens verhouding. GB is 2 eenhede en EB is 3 eenhede.

$$\tan G\hat{E}X = \frac{2}{3}$$
$$G\hat{E}X = 33{,}69°$$

Nou tel ons hierdie twee hoeke bymekaar en kry die hoek wat ons wil vind:

$$G\hat{E}X + F\hat{E}X = F\hat{E}G$$
$$F\hat{E}G = 33{,}69° + 63{,}43°$$
$$= 97{,}12°$$

23. 'n Driehoek met hoeke 40°, 40° en 100° het 'n omtrek van 20 cm. Vind die lengte van elke sy van die driehoek.
Oplossing:
Teken eers 'n skets:



Ons konstrueer 'n loodregte halveerlyn en nou het ons 'n reghoekige driehoek om mee te werk. Ons kan enige een van hierdie twee driehoeke gebruik.
Ons weet $2a + b = 20$. Herrangskikking gee: $b = 2(10 - a)$. Ons kan die cos verhouding gebruik om a te vind:

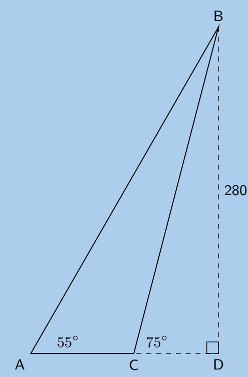
$$\cos 40° = \frac{\frac{b}{2}}{a}$$
$$0{,}77 = \frac{\frac{2(10-a)}{2}}{a}$$
$$= \frac{10-a}{a}$$
$$0{,}77a = 10 - a$$
$$a = 5{,}65 \text{ cm}$$

Van die omtrek kry ons:

$$b = 2(10 - 5{,}65) = 8{,}7 \text{ cm}$$

Dus is die lengtes van die sye 5,65 cm en 8,7 cm.

24. Bepaal die oppervlakte van $\triangle ABC$



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\tan 55 &= \frac{280}{AD} \\
AD &= \frac{280}{\tan 55} \\
AD &= 196{,}058
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan 75 &= \frac{280}{CD} \\
CD &= \frac{280}{\tan 75} \\
CD &= 75{,}026
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AC &= AD - CD \\
AC &= 121{,}032
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{oppervlakte van } \triangle ABC &= \frac{1}{2}\text{basis} \times \text{hoogte} \\
&= \frac{1}{2} \times 121{,}032 \times 280 \\
&= 16944 \text{ eenhede}^2
\end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JFT	1b. 2JFV	1c. 2JFW	2a. 2JFX	2b. 2JFY	2c. 2JFZ
2d. 2JG2	2e. 2JG3	2f. 2JG4	2g. 2JG5	2h. 2JG6	2i. 2JG7
2j. 2JG8	2k. 2JG9	2l. 2JGB	2m. 2JGC	2n. 2JGD	2o. 2JGF
2p. 2JGG	2q. 2JGH	2r. 2JGJ	3. 2JGK	4. 2JGM	5a. 2JGN
5b. 2JGP	5c. 2JGQ	5d. 2JGR	5e. 2JGS	5f. 2JGT	5g. 2JGV
5h. 2JGW	6. 2JGX	7. 2JGY	8. 2JGZ	9. 2JH2	10a. 2JH3
10b. 2JH4	10c. 2JH5	10d. 2JH6	10e. 2JH7	10f. 2JH8	10g. 2JH9
10h. 2JHB	10i. 2JHC	11. 2JHD	12. 2JHF	13. 2JHG	14. 2JHH
15. 2JHJ	16. 2JHK	17a. 2JHM	17b. 2JHN	17c. 2JHP	17d. 2JHQ
17e. 2JHR	17f. 2JHS	17g. 2JHT	17h. 2JHV	18. 2JHW	19. 2JHX
20. 2JHY	21. 2JHZ	22. 2JJ2	23. 2JJ3	24. 2JJ4	

www.everythingmaths.co.za　m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 6

Funksies

6.1 Inleiding

- Hierdie hoofstuk dek die konsep van 'n funksie en die voorstelling van funksies deur die gebruik van tabelle, grafieke, woorde en formules. Reguitlyngrafieke is behandel in graad 9 en word hier hersien. Parabole, hiperbole en eksponsiële grafieke word hier bekendgestel. Grafieke vir sinus-, cosinus- en tangensfunksies word ook hier bekendgestel.
- 'n Meer formele definisie van 'n funksie word in graad 12 gegee. Op hierdie vlak behoort leerders die terme onafhanklike (invoer) veranderlike en afhanklike (uitvoer) veranderlike te ken en te weet hoe hulle verskil.
- Opsommings moet saamgestel word vir elke tipe grafiek en dit behoort die invloed van a (vertikale strek en/of refleksie in x) en q (vertikale skuif) in te sluit.
- In sommige praktiese toepassings kan grafieke diskreet of kontinu wees.
- Moedig leerders aan om beperkings aan te dui, veral vir kwadratiese funksies.
- Leerders moet verstaan dat $y = \sqrt{x}$ geen reële oplossings het vir $x < 0$ nie.
- Die skets van grafieke is gebaseer op die kennis van die effek van a en q en die gebruik hiervan om die vorm van die grafiek te bepaal.

'n Stuk gereedskap soos mathisfun function grapher kan gebruik word om grafieke te trek vir klaskamer gebruik. As jy hierdie instrument gebruik vir die trek van trigonometriese grafieke, sal die waardes op die x-as nie in grade wees nie.

Exercise 6 – 1:

1. Skryf die volgende in versamelingnotasie:
   a) $(-\infty; 7]$
   Oplossing:
   $\{x : x \in \mathbb{R}, x \leq 7\}$
   b) $[-13; 4)$
   Oplossing:
   $\{x : x \in \mathbb{R}, -13 \leq x < 4\}$
   c) $(35; \infty)$
   Oplossing:
   $\{x : x \in \mathbb{R}, x > 35\}$
   d) $[\frac{3}{4}; 21)$
   Oplossing:
   $\left\{x : x \in \mathbb{R}, \frac{3}{4} \leq x < 21\right\}$
   e) $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$
   Oplossing:
   $\left\{x : x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$
   f) $(-\sqrt{3}; \infty)$
   Oplossing:
   $\left\{x : x \in \mathbb{R}, x > -\sqrt{3}\right\}$
2. Skryf die volgende in intervalnotasie:
   a) $\{p : p \in \mathbb{R}, p \leq 6\}$
   Oplossing:
   $(-\infty; 6]$
   b) $\{k : k \in \mathbb{R}, -5 < k < 5\}$
   Oplossing:
   $(-5; 5)$
   c) $\left\{x : x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{5}\right\}$
   Oplossing:
   $(\frac{1}{5}; \infty)$
   d) $\{z : z \in \mathbb{R}, 21 \leq x < 41\}$
   Oplossing:
   $[21; 41)$

3. Voltooi die volgende tabelle en identifiseer die funksie.

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	5	10		20		

Oplossing:

x	1	2	3	4	5	6
y	5	10	15	20	25	30

$$y = 5x$$

b)

x	1		3	4		6
y	5	5			5	5

Oplossing:

x	1	2	3	4	5	6
y	5	5	5	5	5	5

$$y = 5$$

c)

x	2			8	10	12
y	1	2	3			6

Oplossing:

x	2	4	6	8	10	12
y	1	2	3	4	5	6

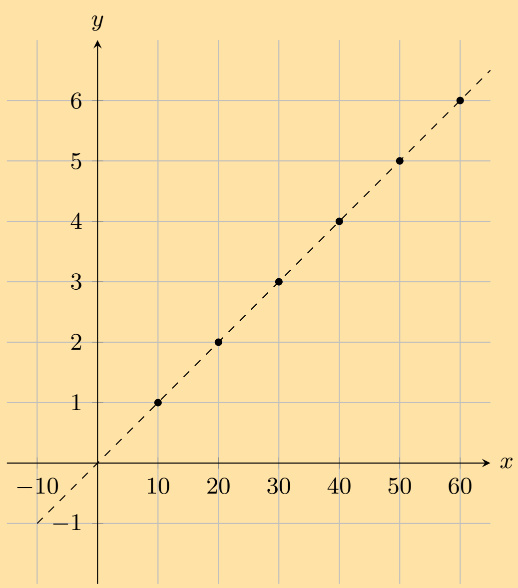
$$y = \frac{1}{2}x$$

4. Stip die volgende punte op 'n grafiek.

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

Oplossing:

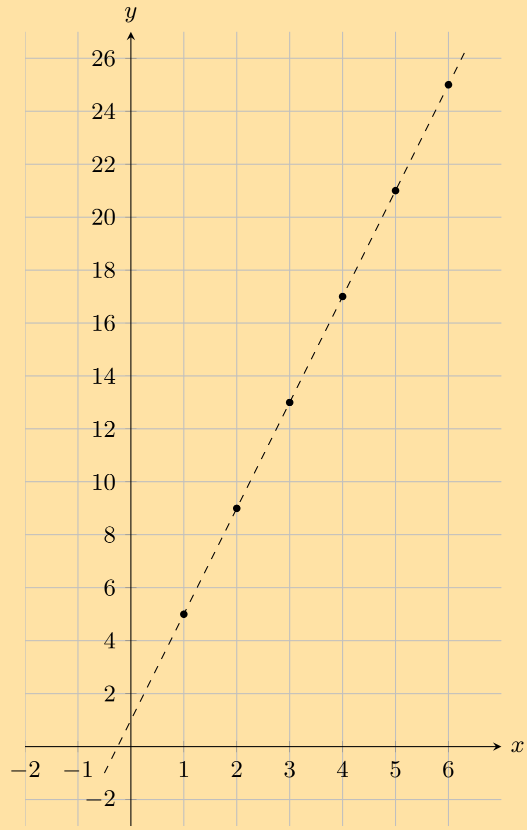


Let daarop dat hierdie grafiek geskaleer is. Elke waarde vir x en y is vermenigvuldig met 10. Hierdie proses verander nie die funksie nie, maar dit strek die grafiek, sodat dit makliker is om te lees.

b)

x	1	2	3	4	5	6
y	5	9	13	17	21	25

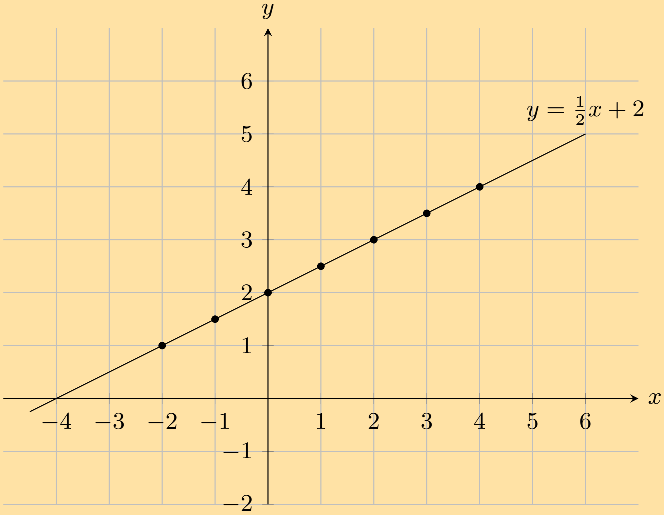
Oplossing:



5. Stel 'n tabel op van waardes van die gegewe funksie en stip dan die grafiek van die funksie. Jou tabel moet ten minste 5 geordende pare hê.

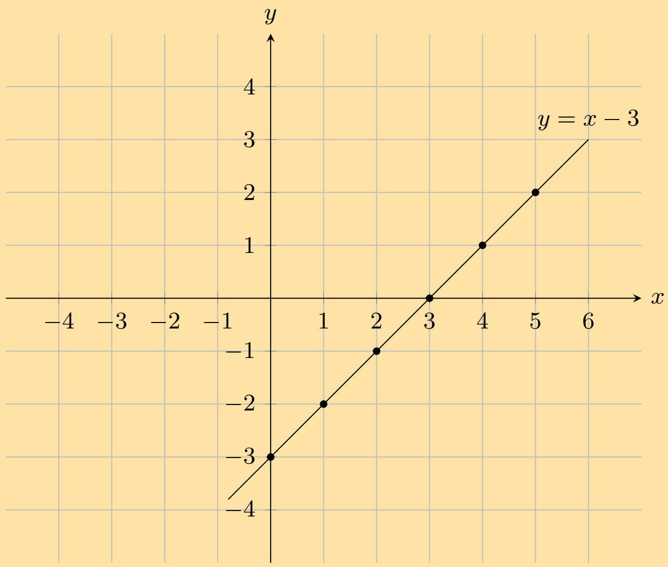
   a) $y = \frac{1}{2}x + 2$
   Oplossing:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4



b) $y = x - 3$
Oplossing:

x	0	1	2	3	4	5
y	-3	-2	-1	0	1	2



6. As die funksies $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = x - 4$; $h(x) = 7 - x^2$; $k(x) = 3$ gegee is, vind die waarde van die volgende:

a) $f(-1)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 1 \\ f(-1) &= (-1)^2 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

b) $g(-7)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} g(x) &= x - 4 \\ g(-7) &= (-7) - 4 \\ &= -11 \end{aligned}$$

c) $h(3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} h(x) &= 7 - x^2 \\ h(3) &= 7 - (3)^2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

d) $k(100)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} k(x) &= 3 \\ k(100) &= 3 \end{aligned}$$

Die uitvoerwaarde is altyd 3, ongeag die waarde van x.

e) $f(-2) + h(2)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) + h(x) &= x^2 + 1 + 7 - x^2 \\ f(-2) + h(2) &= (-2)^2 + 1 + 7 - (2)^2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

f) $k(-5) + h(3)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} k(x) + h(x) &= 3 + 7 - x^2 \\ k(-5) + h(3) &= 3 + 7 - (3)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

g) $f(g(1))$
Oplossing:

$$\begin{aligned} g(x) &= x - 4 \\ g(1) &= (1) - 4 \\ &= -3 \\ \therefore f(g(1)) &= f(-3) \\ f(x) &= x^2 + 1 \\ &= (-3)^2 + 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

h) $k(f(6))$
Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 1 \\ f(6) &= (6)^2 + 1 \\ &= 37 \\ \therefore k(f(6)) &= k(37) \\ k(x) &= 3 \\ k(f(6)) &= 3 \end{aligned}$$

Die uitvoerwaarde is altyd 3, ongeag die waarde van x.

7. Die prys van petrol en diesel per liter word gegee deur die funksies P en D, waar:

$$\begin{aligned} P &= 13{,}61V \\ D &= 12{,}46V \end{aligned}$$

Gebruik hierdie inligting om die volgende te beantwoord:

a) Bereken $P(8)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} P(8) &= 13{,}61(8) \\ &= \text{R } 108{,}88 \end{aligned}$$

b) Bereken $D(16)$
Oplossing:

$$\begin{aligned} D(16) &= 12{,}46(16) \\ &= \text{R } 199{,}36 \end{aligned}$$

c) Hoeveel liter petrol kan jy koop met R 300?

Oplossing:

$$\begin{aligned}
P(V) &= 300 \\
13{,}61V &= 300 \\
V &= 22{,}043 \text{ L}
\end{aligned}$$

d) Hoeveel liter petrol kan jy koop met R 275?

Oplossing:

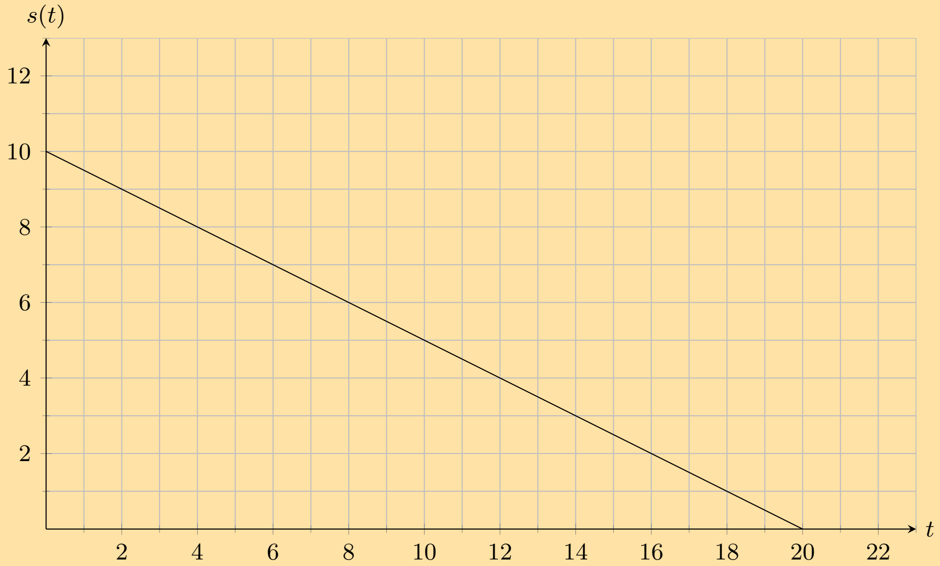
$$\begin{aligned}
D(V) &= 275 \\
12{,}46V &= 275 \\
V &= 22{,}071 \text{ L}
\end{aligned}$$

e) Hoeveel is petrol duurder as diesel? Toon jou antwoord as 'n funksie.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
P(V) - D(V) &= 13{,}61V - 12{,}46V \\
&= 1{,}15V
\end{aligned}$$

8. 'n Bal rol teen 'n 10 m skuinste af. Die grafiek hieronder toon die verband tussen die afstand en die tyd.



Gebruik hierdie inligting om die volgende te beantwoord:

a) Na 6 s, hoeveel verder het die bal om te rol?

Oplossing:

7 m

b) Wat is die terrein van die funksie?

Oplossing:

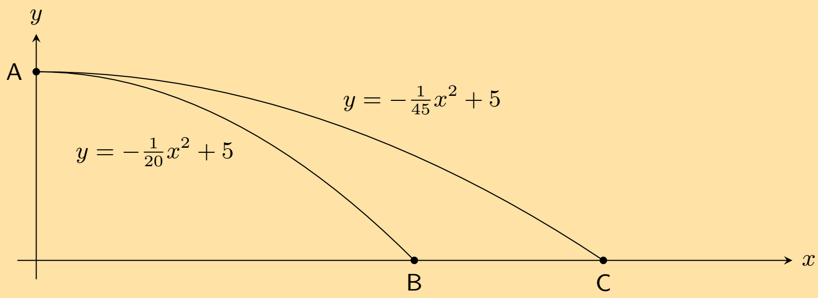
0 m $\leq s(t) \leq$ 10 m

c) Wat is die gebied van die funksie en wat verteenwoordig dit?

Oplossing:

Die gebied is 0 s $\leq t \leq$ 20 s. Dit verteenwoordig die totale tyd om die onderkant van die helling te bereik.

9. James en Themba gooi elkeen 'n klip vanaf die top van 'n gebou in 'n rivier. Die trajek van die klippe kan beskryf word met kwadratiese vergelykings. $y = -\frac{1}{20}x^2 + 5$ beskryf die pad van die klip wat deur James gegooi is en $y = -\frac{1}{45}x^2 + 5$ beskryf die pad van Themba se klip.



a) Hoe hoog is die gebou waarop hulle gestaan het?

Oplossing:

Beide funksies het 'n maksimumwaarde van 5 m. Dit kan verkry word deur $x = 0$ te stel in elk van die twee funksies en dit is verteenwoordig deur punt A op die grafiek hierbo.

b) Hoe ver het James sy klip gegooi voor dit die rivier se oppervlak bereik het?

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{20}x^2 + 5 \\ 0 &= -\frac{1}{20}x^2 + 5 \\ \frac{1}{20}x^2 - 5 &= 0 \\ x^2 - 100 &= 0 \\ (x-10)(x+10) &= 0 \\ \therefore x &= 10 \text{ m} \end{aligned}$$

James het sy klip 10 m gegooi voor dit die rivier se oppervlak bereik het.

c) Hoeveel verder het Themba sy klip gegooi voor dit die rivier se oppervlak bereik het?

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{45}x^2 + 5 \\ 0 &= -\frac{1}{45}x^2 + 5 \\ \frac{1}{45}x^2 - 5 &= 0 \\ x^2 - 225 &= 0 \\ (x-15)(x+15) &= 0 \\ \therefore x &= 15 \text{ m} \end{aligned}$$

Themba het sy klip 15 m gegooi voor dit die rivier se oppervlak getref het.
Dus Themba het sy klip 5 m verder gegooi as James.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JJ5	1b. 2JJ6	1c. 2JJ7	1d. 2JJ8	1e. 2JJ9	1f. 2JJB
2a. 2JJC	2b. 2JJD	2c. 2JJF	2d. 2JJG	3a. 2JJH	3b. 2JJJ
3c. 2JJK	4a. 2JJM	4b. 2JJN	5a. 2JJP	5b. 2JJQ	6. 2JJR
7. 2JJS	8. 2JJT	9. 2JJV			

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Exercise 6 – 2:

1. Bepaal die x-afsnit en die y-afsnit van die gegewe funksies.

a) $y = x - 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= x - 1 \\ y &= (0) - 1 \\ y &= -1 \\ \therefore c &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x - 1 \\ (0) &= x - 1 \\ 1 &= x \\ 1 &= x \end{aligned}$$

x-afsnit $= 1$ en y-afsnit $= -1$

b) $y = x + 2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= x + 2 \\ y &= (0) + 2 \\ y &= 2 \\ \therefore c &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x + 2 \\ (0) &= x + 2 \\ -2 &= x \\ -2 &= x \end{aligned}$$

x-afsnit $= -2$ en y-afsnit $= 2$

c) $y = x - 3$

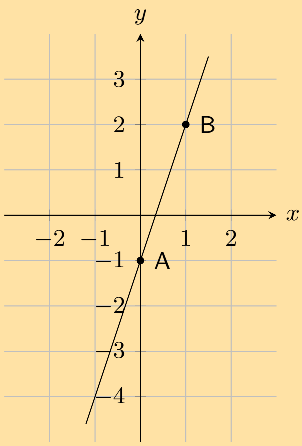
Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= x - 3 \\ y &= (0) - 3 \\ y &= -3 \\ \therefore c &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x - 3 \\ (0) &= x - 3 \\ 3 &= x \\ 3 &= x \end{aligned}$$

x-afsnit $= 3$ en y-afsnit $= -3$

2. In die grafiek hieronder is daar 'n funksie met die vergelyking $y = mx + c$. Bepaal die waardes van m (die gradiënt van die lyn) en c (die y-afsnit van die lyn).



Oplossing:

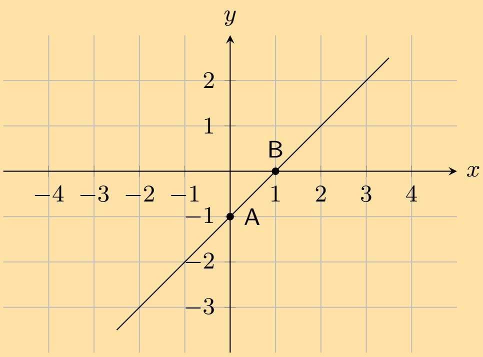
Om m te bepaal, gebruik ons die koördinate van enige ander punt op die lyn afgesien van die een wat gebruik is vir die y-afsnit. In hierdie oplossing, het ons gekies om die koördinate van punt $B(1;2)$ te gebruik.

Van die y-afsnit $c = -1$.

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ 2 &= m(1) - 1 \\ 2 &= m - 1 \\ 3 &= m \end{aligned}$$

$m = 3$ en $c = -1$.

3. Die grafiek toon 'n funksie met die vergelyking $y = mx + c$. Bepaal die waardes van m (die gradiënt van die lyn) en c (die y-afsnit van die lyn).



Oplossing:

Om m te bepaal, gebruik ons die koördinate van enige ander punt op die lyn afgesien van die een wat gebruik is vir die y-afsnit. In hierdie oplossing, het ons gekies om die koördinate van punt $B(1;0)$ te gebruik.

Van die y-afsnit $c = -1$.

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ 0 &= m(1) - 1 \\ 0 &= m - 1 \\ 1 &= m \end{aligned}$$

$m = 1$, en $c = -1$.

4. Maak 'n lys van die x en y-afsnitte vir die volgende reguitlyngrafieke. Dui aan of die grafiek toeneem of afneem:

   a) $y = x + 1$

   Oplossing:

   Om die x-afsnit te vind, stel ons $y = 0$ en om die y-afsnit te vind, stel ons $x = 0$. Dit gee die punte $(0;1)$ en $(-1;0)$. Die grafiek neem toe ($m > 0$).

b) $y = x - 1$

Oplossing:

Om die x-afsnit te vind, stel ons $y = 0$ en om die y-afsnit te vind, stel ons $x = 0$. Dit gee die punte $(0; -1)$ en $(1; 0)$. Die grafiek neem toe $(m > 0)$.

c) $h(x) = 2x + 1$

Oplossing:

Om die x-afsnit te vind, stel ons $y = 0$ en om die y-afsnit te vind, stel ons $x = 0$. Dit gee die punte $(0; 1)$ en $(\frac{-1}{2}; 0)$. Die grafiek neem toe $(m > 0)$.

d) $y + 3x = 1$

Oplossing:

Om die x-afsnit te vind, stel ons $y = 0$ en om die y-afsnit te vind, stel ons $x = 0$. Dit gee die punte $(0; 1)$ en $(\frac{1}{3}; 0)$. Die grafiek neem af $(m < 0)$.

e) $3y - 2x = 6$

Oplossing:

Om die x-afsnit te vind, stel ons $y = 0$ en om die y-afsnit te vind, stel ons $x = 0$. Dit gee die punte $(0; 2)$ en $(-3; 0)$. Die grafiek neem toe $(m > 0)$.

f) $k(x) = -3$

Oplossing:

Om die x-afsnit te vind, stel ons $y = 0$ en om die y-afsnit te vind, stel ons $x = 0$. Dit gee die punt $(0; -3)$. Die grafiek is horisontaal.

g) $x = 3y$

Oplossing:

Om die x-afsnit te vind, stel ons $y = 0$ en om die y-afsnit te vind, stel ons $x = 0$. Dit gee dieselfde punt vir beide afsnitte: $(0; 0)$. Die grafiek neem toe $(m > 0)$.

h) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

Oplossing:

Om die x-afsnit te vind, stel ons $y = 0$ en om die y-afsnit te vind, stel ons $x = 0$. Dit gee die punte $(0; -3)$ en $(2; 0)$. Die grafiek neem toe $(m > 0)$.

5. Meld of die volgende waar is of nie.

a) Die gradiënt van $2y = 3x - 1$ is 3.

Oplossing:

Vals

$$
\begin{aligned}
2y &= 3x - 1 \\
y &= \frac{3}{2}x - 12
\end{aligned}
$$

Die gradiënt is $\frac{3}{2}$.

b) Die y-afsnit van $y = x + 4$ is 4.

Oplossing:

Waar

c) Die gradiënt van $2 - y = 2x - 1$ is -2.

Oplossing:

Waar

d) Die gradiënt van $y = \frac{1}{2}x - 1$ is -1.

Oplossing:

Vals

$$
m = \frac{1}{2}
$$

e) Die y-afsnit van $2y = 3x - 6$ is 6.

Oplossing:

Vals

$$
\begin{aligned}
2y &= 3x - 6 \\
y &= \frac{3}{2}x - 3
\end{aligned}
$$

6. Skryf die volgende in standaardvorm ($y = mx + c$):

a) $2y + 3x = 1$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2y + 3x &= 1 \\ 2y &= 1 - 3x \\ y &= -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $3x - y = 5$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ -y &= 5 - 3x \\ y &= 3x - 5 \end{aligned}$$

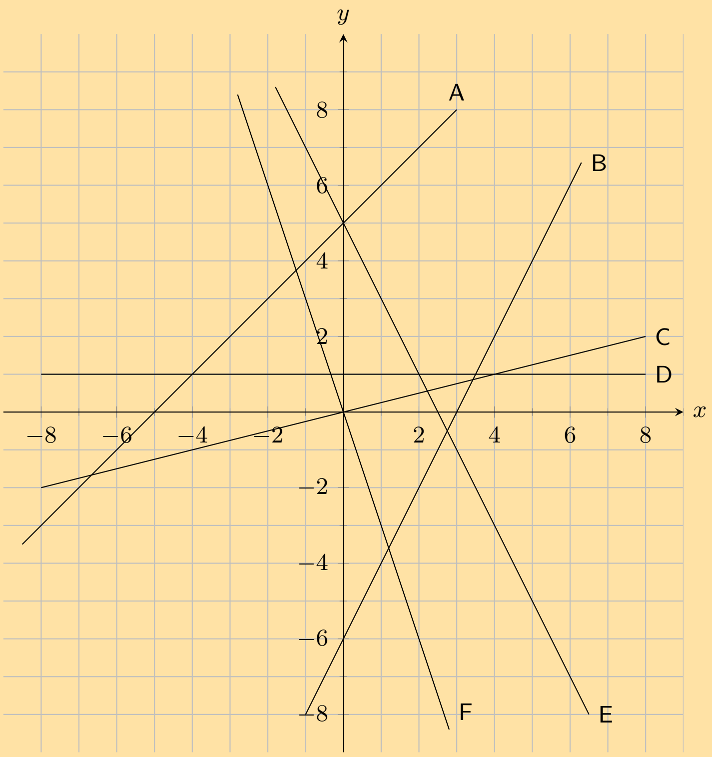
c) $3y - 4 = x$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 3y - 4 &= x \\ 3y &= x + 4 \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

d) $y + 2x - 3 = 1$
Oplossing:

$$\begin{aligned} y + 2x - 3 &= 1 \\ y &= -2x + 4 \end{aligned}$$

7. Kyk na die grafiek hieronder. Elke grafiek word met 'n letter aangedui. In die vrae wat volg, pas die gegewe vergelyking by die letter van 'n ooreenstemmende grafiek.



a) $y = 5 - 2x$
Oplossing:
E

b) $x + 5$
Oplossing:
A

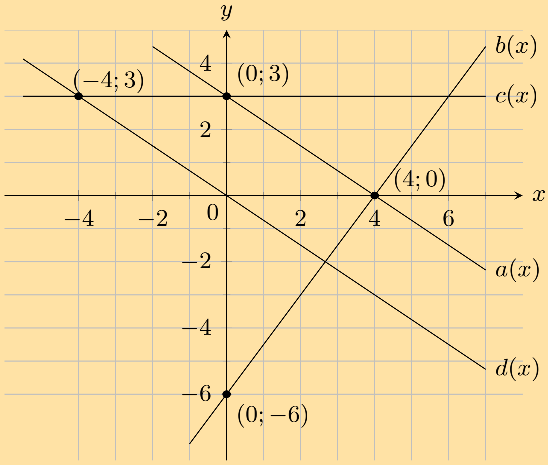
c) $y = 2x - 6$
Oplossing:
B

d) $y = -3x$
Oplossing:
F

e) $y = 1$
Oplossing:
D

f) $y = \frac{1}{2}x$
Oplossing:
C

8. Vir die funksies in die diagram hieronder, gee die vergelyking van elke reguitlyn:



a) $a(x)$
Oplossing:
Die y-afsnit is $(0;3)$, dus $c = 3$.

$$\begin{aligned} y &= mx + 3 \\ 0 &= 4m + 3 \\ \therefore m &= \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

Dus $a(x) = -\frac{3}{4}x + 3$

b) $b(x)$
Oplossing:
Die y-afsnit is $(0;-6)$, dus $c = -6$.

$$\begin{aligned} y &= mx - 6 \\ 0 &= 4m - 6 \\ \therefore m &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dus $b(x) = \frac{3}{2}x - 6$

c) $c(x)$

Oplossing:

Die y-afsnit is $(0;3)$, dus $c = 3$.

$$\begin{aligned} y &= mx + 3 \\ 3 &= -4m + 3 \\ 0 &= -4m \\ \therefore m &= 0 \end{aligned}$$

Dus $c(x) = 3$

d) $d(x)$

Oplossing:

Die y-afsnit is $(0;0)$, dus $c = 0$.

$$\begin{aligned} y &= mx \\ 3 &= -4m \\ \therefore m &= \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

Dus $d(x) = -\frac{3}{4}x$

9. Skets die volgende funksies op dieselfde assestelsel, deur gebruik te maak van die dubbel-afsnit metode. Dui duidelik die koördinate aan van die afsnitte met die asse en die snypunt van die twee grafieke: $x+2y-5 = 0$ en $3x-y-1 = 0$.

Oplossing:

Vir $x + 2y - 5 = 0$:

Skryf die vergelyking in standaardvorm: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Hieruit kan ons sien dat die y-afsnit $\frac{5}{2}$ is. Die x-afsnit is 5.

Vir $3x - y - 1 = 0$:

Skryf die vergelyking in standaardvorm: $y = 3x - 1$. Hieruit kan ons sien dat die y-afsnit -1 is. Die x-afsnit is $\frac{1}{3}$.

Om die snypunt te vind, moet ons die twee vergelykings gelyktydig oplos. Ons kan die standaard vorm van die eerste vergelyking gebruik en hierdie waarde van y in die tweede vergelyking vervang:

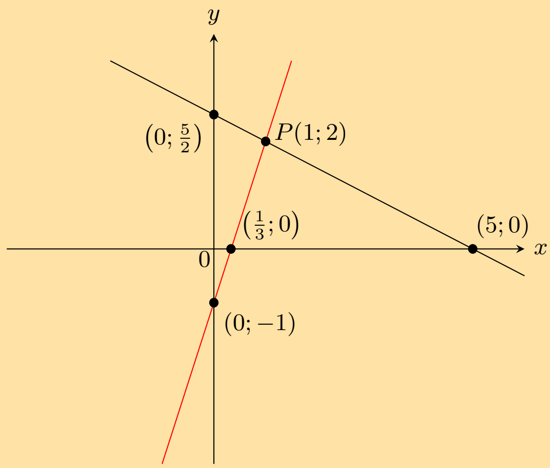
$$\begin{aligned} 3x + \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} - 1 &= 0 \\ \frac{7}{2}x &= \frac{7}{2} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van x in die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} x + 2y - 5 &= 0 \\ 1 + 2y - 5 &= 0 \\ 2y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Dus is die snypunt $(1;2)$.

Nou ons kan die grafiek teken:



10. Op dieselfde assestelsel, teken die grafieke van $f(x) = 3 - 3x$ en $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$ deur die gradiënt-afsnit metode te gebruik.

    Oplossing:

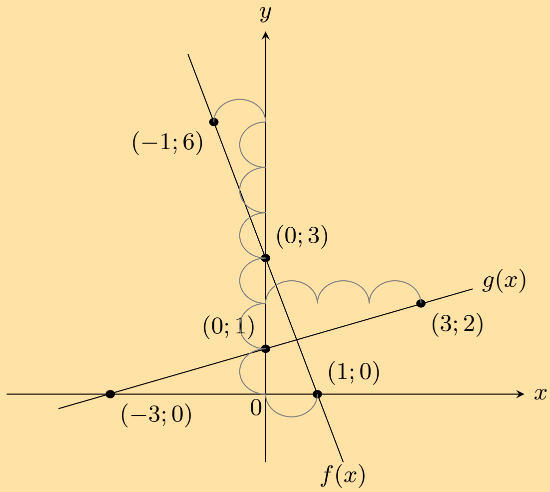
    Vir $f(x) = 3 - 3x$ is die y-afsnit 3. Die gradiënt is -3.

    Om die tweede punt te kry begin ons by $(0;3)$ en gaan 3 eenhede op en 1 eenheid links. Dit gee die tweede punt $(-1;6)$. Of ons kan 3 eenhede af en 1 eenheid regs te gaan om $(1;0)$ te kry.

    Vir $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$ is die y-afsnit 1. Die gradiënt is $\frac{1}{3}$.

    Om die tweede punt te kry begin ons by $(0;1)$ en gaan 1 eenheid op en 3 eenhede regs. Dit gee die tweede punt $(3;2)$. Of ons kan 1 eenheid af en 3 eenhede links gaan om $(-3;0)$ te kry.

    Nou kan ons die grafiek teken:



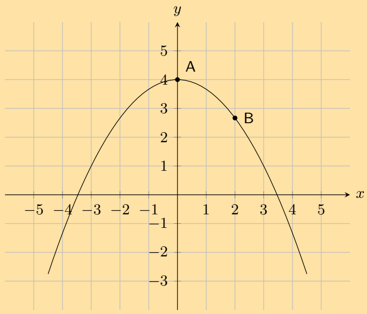
Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JJW	1b. 2JJX	1c. 2JJY	2. 2JJZ	3. 2JK2	4a. 2JK3
4b. 2JK4	4c. 2JK5	4d. 2JK6	4e. 2JK7	4f. 2JK8	4g. 2JK9
4h. 2JKB	5a. 2JKC	5b. 2JKD	5c. 2JKF	5d. 2JKG	5e. 2JKH
6a. 2JKJ	6b. 2JKK	6c. 2JKM	6d. 2JKN	7. 2JKP	8a. 2JKQ
8b. 2JKR	8c. 2JKS	8d. 2JKT	9. 2JKV	10. 2JKW	

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Exercise 6 – 3:

1. Die grafiek hieronder toon 'n kwadratiese funksie met die volgende vorm: $y = ax^2 + q$.
Twee punte op die parabool word getoon: **Punt A**, die draaipunt van die parabool, by $(0;4)$, en **Punt B** is by $\left(2;\frac{8}{3}\right)$.
Bereken die waardes van a en q.

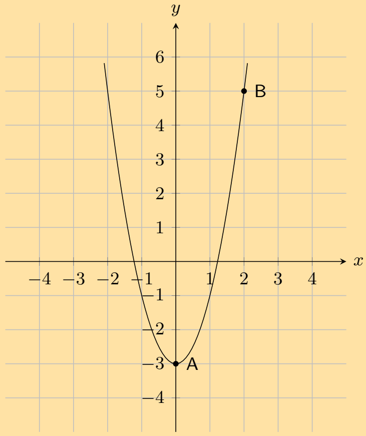


Oplossing:
Die waarde van q is 4.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 4 \\ \left(\frac{8}{3}\right) &= a(2)^2 + 4 \quad \longleftarrow \quad \text{stel die koördinate van 'n punt in} \\ \frac{8}{3} &= 4a + 4 \\ \frac{8}{3} - 4 &= 4a \\ -\frac{4}{3} &= 4a \\ -\frac{1}{3} &= a \end{aligned}$$

$$a = -\frac{1}{3};\ q = 4$$

2. Die grafiek hieronder toon 'n kwadratiese funksie met die volgende vorm: $y = ax^2 + q$.
Twee punte op die parabool word getoon: **Punt A**, die draaipunt van die parabool, by $(0;-3)$, en **Punt B** is by $(2;5)$.
Bereken die waardes van a en q.



Oplossing:

Die waarde van q is -3.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - 3 \\ (5) &= a(2)^2 - 3 \quad \longleftarrow \quad \text{substitueer die koordinate van 'n punt!} \\ 5 &= 4a - 3 \\ 5 + 3 &= 4a \\ 8 &= 4a \\ 2 &= a \end{aligned}$$

$$a = 2;\ q = -3$$

3. Gegewe die volgende vergelyking:
   $y = 5x^2 - 2$

   a) Bereken die y-koördinaat van die y-afsnit.
      Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + q \\ &= 5x^2 - 2 \\ &= 5(0)^2 - 2 \\ &= 0 - 2 \end{aligned}$$

      Die y-koördinaat van die y-afsnit is -2.

   b) Bereken nou die x-afsnitte. Jy antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.
      Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= 5x^2 - 2 \\ (0) &= 5x^2 - 2 \\ -5x^2 &= -2 \\ x^2 &= \frac{-2}{-5} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \text{Dus: } x &= \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ en } x = -\sqrt{\frac{2}{5}} \\ x &= -0{,}63 \text{ en } x = 0{,}63 \end{aligned}$$

      Die x-afsnitte is $(-0{,}63; 0)$ en $(0{,}63; 0)$.

4. Gegewe die volgende vergelyking:
   $y = -2x^2 + 1$

   a) Bereken die y-koördinaat van die y-afsnit.
      Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + q \\ &= -2x^2 + 1 \\ &= -2(0)^2 + 1 \\ &= 0 + 1 \end{aligned}$$

      Die y-koördinaat van die y-afsnit is 1.

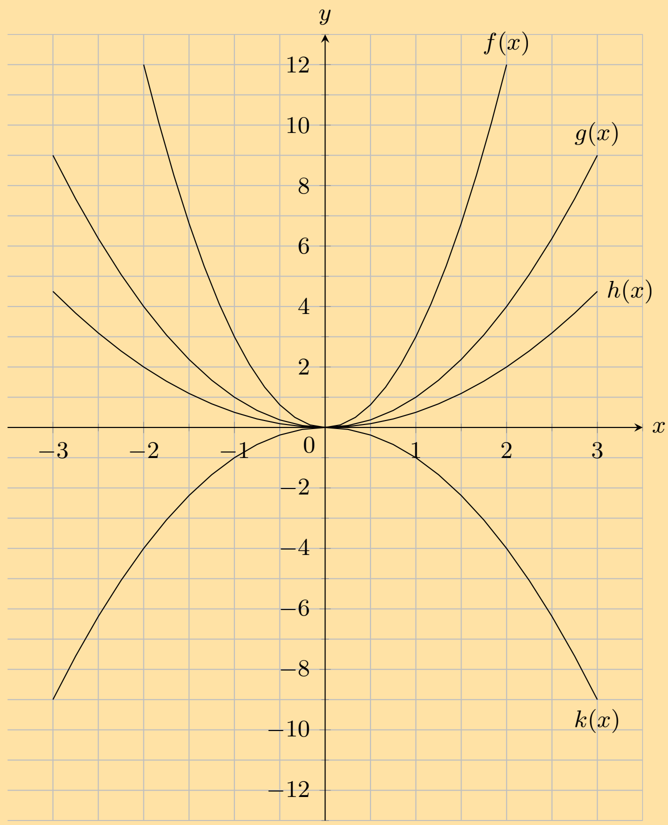
   b) Bereken nou die x-afsnitte. Jy antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.
      Oplossing:

$$y = -2x^2 + 1$$
$$(0) = -2x^2 + 1$$
$$2x^2 = 1$$
$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$
Dus: $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$ en $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

$x = -0{,}71$ en $x = 0{,}71$

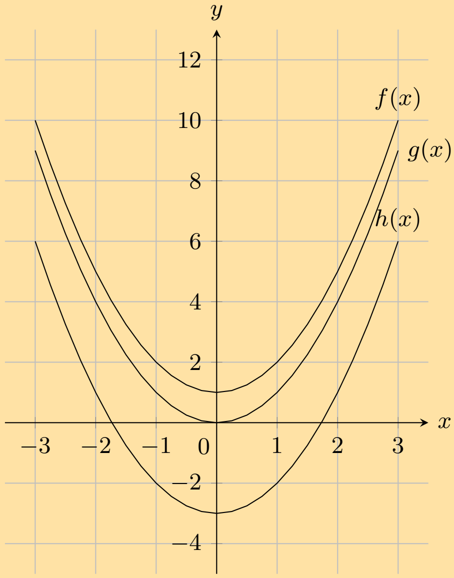
Die x-afsnitte is $(-0{,}71; 0)$ en $(0{,}71; 0)$.

5. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



a) $y = 0{,}5x^2$
   Oplossing:
   $h(x)$
b) $y = x^2$
   Oplossing:
   $g(x)$
c) $y = 3x^2$
   Oplossing:
   $f(x)$
d) $y = -x^2$
   Oplossing:
   $k(x)$

6. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:

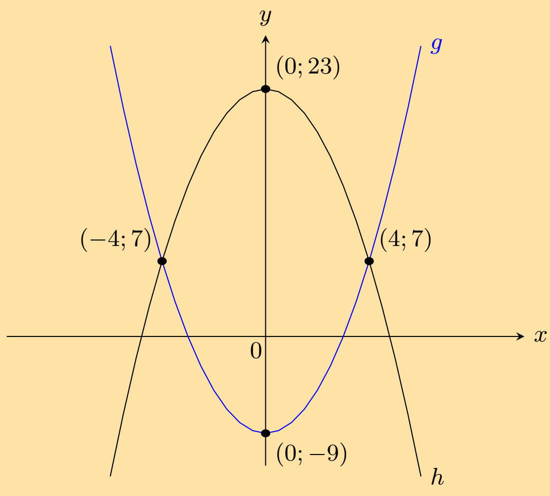


a) $y = x^2 - 3$
Oplossing:
$h(x)$

b) $y = x^2 + 1$
Oplossing:
$f(x)$

c) $y = x^2$
Oplossing:
$g(x)$

7. Twee parabole is geteken: $g : y = ax^2 + p$ en $h : y = bx^2 + q$.



a) Vind die waardes van a en p.
Oplossing:
p is die y-afsnit van die funksie $g(x)$, dus $p = -9$
Om a te vind, gebruik ons een van die punte op die grafiek (bv. $(4; 7)$):

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - 9 \\ 7 &= a(4^2) - 9 \\ 16a &= 16 \\ \therefore a &= 1 \end{aligned}$$

$a = 1; p = -9$

b) Vind die waardes van b en q.

Oplossing:

q is die y-afsnit van die funksie $h(x)$, dus $q = 23$

Om b te vind, gebruik ons een van die punte op die grafiek (dus $(4;7)$):

$$\begin{aligned} y &= bx^2 = 23 \\ 7 &= b(4^2) + 23 \\ 16b &= -16 \\ \therefore b &= -1 \end{aligned}$$

$b = -1; q = 23$

c) Vind die waardes van x waarvoor $g(x) \geq h(x)$.

Oplossing:

Dit is die punte waar g bokant h lê.

Van die grafiek sien ons g lê bokant h wanneer: $x \leq -4$ of $x \geq 4$

d) Vir watter waardes van x is g toenemend?

Oplossing:

g neem toe vanaf die draaipunt $(0; -9)$, dus vir $x \geq 0$.

8. Toon aan dat as $a < 0$ is die terrein van $f(x) = ax^2 + q$ gelyk aan $\{f(x) : f(x) \leq q\}$.

   Oplossing:

   Omdat die kwadraat van enige getal altyd positief is, kry ons: $x^2 \geq 0$.

   As ons vermenigvuldig met a, waar $(a < 0)$, dan word die teken van die ongelykheid omgekeer: $ax^2 \leq 0$

   As ons q weerskante bytel, gee dit $ax^2 + q \leq q$

   En dus $f(x) \leq q$

   Dit gee die terrein as $(-\infty; q]$.

9. Teken die grafiek van die funksie $y = -x^2 + 4$ en toon alle afsnitte met die asse.

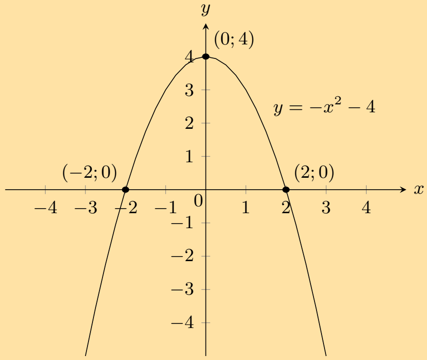
   Oplossing:

   Die y-afsnit is $(0; 4)$. Die x-afsnitte is gevind deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 4 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

   Dus die x-afsnitte is: $(2; 0)$ en $(-2; 0)$.

   Teken die grafiek:



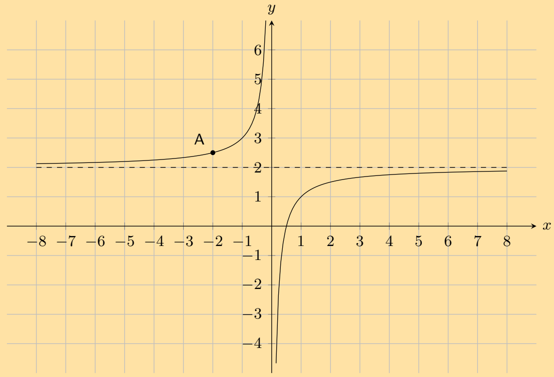
Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JKX 2. 2JKY 3. 2JKZ 4. 2JM2 5. 2JM3 6. 2JM4 7. 2JM5 8. 2JM6 9. 2JM7

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Exercise 6 – 4:

1. Die volgende grafiek toon 'n hiperboliese vergelyking van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$. **Punt A** word getoon by $\left(-2; \frac{5}{2}\right)$. Bereken die waardes van a en q.



Oplossing:

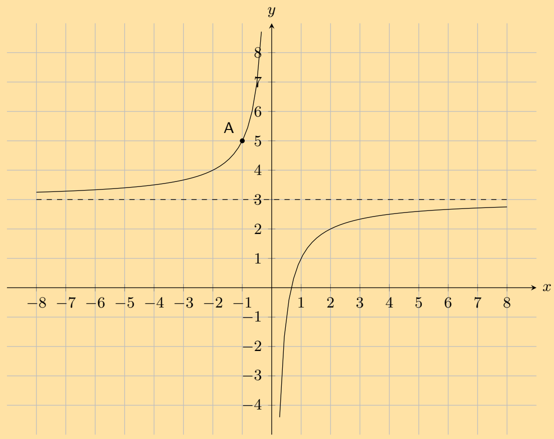
$$q = 2$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x} + 2 \\ \left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{a}{(-2)} + 2 \\ -2\left(\frac{5}{2}\right) &= \left[\frac{a}{-2} + 2\right](-2) \\ -5 &= a - 4 \\ -1 &= a \end{aligned}$$

Dus $a = -1$ en $q = 2$.

Die vergelyking is $y = -\frac{1}{x} + 2$.

2. Die volgende grafiek toon 'n hiperboliese vergelyking van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$. **Punt A** word getoon by $(-1; 5)$. Bereken die waardes van a en q.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
q &= 3 \\
\\
y &= \frac{a}{x} + 3 \\
(5) &= \frac{a}{(-1)} + 3 \\
-1(5) &= \left[\frac{a}{-1} + 3\right](-1) \\
-5 &= a - 3 \\
-2 &= a
\end{aligned}
$$

Dus $a = -2$ en $q = 3$.

Die vergelyking is $y = -\frac{2}{x} + 3$.

3. Gegewe die volgende vergelyking:

$$y = \frac{3}{x} + 2$$

   a) Bepaal die posisie van die y-afsnit.
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{3}{x} + 2 \\
&= \frac{3}{(0)} + 2 \\
&\text{ongedefineerd}
\end{aligned}
$$

   Daar geen y-afsnit.

   b) Bepaal die posisie van die x-afsnit. Gee jou antwoord as 'n breuk.
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{3}{x} + 2 \\
(0) &= \frac{3}{x} + 2 \\
(x)(0) &= \left[\frac{3}{x} + 2\right](x) \\
0 &= 3 + 2x \\
-3 &= 2x \\
x &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

4. Gegewe die volgende vergelyking:

$$y = -\frac{2}{x} - 2$$

   a) Bepaal die posisie van die y-afsnit.
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{2}{x} - 2 \\
y &= -\frac{2}{(0)} - 2 \\
&\text{ongedefineerd}
\end{aligned}
$$

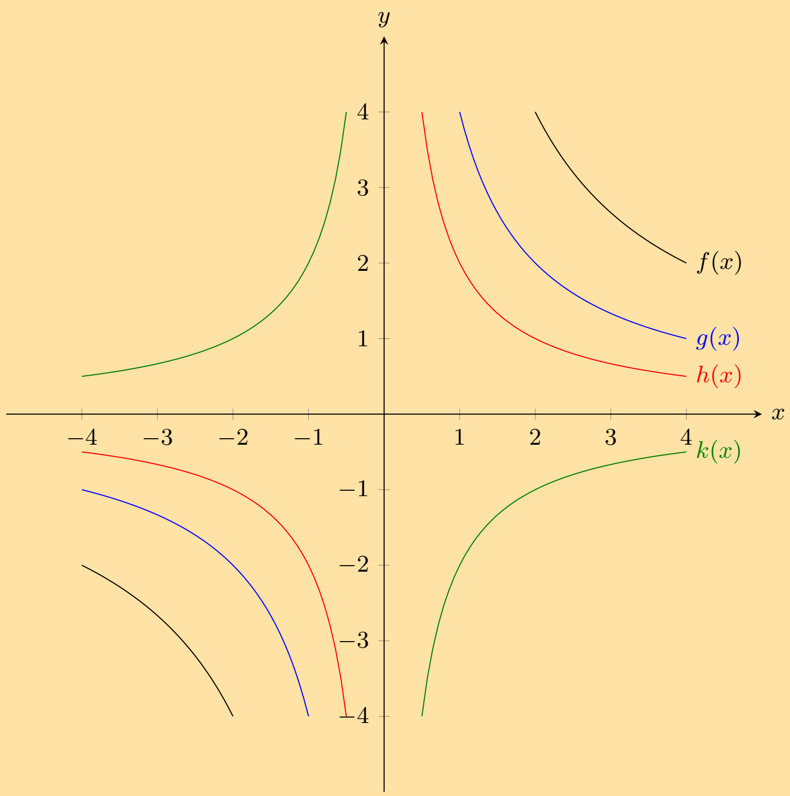
   Daar is geen y-afsnit nie.

b) Bepaal die posisie van die x-afsnit.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{2}{x} - 2 \\
(0) &= -\frac{2}{x} - 2 \\
(x)(0) &= \left[-\frac{2}{x} - 2\right](x) \\
0 &= -2 - 2x \\
2 &= -2x \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

5. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



a) $y = \frac{2}{x}$

Oplossing:

$h(x)$

b) $y = \frac{4}{x}$

Oplossing:

$g(x)$

c) $y = -\frac{2}{x}$

Oplossing:

$k(x)$

d) $y = \frac{8}{x}$

Oplossing:

$f(x)$

6. Gegee die funksie: $xy = -6$.

a) Teken die grafiek.

Oplossing:

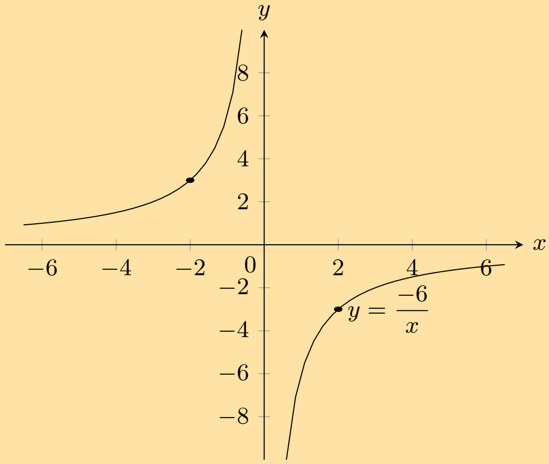
a is negatief so die funksie lê in die tweede en vierde kwadrante.

Daar is geen y-afsnitte en geen x-afsnitte.

Ons kan die grafiek teken met behulp van 'n tabel van waardes.

x	-2	-1	1	2
y	3	6	-6	-3

Teken die grafiek:



b) Lê die punt $(-2; 3)$ op die grafiek? Gee 'n rede vir jou antwoord.

Oplossing:

As ons die punt $(-2; 3)$ vervang in elke kant van die vergelyking, kry ons:

$$LK = -6$$
$$RK = xy = (-2)(3) = -6$$

Dit bevredig die vergelyking, dus lê die punt wel op die grafiek.

c) As die x-waarde van 'n punt op die grafiek 0,25 is, wat is die ooreenstemmende y-waarde?

Oplossing:

Vervang die waarde van x:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-6}{0{,}25} \\ &= \frac{-6}{\frac{1}{4}} \\ &= -6 \times \frac{4}{1} \\ &= -24 \end{aligned}$$

d) Wat gebeur met die y-waardes as die x-waardes baie groot word?

Oplossing:

Die y-waardes verminder as die x-waardes baie groot word. Hoe groter die noemer (x), hoe kleiner is die waarde van die breuk (y).

e) Gee die vergelykings van die asimptote.

Oplossing:

Die grafiek is nie vertikaal of horisontaal geskuif nie, dus is die asimptote $x = 0$ en $y = 0$.

f) Met die lyn $y = -x$ as lyn van simmetrie, watter punt is simmetries aan $(-2; 3)$?

Oplossing:

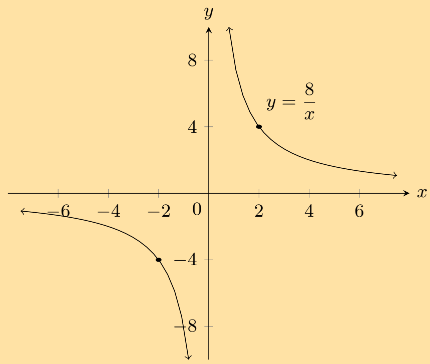
Oor die lyn van simmetrie $y = -x$, is $(-3; 2)$ die punt wat simmetries is ten opsigte van $(-2; 3)$.

7. Gegee die funksie: $h(x) = \frac{8}{x}$.

a) Teken die grafiek.
Oplossing:
a is positief, so die funksie lê in die eerste en derde kwadrante.
Daar is geen y-afsnit en geen x-afsnitte nie.
Ons kan die grafiek teken met behulp van 'n tabel van waardes.

x	-2	-1	1	2
y	-4	-8	8	4

Teken die grafiek:

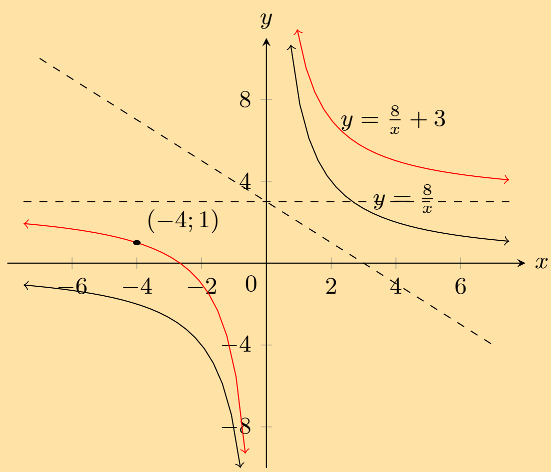


b) Hoe sal die grafiek van $g(x) = \dfrac{8}{x} + 3$ vergelyk met die grafiek van $h(x) = \dfrac{8}{x}$? Verduidelik jou antwoord volledig.
Oplossing:
Die grafiek $g(x) = \dfrac{8}{x} + 3$ is die grafiek van $h(x) = \dfrac{8}{x}$, vertikaal opwaarts geskuif met 3 eenhede. Hulle sal dieselfde vorm hê, maar die asimptoot van $g(x)$ sal $y = 3$ wees in plaas van $y = 0$ (vir $h(x)$) en die as van simmetrie sal $y = -x + 3$ wees in plaas van $y = -x$.

c) Teken die grafiek van $y = \dfrac{8}{x} + 3$ op dieselfde assestelsel en toon die asimptote, asse van simmetrie en die koördinate van een punt op die grafiek.
Oplossing:
a is positief, so die funksie lê in die eerste en derde kwadrante.
Vir $y = \frac{8}{x} + 3$ daar is geen y-afsnit nie. Die x-afsnit is $-\frac{8}{3}$.
Ons kan die grafiek teken met behulp van 'n tabel van waarde.

x	-4	-2	2	4
y	1	-1	7	5

Teken die grafiek:



8. Skets die gegewe funksies en beskryf die transformasie wat gebruik is om die tweede funksie te verkry. Toon alle asimptote.

a) $y = \frac{1}{x}$ en $\frac{3}{x}$

Oplossing:

a is positief vir beide grafieke, so beide grafieke lê in die eerste en derde kwadrante.

Vir beide grafieke daar is geen y-afsnitte en geen x-afsnitte nie.

Ons kan die grafieke teken met behulp van 'n tabel van waardes.

$y = \frac{1}{x}$:

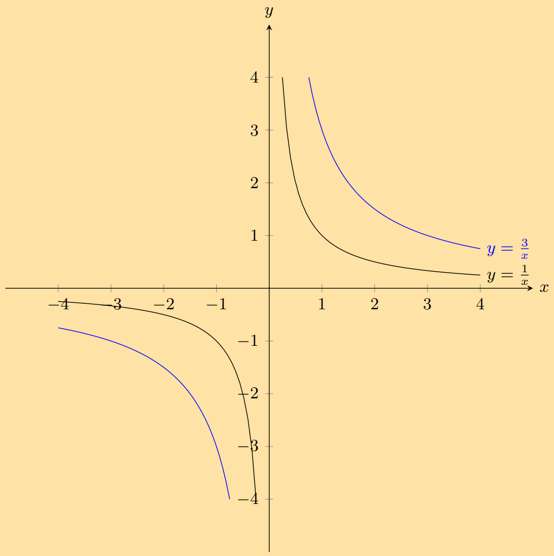
x	-2	-1	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$

$y = \frac{3}{x}$:

x	-2	-1	1	2
y	$-\frac{3}{2}$	-3	3	$\frac{3}{2}$

Die asimptote is $y = 0$ en $x = 0$.

Teken die grafieke.



Vergroting met 'n faktor van 3

b) $y = \frac{6}{x}$ en $\frac{6}{x} - 1$

Oplossing:

a is positief vir beide grafieke, so beide grafieke lê in die eerste en derde kwadrante.

Vir beide grafiek daar is geen y-afsnitte nie. Vir $y = \frac{6}{x}$ daar is geen x-afsnit nie. Vir $y = \frac{6}{x} - 1$ is die x-afsnit $(6; 0)$.

Ons kan die grafieke teken met behulp van 'n tabel van waardes:

$y = \frac{6}{x}$:

x	-2	-1	1	2
y	-3	-6	6	3

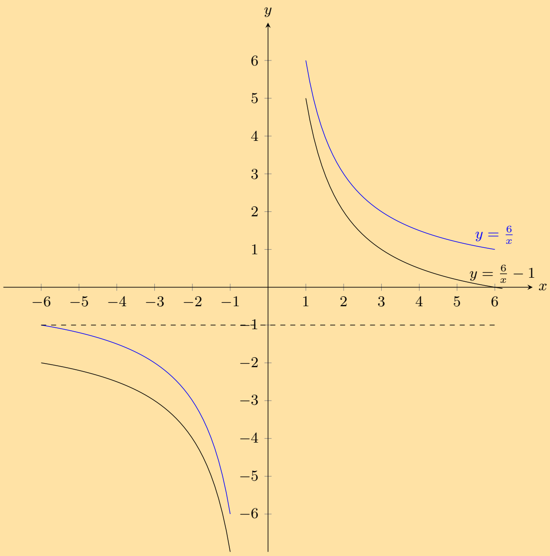
$y = \frac{6}{x} - 1$:

x	-2	-1	1	2
y	-4	-7	5	2

Die asimptote vir $y = \frac{6}{x}$ is $y = 0$ en $x = 0$.

Die asimptote vir $y = \frac{6}{x} - 1$ is $y = -1$ en $x = 0$.

Teken die grafieke:



Translasie van 1 eenheid afwaarts.

c) $y = \dfrac{5}{x}$ en $-\dfrac{5}{x}$

Oplossing:

$y = \dfrac{5}{x}$:

a is positief, so die grafiek lê in die eerste en derde kwadrante.

Daar is geen y-afsnitte en geen x-afsnitte.

Ons kan die grafieke teken met behulp van 'n tabel van waardes:

x	-2	-1	1	2
y	$-\frac{5}{2}$	-5	5	$\frac{5}{2}$

Die asimptote is $y = 0$ en $x = 0$.

$y = -\dfrac{5}{x}$:

a is negatief, so die grafiek lê in die tweede en vierde kwadrante.

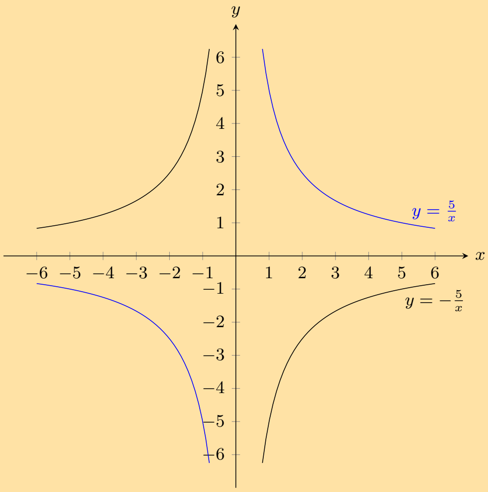
Daar is geen y-afsnit en geen x-afsnit.

Ons kan die grafieke teken met behulp van 'n tabel van waardes:

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{5}{2}$	5	-5	$-\frac{5}{2}$

Die asimptote is $y = 0$ en $x = 0$.

Teken die grafieke:



Refleksie om die x-as of refleksie om die y-as.

d) $y = \frac{1}{x}$ en $\frac{1}{2x}$

Oplossing:

a is positief vir beide grafieke, en so beide grafieke lê in die eerste en derde kwadrante.

Vir beide grafieke daar is geen y-afsnit en geen x-afsnit nie.

Ons kan die grafieke teken met behulp van 'n tabel van waardes:

$y = \frac{1}{x}$:

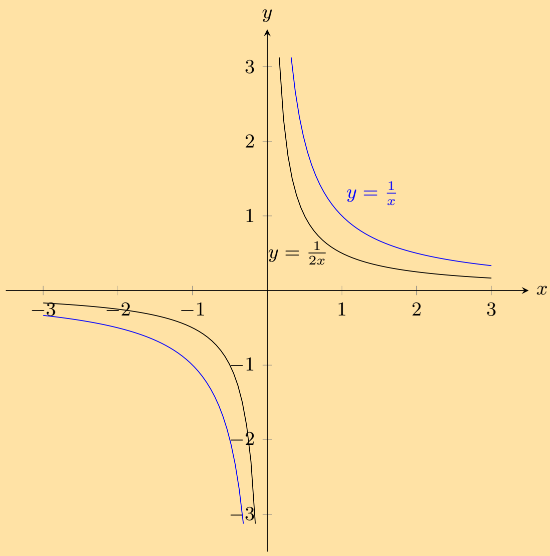
x	-2	-1	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2x}$:

x	-2	-1	1	2
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Die asimptote vir beide grafieke is $y = 0$ en $x = 0$.

Teken die grafieke:



Reduksie of verkleining met 'n faktor van 2

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JM8 2. 2JM9 3. 2JMB 4. 2JMC 5. 2JMD 6. 2JMF
7. 2JMG 8a. 2JMH 8b. 2JMJ 8c. 2JMK 8d. 2JMM

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

6.5 Eksponensiële funksies

CAPS verklaar om net die gevolge van a en q op 'n eksponensiële grafiek ondersoek. Dit is egter ook belangrik vir leerders om te sien dat b 'n ander effek op die grafiek het afhangend of $b > 1$ of $0 < b < 1$.

Om hierdie rede is die effek van b is ingesluit in die ondersoek sodat leerders kan sien wat gebeur wanneer $b > 1$ en wanneer $0 < b < 1$.

Let ook daarop dat die bogenoemde uitgewerkte voorbeeld die gevolge van b op die eksponensiële grafiek verder versterk.

1. Gegewe die volgende vergelyking:
   $y = -\frac{2}{3}.(3)^x + 1$

   a) Bereken die y-afsnit. Jou antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.
   Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{2}{3}\right).(3)^x + 1 \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right).(3)^{(0)} + 1 \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right).(1) + 1 \\ &= (-0{,}6666...) + 1 \\ &= 0{,}33 \end{aligned}$$

   Die y-afsnit is $(0; 0{,}33)$.

   b) Bereken nou die x-afsnit. Benader jou antwoord tot een desimale plek indien nodig.
   Oplossing:
   Ons bereken die x-afsnit deur $y = 0$ te stel. Dan los ons vir x op:

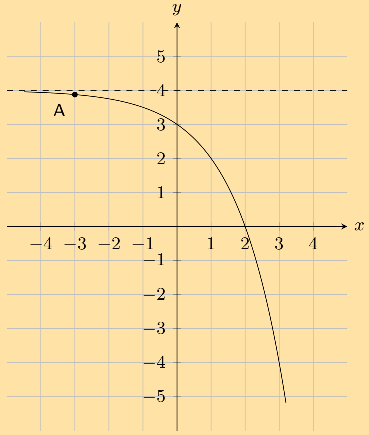
$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\frac{2}{3}\right).(3)^x + 1 \\ -1 &= \left(-\frac{2}{3}\right)(3)^x \\ \left(-\frac{3}{2}\right)(-1) &= \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right).(3)^x \\ \frac{3}{2} &= 3^x \end{aligned}$$

   Om die antwoord te vind probeer ons verskillende waardes van x:

$$\begin{aligned} \text{Probeer: } 3^{-1} &= 0{,}333... \\ \text{Probeer: } 3^0 &= 1 \\ \text{Probeer: } 3^1 &= 3 \end{aligned}$$

   Ons kan sien die eksponent moet tussen 0 en 1 wees. Vervolgens probeer ons waardes wat begin by 0,1 en kyk wat die waarde van die eksponent is. Deur dit te doen, vind ons dat $x = 0{,}4$.
   Die x-afsnit is $(0{,}4; 0)$.

2. Die grafiek toon die eksponsiële funksie met die vergelyking $y = a \ . \ 2^x + q$. Een punt op die kromme word gegee: **Punt A** is by $(-3; 3{,}875)$. Bepaal die waardes van a en q, korrek tot die naaste heelgetal.



Oplossing:

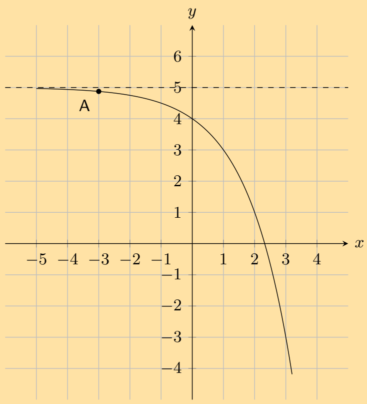
Die asimptoot lê by $y = 4$. Dus q is 4.

Op hierdie punt weet ons die vergelyking van die grafiek moet $y = a\ .\ 2^x + 4$ wees.

$$\begin{aligned} y &= a(2)^x + 4 \\ (3{,}875) &= a(2)^{(-3)} + 4 \\ 3{,}875 - 4 &= a(2)^{(-3)} \\ -0{,}125 &= a(0{,}125) \\ -1 &= a \end{aligned}$$

Dus $a = -1$ en $q = 4$

3. Hieronder sien jy 'n grafiek van die eksponensiële funksie met die vergelyking $y = a\ .\ 2^x + q$. Een punt op die kromme is gegee: **Punt A** is by $(-3; 4{,}875)$. Bereken die waardes van a en q, korrek tot die naaste heelgetal.



Oplossing:

Die asimptoot lê by $y = 5$. Dus is q 5.

Op hierdie punt weet ons die vergelyking van die grafiek moet $y = a\ .\ 2^x + 5$ wees.

$$\begin{aligned} y &= a(2)^x + 5 \\ (4{,}875) &= a(2)^{(-3)} + 5 \\ 4{,}875 - 5 &= a(2)^{(-3)} \\ -0{,}125 &= a(0{,}125) \\ -1 &= a \end{aligned}$$

Dus $a = -1$ en $q = 5$.

4. Gegewe die volgende vergelyking:

$y = \frac{1}{4}\ .\ (4)^x - 1$

a) Bereken die y-afsnit. Jou antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{4}\right)\ .\ (4)^x - 1 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)\ .\ (4)^{(0)} - 1 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)\ .\ (1) - 1 \\ &= (0{,}25) - 1 \\ &= -0{,}75 \end{aligned}$$

Dus is die y-afsnit $(0; -0{,}75)$.

b) Bereken nou die x-afsnit.

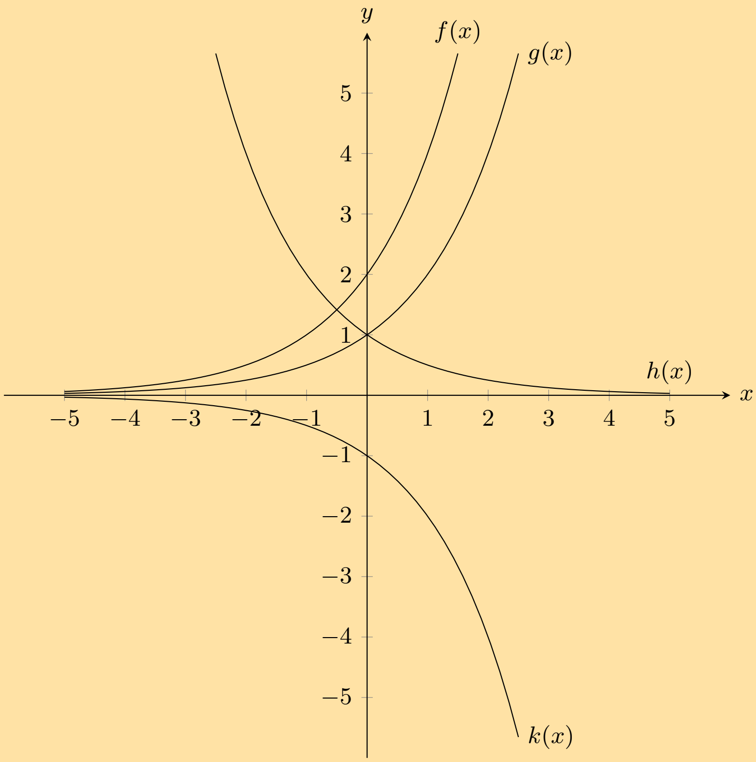
Oplossing:

Ons bereken die x-afsnit deur $y = 0$ te stel. Begin dan om vir x op te los.

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{4}\right) . (4)^x - 1 \\ 1 &= \left(\frac{1}{4}\right) . (4)^x \\ (4)(1) &= (4)\left(\frac{1}{4}\right) . (4)^x \\ 4^1 &= 4^x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Dus is die x-afsnit $(1; 0)$.

5. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



a) $y = 2^x$

Oplossing:

$g(x)$

b) $y = -2^x$

Oplossing:

$k(x)$

c) $y = 2 \ . \ 2^x$

Oplossing:

$f(x)$

d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Oplossing:

$h(x)$

6. Gegee die funksies $y = 2^x$ en $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Teken die grafieke op dieselfde assestelsel.

Oplossing:

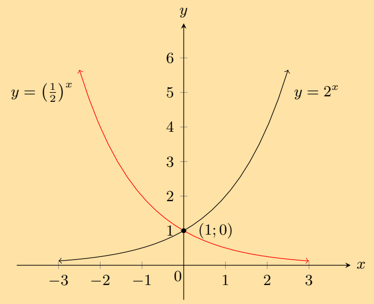
Vir $y = 2^x$:

a is positief en groter as 1, so die grafiek buig opwaarts. Die y-afsnit is $(0;1)$. Daar is geen x-afsnit. Die asimptoot is die lyn $x = 0$.

Vir $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

a is positief en kleiner as 1, so die grafiek buig afwaarts. Die y-afsnit is $(0;1)$. Daar is geen x-afsnit. Die asimptoot is die lyn $x = 0$.

Die grafiek is:



b) Is die x-as 'n asimptoot of 'n as van simmetrie vir beide grafieke? Verduidelik jou antwoord.

Oplossing:

Die x-as is 'n asimptoot vir beide grafieke omdat beide al nader aan die x-as kom, maar dit nooit raak nie.

c) Watter grafiek word verteenwoordig deur die vergelyking $y = 2^{-x}$? Verduidelik jou antwoord.

Oplossing:

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ word verteenwoordig deur die vergelyking $y = 2^{-x}$ omdat $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(2^{-1}\right)^x = 2^{-x}$.

d) Los die vergelyking $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ grafies op en kontroleer deur substitusie of jou antwoord reg is.

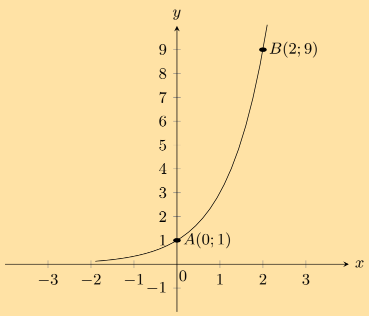
Oplossing:

Die grafieke sny in die punt $(0;1)$. As ons hierdie waardes vervang in elke kant van die vergelyking, kry ons:

$$\text{LK: } 2^x = 2^0 = 1 \text{ en}$$
$$\text{RK: } (\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{2})^0 = 1$$

LK = RK, dus is die antwoord reg.

7. In die bygaande diagram, sien ons die kromme van die eksponensiële funksie f sny die y-as by die punt $A(0;1)$ en gaan deur die punt $B(2;9)$.



a) Bepaal die vergelyking van die funksie f.

Oplossing:

Die algemene vorm van die vergelyking is $f(x) = a \cdot b^x + q$.

Ons word $A(0;1)$ en $B(2;9)$ gegee.

Die asimptoot is $y = 0$, dus $q = 0$.

Vervang die waardes van punt A:

$$1 = a \cdot b^0$$
$$1 = a$$

Vervang die waardes van punt B:

$$\begin{aligned} 9 &= b^2 \\ 3^2 &= b^2 \\ \therefore b &= 3 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking $f(x) = 3^x$.

b) Bepaal die vergelyking van funksie $h(x)$, die refleksie van $f(x)$ in die x-as.

Oplossing:

$h(x) = -3^x$

c) Bepaal die terrein van $h(x)$.

Oplossing:

Terrein: $(-\infty; 0)$

d) Bepaal die vergelyking van funksie $g(x)$, die refleksie van $f(x)$ in die y-as.

Oplossing:

$g(x) = 3^{-x}$

e) Bepaal die vergelyking van die funksie $j(x)$ as $j(x)$ 'n vertikale strekking is van $f(x)$ met $+2$ eenhede.

Oplossing:

$j(x) = 2\ .\ 3^x$

f) Bepaal die vergelyking van die funksie $k(x)$ as $k(x)$ 'n vertikale skuif is van $f(x)$ met -3 eenhede.

Oplossing:

$k(x) = 3^x - 3$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

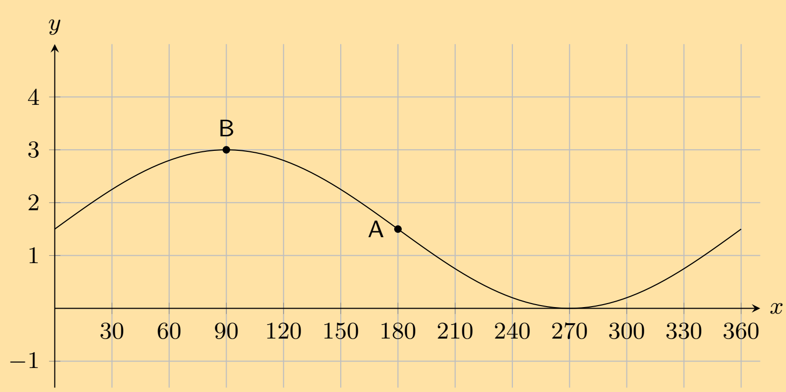
1. 2JMP 2. 2JMQ 3. 2JMR 4. 2JMS 5. 2JMT 6. 2JMV 7. 2JMW

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

6.6 Trigonometriese funksies

Exercise 6 – 6:

1. Die grafiek van die vorm: $y = a \sin \theta + q$ word gegee. **Punt A** is by $(180°; 1{,}5)$, en **Punt B** is by $(90°; 3)$. Vind die waardes van a en c.



Oplossing:

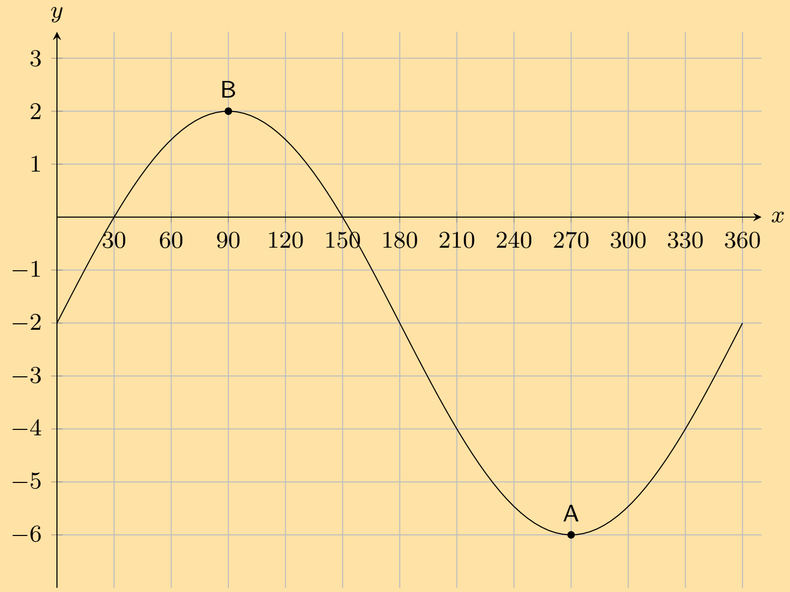
Om q te vind neem ons kennis dat q die grafiek opwaarts of afwaarts skuif. Om q te bepaal kan ons na enige punt op die grafiek kyk. Byvoorbeeld punt A is $(180°; 1{,}5)$. Vir die oorsponklike sinus grafiek sou punt A by $(180°; 0)$ wees. Vir hierdie grafiek ons sien dat hierdie punt opwaarts verskuif is met 1,5 of $\frac{3}{2}$ eenhede. Dus $q = \frac{3}{2}$.

Om a te vind neem ons kennis dat die y-waarde by die middel (punt A) 1,5 is, terwyl die y-waarde by die top (punt B) 3 is. Ons kan die amplitude vind deur die berkening van die afstand van die top van die grafiek tot die middel van die grafiek: $3 - 1{,}5 = 1{,}5$. Dus $a = \frac{3}{2}$.

Die volledige vergelyking vir die grafiek getoon in hierdie vraag is $y = \frac{3}{2}\sin\theta + \frac{3}{2}$.

Dus $a = \frac{3}{2}$ en $q = \frac{3}{2}$

2. Die grafiek van die vorm: $y = a\sin\theta + q$ word gegee. **Punt A** is by $(270°; -6)$, en **Punt B** is by $(90°; 2)$. Bepaal die waardes van a en q.



Oplossing:

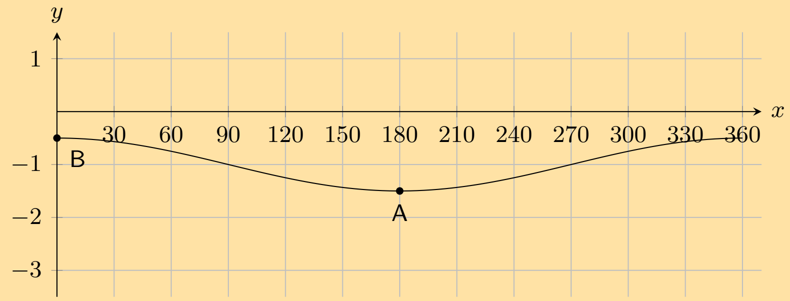
Om a te vind neem ons kennis dat die y-waarde by die onderste (punt A) -6 is, terwyl die y-waarde by die top (punt B) 2 is. Ons kan die amplitude bereken deur die afstand van die top van die grafiek tot die onderkant van die grafiek te bepaal en dan dit deur 2 te deel, want hierdie afstand is twee keer die amplitude: $\frac{2-(-6)}{2} = 4$. Dus $a = 4$.

Om q te vind neem ons kennis dat q die grafiek opwaarts of afwaarts skuif. Om q te bepaal kan ons kyk na enige punt op die grafiek. Byvoorbeeld punt B is $(90°; 2)$. Vir die oorsponklike sinus grafiek met dieselfde a waarde (b.v. $4\sin\theta$) sou punt B by $(90°; 4)$ wees. Vir hierdie grafiek sien ons dat hierdie punt afwaarts verskuif met 2 eenhede. Dus $q = -2$.

Die volledige vergelyking vir die grafiek getoon in hierdie vraag is $y = 4\sin\theta - 2$.

Dus $a = 4$ en $q = -2$

3. Die grafiek hieronder toon 'n trigonometriese vergelyking van die vorm : $y = a\cos\theta + q$. Twee punte word op die grafiek getoon: **Punt A** is by $(180°; -1{,}5)$, en **Punt B**: $(0°; -0{,}5)$. Bereken die waardes van a (die amplitude van die grafiek) en q (die vertikale verskuiwing van die grafiek).



Oplossing:

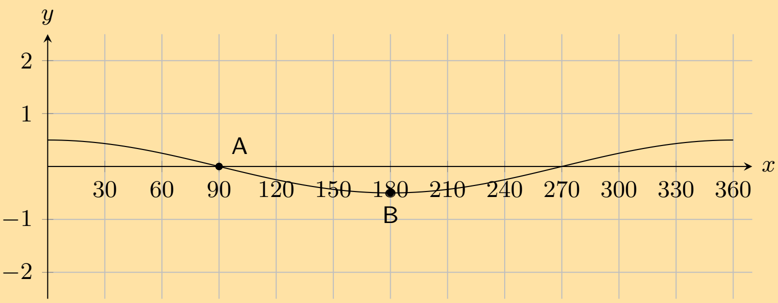
Om a te vind neem ons kennis dat die y-waarde by die onderste (punt A) $-1{,}5$ is, terwyl die y-waarde by die top (punt B) $-0{,}5$ is. Ons kan die amplitude bereken deur die afstand van die top van die grafiek tot die onderkant van die grafiek te bepaal en dan deur 2 te deel, want hierdie afstand is twee keer die amplitude: $\frac{-0{,}5-(-1{,}5)}{2} = \frac{1}{2}$. Dus $a = \frac{1}{2}$.

Om q te vind ons neem kennis dat q die grafiek opwaarts of afwaarts skuif. Om q te bepaal kan ons kyk na enige punt op die grafiek. Byvoorbeeld punt B is $(0°; -0{,}5)$. Vir die oorsponklike cosinus grafiek met dieselfde a waarde (b.v. $\frac{1}{2}\cos\theta$) sou punt B $(0°; 0{,}5)$ wees. Vir hierdie grafiek sien ons dat hierdie punt afwaarts verskuif 1 eenheid. Dus $q = -1$.

Die volledige vergelyking vir die grafiek getoon in hierdie vraag is $y = \frac{1}{2}\cos\theta - 1$.

Dus $a = \frac{1}{2}$, en $q = -1$.

4. Die grafiek hieronder toon 'n trigonometriese vergelyking van die vorm : $y = a\cos\theta + q$. Twee punte word op die grafiek getoon: **Punt A** is by $(90°; 0{,}0)$, en **Punt B**: $(180°; -0{,}5)$. Bereken die waardes van a (die amplitude van die grafiek) en q (die vertikale verskuiwing van die grafiek).



Oplossing:

Om a te vind neem ons kennis dat die y-waarde by die onderste (punt B) $-0{,}5$ is, terwyl die y-waarde by die top (punt A) 0 is. Ons kan die amplitude bereken deur die afstand van die top van die grafiek tot die onderkant van die grafiek te bepaal en dan deur 2 te deel, want hierdie afstand is twee keer die amplitude: $0 - (-0{,}5) = \frac{1}{2}$. Dus $a = \frac{1}{2}$.

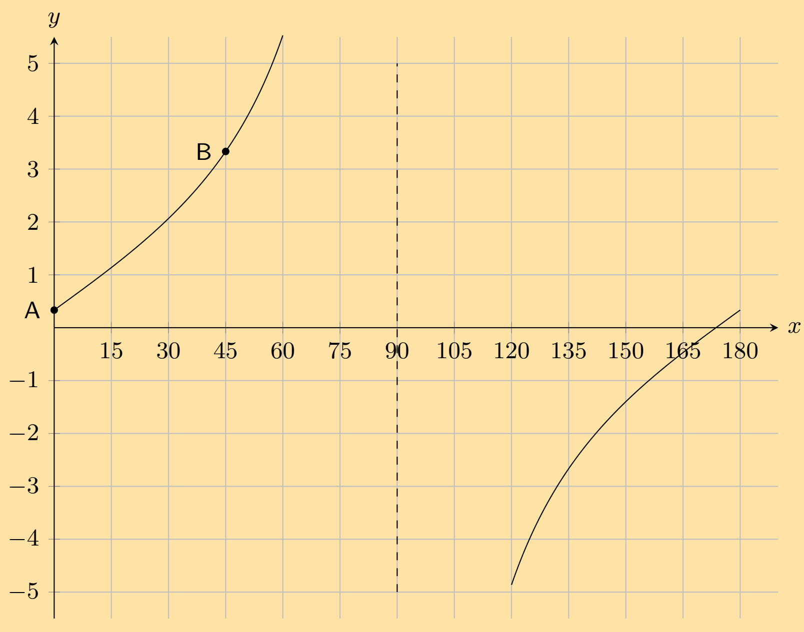
Om q te vind neem ons kennis dat q die grafiek opwaarts of afwaarts skuif. Om q te bepaal kan ons kyk na enige punt op die grafiek. Byvoorbeeld punt A is $(90°; 0)$. Vir die oorsponklike cosinus grafiek met dieselfde a waarde (b.v. $\frac{1}{2}\cos\theta$) sou punt A $(0°; 0)$ wees. Vir hierdie grafiek sien ons dat hierdie punt nie verskuif nie. Dus $q = 0$.

Die volledige vergelyking vir die grafiek getoon in hierdie vraag is $y = \frac{1}{2}\cos\theta$.

Dus $a = \frac{1}{2}$, en $q = 0$.

5. Op die grafiek hieronder sien jy 'n tangenskromme van die volgende vorm: $y = a\tan\theta + q$. Twee punte word gemerk op die kromme: **Punt A** is $\left(0°; \frac{1}{3}\right)$, en **Punt B** is $\left(45°; \frac{10}{3}\right)$.

Bereken, of bepaal andersins, die waardes van a en q.



Oplossing:

Om q te vind neem ons kennis dat q die grafiek opwaarts of afwaarts verskuif. Om q te bepaal kan ons kyk na enige punt op die grafiek. Byvoorbeeld punt A is by $\left(0°; \frac{1}{3}\right)$. Vir 'n oorsponklike tangensgrafiek sou punt A $(0°; 0)$ wees. Vir hierdie grafiek sien ons dat hierdie punt opwaarts verskuif het met $\frac{1}{3}$. Dus $q = \frac{1}{3}$.

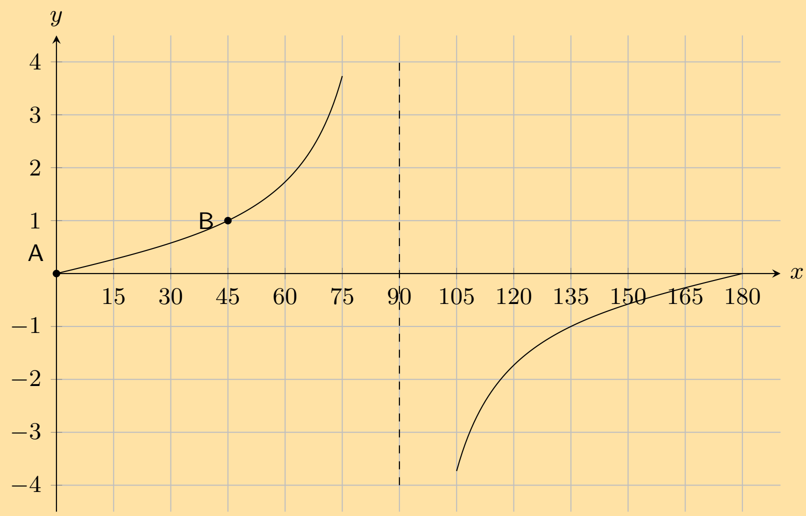
Om a te vind kan ons punt B substitueer in die vergelyking vir die tangensgrafiek:

$$
\begin{aligned}
y &= a\tan\theta + \frac{1}{3} \\
\left(\frac{10}{3}\right) &= a\tan 45^\circ + \frac{1}{3} \\
\frac{10}{3} &= a(1) + \frac{1}{3} \\
\frac{10}{3} - \frac{1}{3} &= a \\
3 &= a
\end{aligned}
$$

Die volledige vergelyking is: $y = 3\tan\theta + \frac{1}{3}$.

Dus $a = 3$ en $q = \frac{1}{3}$.

6. Die grafiek hieronder toon 'n tangensgrafiek met 'n vergelyking van die vorm $y = a\tan\theta + q$. Twee punte word gemerk op die kromme: **Punt A** is $(0^\circ; 0)$, en **Punt B** is $(45^\circ; 1)$.
Vind a en q.



Oplossing:

Om q te vind neem ons kennis dat q die grafiek opwaarts of afwaarts verskuif. Om q te vind kan ons kyk na enige punt op die grafiek. Byvoorbeeld punt A is by $(0^\circ; 0)$. Vir die oorsponklike tangensgrafiek sou punt A $(0^\circ; 0)$ wees. Vir hierdie grafiek sien ons dat hierdie punt nie verskuif het nie. Dus $q = 0$.

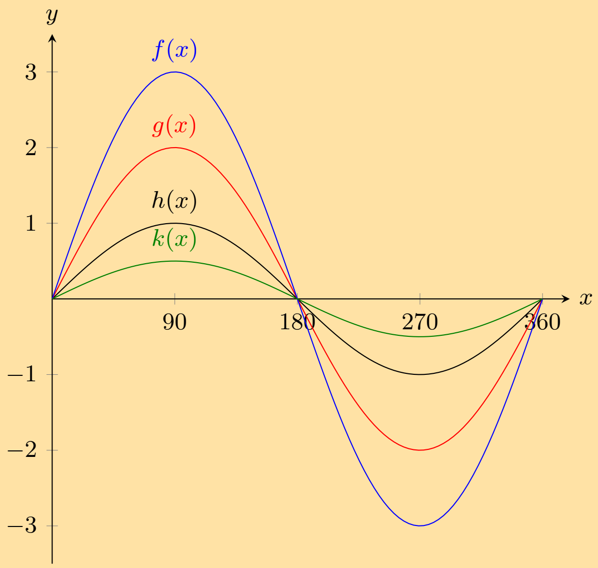
Om a te vind kan ons punt B substitueer in die vergelyking vir die tangensgrafiek:

$$
\begin{aligned}
y &= a\tan\theta + \frac{1}{3} \\
\left(\frac{10}{3}\right) &= a\tan 45^\circ + \frac{1}{3} \\
\frac{10}{3} &= a(1) + \frac{1}{3} \\
\frac{10}{3} - \frac{1}{3} &= a \\
3 &= a
\end{aligned}
$$

Die volledige vergelyking is: $y = \tan\theta$.

Dus $a = 1$ en $q = 0$.

7. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



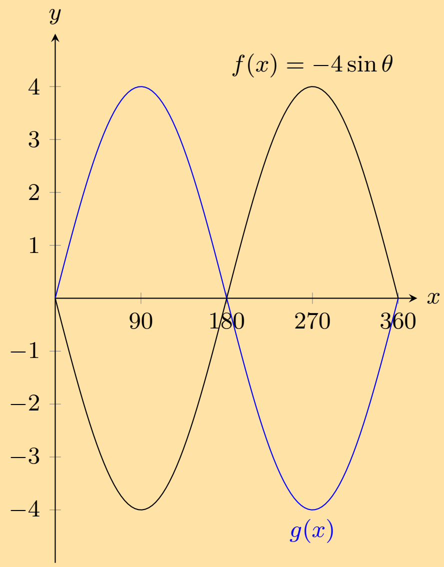
a) $y = \sin\theta$
Oplossing:
$h(x)$

b) $y = \frac{1}{2}\sin\theta$
Oplossing:
$k(x)$

c) $y = 3\sin\theta$
Oplossing:
$f(x)$

d) $y = 2\sin\theta$
Oplossing:
$g(x)$

8. Die grafiek toon funksies $f(x)$ en $g(x)$

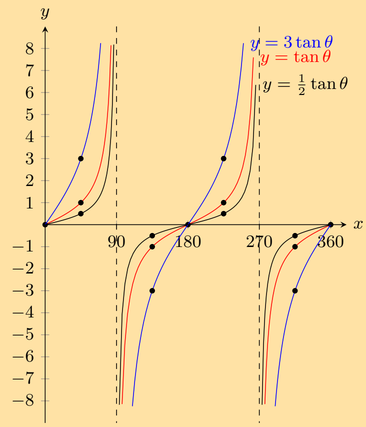


Wat is die vergelyking vir $g(x)$?
Oplossing:
$g(x) = -4\sin\theta$

9. Met behulp van die tabel hieronder, skets die drie funksies op dieselfde assestelsel.

θ	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
$\tan\theta$	0	1	ongedefineerd	-1	0	1	ongedefineerd	-1	0
$3\tan\theta$	0	3	ongedefineerd	-3	0	3	ongedefineerd	-3	0
$\frac{1}{2}\tan\theta$	0	$\frac{1}{2}$	ongedefineerd	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	ongedefineerd	$-\frac{1}{2}$	0

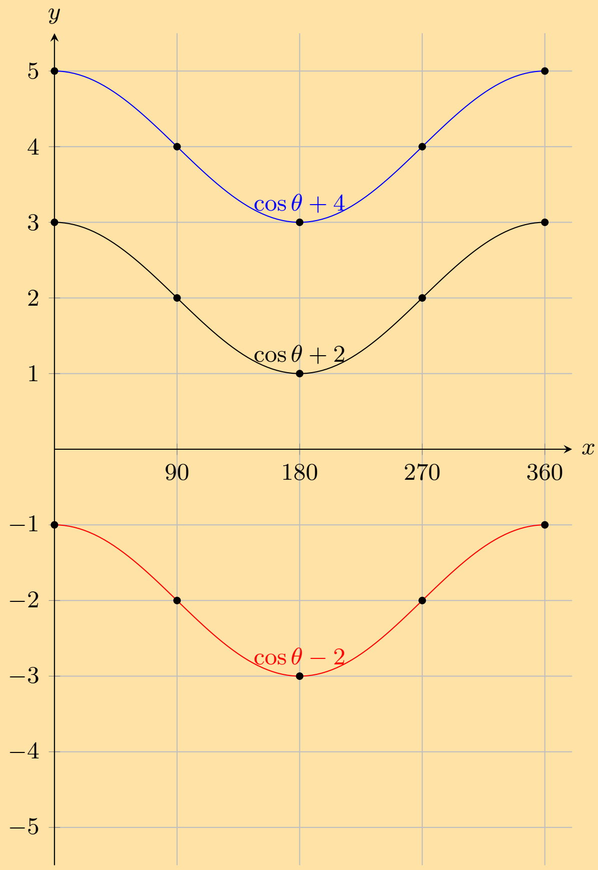
Oplossing:
Ons kry 'n tabel met waardes en kan dus elkeen van hierdie punte plot en hulle verbind met 'n gladde kromme.



10. Met behulp van die tabel hieronder, skets die drie funksies op dieselfde assestelsel.

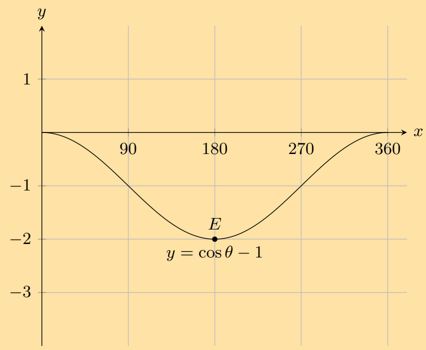
θ	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\cos\theta - 2$	-1	-2	-3	-2	-1
$\cos\theta + 4$	5	4	2	4	5
$\cos\theta + 2$	3	2	1	2	3

Oplossing:
Ons kry 'n tabel met waardes en kan dus elkeen van hierdie punte plot en hulle verbind met 'n gladde kromme.



11. Noem die koördinate by E en die terrein van die funksie.

a)

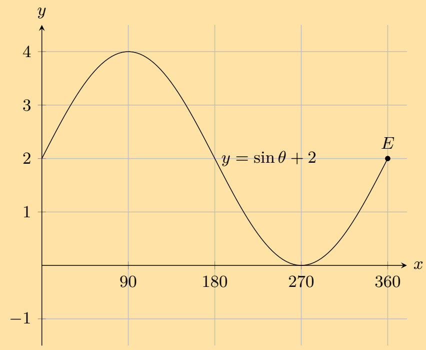


Oplossing:

Om die koördinate van E te vind lees ons die waarde af van die grafiek. Om die terrein te vind neem ons kennis dat hierdie 'n cosinusgrafiek is en dus die maksimum waarde by 0° (en by 360°). Die minimum waarde is by 180°. So ons lees die waarde van y op die grafiek by 0° en by 180°.

Dus $E(180^{\circ}; -2)$ en $-2 \leq y \leq 0$.

b)

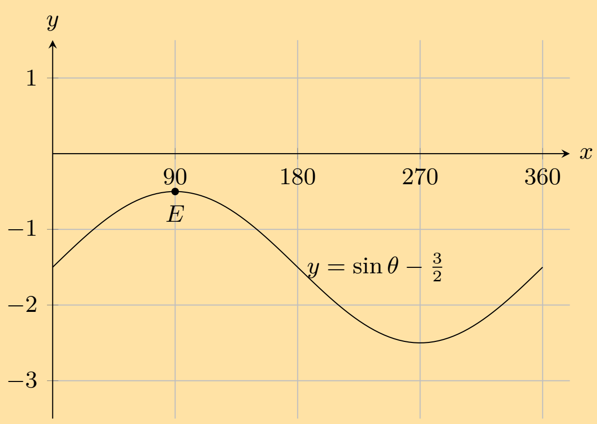


Oplossing:

Om die koördinate van E te vind lees ons die waarde af van die grafiek. Om die terrein te vind neem ons kennis dat hierdie 'n sinusgrafiek is en dus die maksimum waarde by 90°. Die minimum waarde is by 270°. So ons lees die waarde van y op die grafiek by 90° en by 270°.

Dus $E(360^{\circ}; 2)$ en $0 \leq y \leq 4$

c)

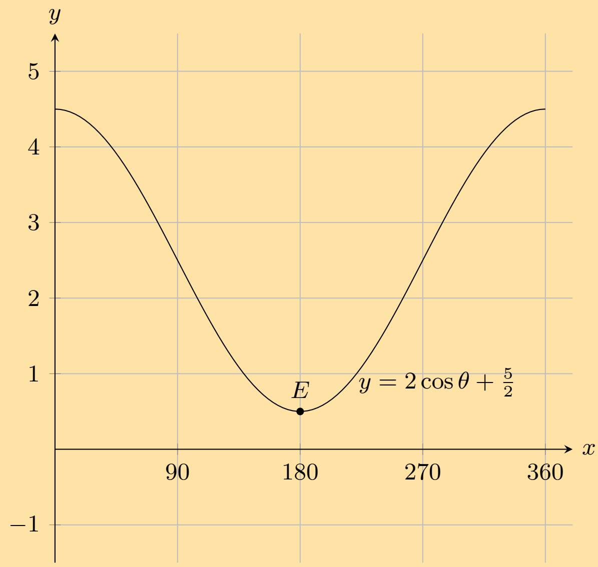


Oplossing:

Om die koördinate van E te vind lees ons die waarde af van die grafiek. Om die terrein te vind neem ons kennis dat hierdie 'n sinusgrafiek is en dus die maksimum waarde by 90°. Die minimum waarde is by 270°. So ons lees die waarde van y op die grafiek by 90° en by 270°.

Dus $E(90^{\circ}; -0{,}5)$ en $-2{,}5 \leq y \leq -0{,}5$

d)

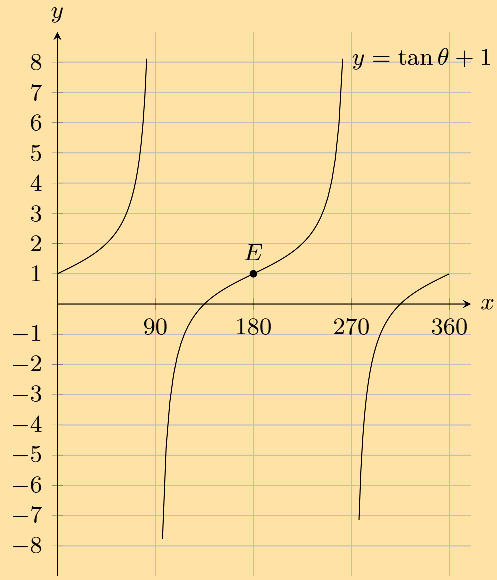


Oplossing:

Om die koördinate van E te vind lees ons die waarde af van die grafiek. Om die terrein te vind neem ons kennis dat hierdie 'n cosinusgrafiek is en dus die maksimum waarde by $0°$ (en by $360°$). Die minimum waarde is by $180°$. So ons lees die waarde van y op die grafiek by $0°$ en by $180°$.

Dus $E(180°; 0{,}5)$ en $0{,}5 \leq y \leq 4{,}5$

12. Meld die koördinate by E en die gebied en die terrein van die funksie in die gegewe interval.



Oplossing:

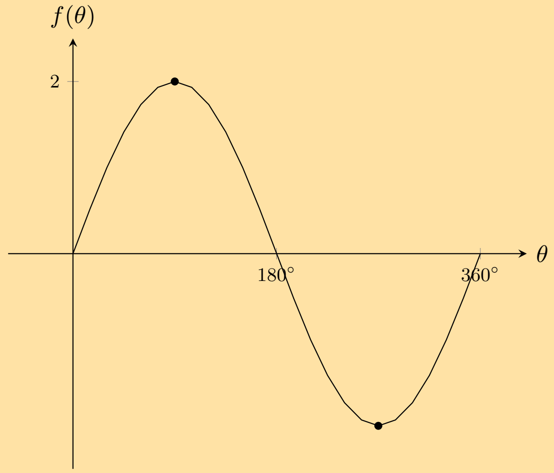
$E(180°; 1)$, terrein $y \in \mathbb{R}$ en gebied $0 \leq \theta \leq 360, x \neq 90, x \neq 270$

13. Maak gebruik van jou kennis van die effek van a en q en skets elk van die volgende grafieke, sonder die gebruik van 'n tabel van waardes, vir $\theta \in [0°; 360°]$

a) $y = 2\sin\theta$

Oplossing:

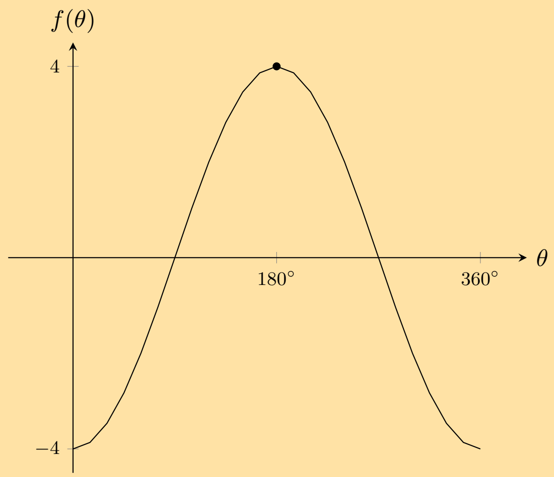
In hierdie geval is $q = 0$ so die basiese sinusgrafiek is nie afwaarts of opwaarts verskuif nie. Ons neem kennis dat $a = 2$, dus is die grafiek gestrek met 2 eenhede. Die maksimum waarde sal 2 wees en die minimumwaarde sal -2 wees.



b) $y = -4\cos\theta$

Oplossing:

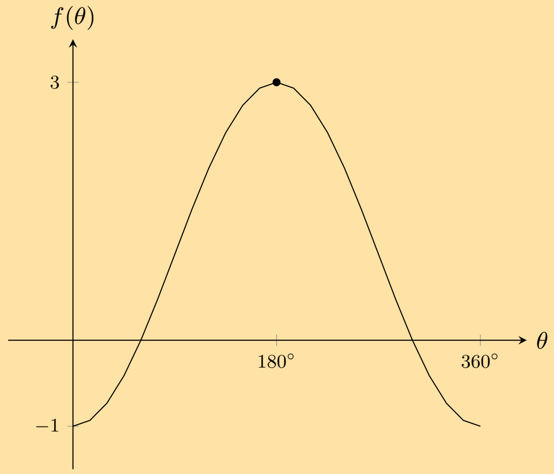
In hierdie geval is $q = 0$ so die basiese cosinusgrafiek is nie verskuif nie. Ons neem kennis dat $a = -4$, so die grafiek is gestrek met -4 eenhede. Die maksimumwaarde sal 4 wees en die minimumwaarde sal -4 wees.



c) $y = -2\cos\theta + 1$

Oplossing:

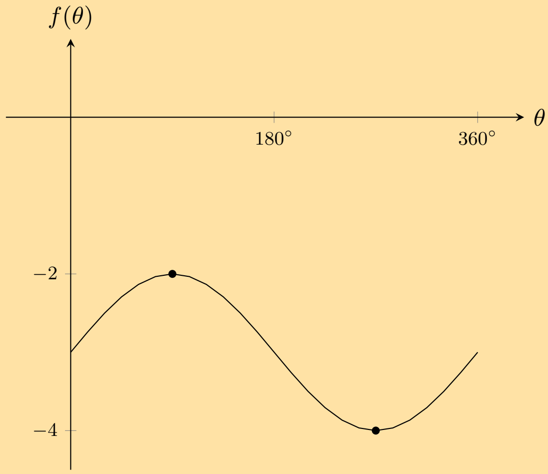
In hierdie geval is $q = 1$, so die basiese cosinusgrafiek is opwaarts verskuif met 1 eenheid. Ons neem kennis dat $a = -2$ so die grafiek is gestrek by -2 eenhede. Die maksimumwaarde sal 3 wees en die minimumwaarde sal -1 wees.



d) $y = \sin\theta - 3$

Oplossing:

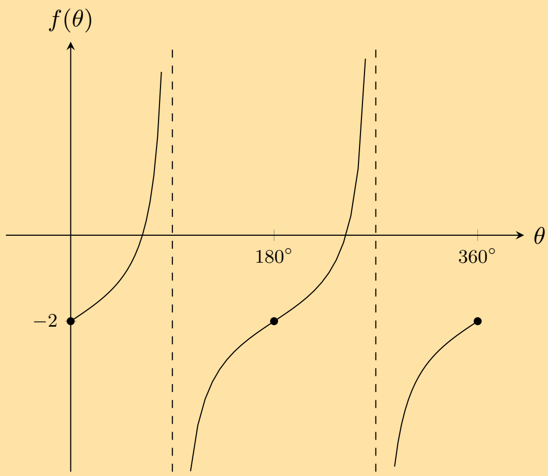
In hierdie geval is $q = -3$ en so die basiese sinusgrafiek is afwaarts verskuif met 3 eenhede. Ons neem kennis dat $a = 1$ en so die grafiek is nie gestrek nie. Die maksimumwaarde sal -2 wees en die minimumwaarde sal -4 wees.



e) $y = \tan\theta - 2$

Oplossing:

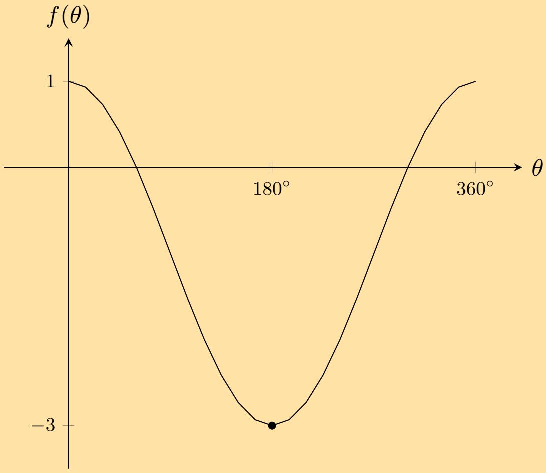
In hierdie geval is $q = -2$ so die basiese tangensgrafiek is afwaarts verskuif met 2 eenhede. Ons neem kennis dat $a = 1$ so die grafiek is nie gestrek nie. Wanneer $\theta = 0°$, $y = -2$. Net so wanneer $\theta = 180°$, $y = -2$ en wanneer $\theta = 360°$, $y = -2$.



f) $y = 2\cos\theta - 1$

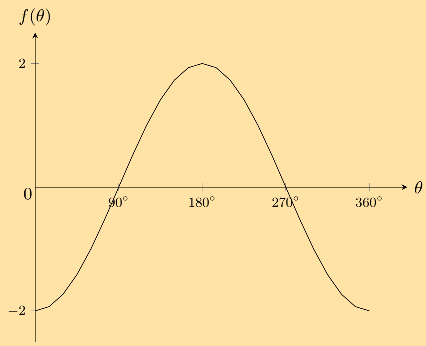
Oplossing:

In hierdie geval is $q = -1$ so die basiese cosinusgrafiek is afwaarts verskuif met 1 eenheid. Ons neem kennis dat $a = 2$ so die grafiek is gestrek met 2 eenhede. Die maksimumwaarde sal 1 wees en die minimumwaarde sal -3 wees.



14. Gee die vergelykings vir elk van die volgende grafieke:

a)

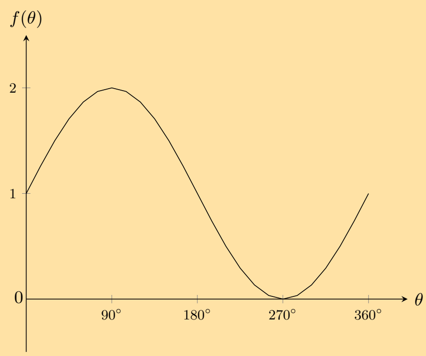


Oplossing:

Die algemene vorm van 'n cosinusgrafiek is $y = a\cos\theta + q$. Ons neem kennis dat in hierdie geval die grafiek nie verskuif is nie. Ons ook neem kennis dat die grafiek gestrek is met -2 eenhede.

Dus $y = -2\cos\theta$.

b)

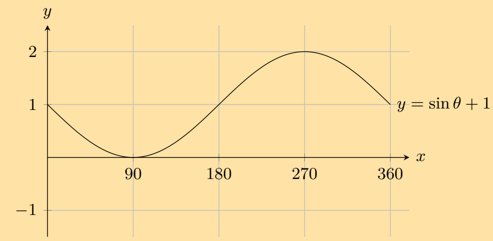


Oplossing:

Die algemene vorm van 'n sinusgrafiek is $y = a\sin\theta + q$. Ons neem kennis dat in hierdie geval die grafiek opwaarts verskuif is met 1 eenheid. Ons ook neem kennis dat die grafiek nie gestrek is nie.

Dus $y = \sin\theta + 1$.

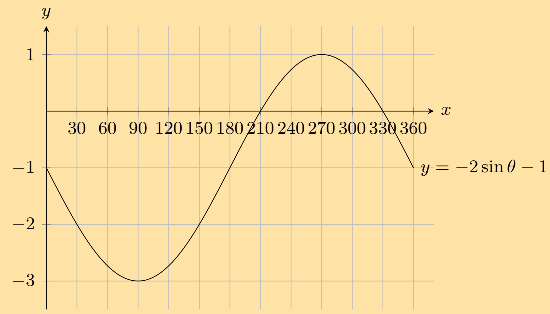
15. Vir watter waardes van θ in die gegewe interval is die funksie toenemend?



Oplossing:

$90° < \theta < 270°$

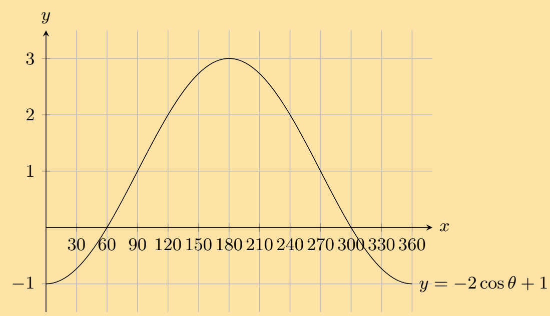
16. Vir watter waardes van θ in die gegewe interval is die funksie negatief ?



Oplossing:

$0° < \theta < 210°$ en $330° < \theta < 360°$

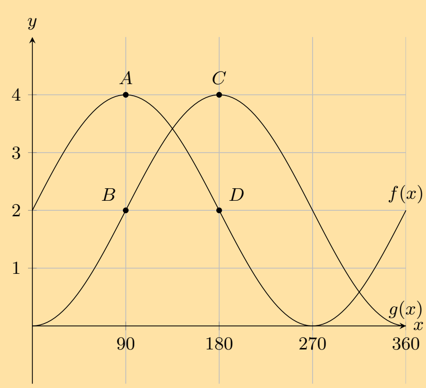
17. Vir watter waardes van θ in die gegewe interval is die funksie positief?



Oplossing:

$60° < \theta < 300°$

18. Gegewe die volgende grafiek.



a) Noem die koördinate by A, B, C en D.

Oplossing:

Ons kan die waardes van die grafiek aflees:
$A = (90°; 4),\ B = (90°; 2),\ C = (180°; 4)$ en $D = (180°; 2)$

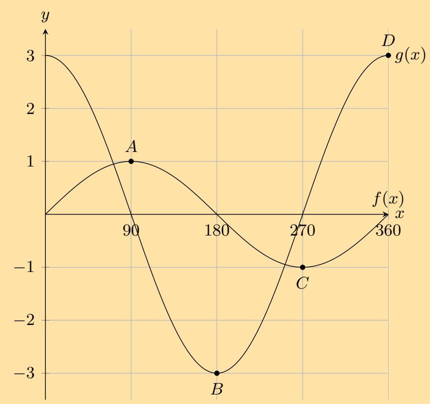
b) Hoeveel keer in hierdie interval sal $f(x)$ en $g(x)$ mekaar sny?
Oplossing:
2

c) Wat is die amplitude van $f(x)$?
Oplossing:
2

d) Bepaal: $f(360°) - g(360°)$.
Oplossing:
Lees die waarde van $f(360°)$ en $g(360°)$ van die grafiek. Trek dan $g(360°)$ of van $f(360°)$.

$$\begin{aligned} f(360°) - g(360°) &= 2 - 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

19. Gegewe die volgende grafiek.



a) Noem die koördinate by $A,\ B,\ C$ en D.
Oplossing:
Ons kan die waardes van die grafiek aflees:
$A = (90°; 1),\ B = (180°; -3),\ C = (270°; -1)$ en $D = (360°; 3)$

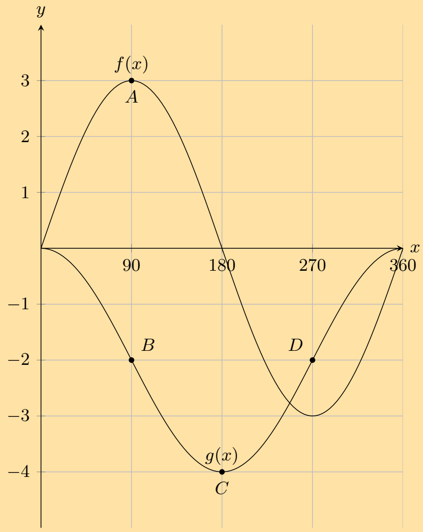
b) Hoeveel keer in hierdie interval sal $f(x)$ en $g(x)$ mekaar sny?
Oplossing:
2

c) Wat is die amplitude van $g(x)$?
Oplossing:
3

d) Evalueer: $f(90°) - g(90°)$.
Oplossing:
Lees die waarde van $f(90°)$ en $g(90°)$ van die grafiek. Trek dan $g(90°)$ of van $f(90°)$.

$$\begin{aligned} f(90°) - g(90°) &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

20. Gegewe die volgende grafiek:



a) Noem die koördinate by A, B, C en D.

Oplossing:

Ons kan die koördinate aflees van die grafiek:

$A = (90°; 3)$, $B = (90°; -2)$, $C = (180°; -4)$ en $D = (270°; -2)$

b) Hoeveel keer in hierdie interval sal $f(x)$ en $g(x)$ mekaar sny?

Oplossing:

3

c) Wat is die amplitude van $g(x)$?

Oplossing:

2

d) Bepaal: $f(270°) - g(270°)$.

Oplossing:

Lees die waarde van $f(270°)$ en $g(270°)$ op die grafiek. Trek dan $g(270°)$ of van $f(270°)$.

$$\begin{aligned} f(270°) - g(270°) &= -3 - (-2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JMX	2. 2JMY	3. 2JMZ	4. 2JN2	5. 2JN3	6. 2JN4
7. 2JN5	8. 2JN6	9. 2JN7	10. 2JN8	11a. 2JN9	11b. 2JNB
11c. 2JNC	11d. 2JND	12. 2JNF	13a. 2JNG	13b. 2JNH	13c. 2JNJ
13d. 2JNK	13e. 2JNM	13f. 2JNN	14a. 2JNP	14b. 2JNQ	15. 2JNR
16. 2JNS	17. 2JNT	18. 2JNV	19. 2JNW	20. 2JNX	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

6.7 Interpretasie van grafieke

Exercise 6 – 7:

1. Teken die volgende funksies op dieselfde assestelsel en merk al die punte waar die funksies sny.

a) $y = x^2 + 1$ en $y = 3^x$

Oplossing:

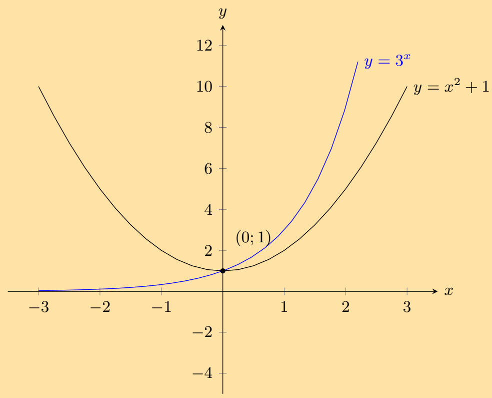
Die y-afsnit vir elke grafiek is:

$0^2 + 1 = 1$

$3^0 = 1$

Dit is ook die enigste punt waar die grafiek sny.

Vir beide grafieke daar is geen x-afsnit.



b) $y = x$ en $y = \frac{2}{x}$

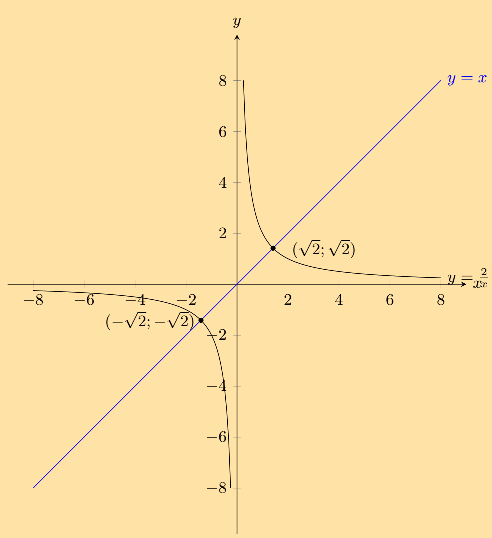
Oplossing:

$y = x$ is 'n basiese reguitlyngrafiek. Vir $y = \frac{2}{x}$ daar is geen y-afsnit en geen x-afsnit. Ons neem kennis dat hierdie 'n hiperboliese grafiek is dat dit uitgestrek is deur 2 eenhede.

Die punte waar die grafieke sny is:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2}{x} \\
x^2 &= 2 \\
x^2 - 2 &= 0 \\
(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) &= 0 \\
x &= \sqrt{2} \text{ of } x = -\sqrt{2} \\
y &= \sqrt{2} \text{ of } y = -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Die snypunte is $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ en $\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$.



c) $y = x^2 + 3$ en $y = 6$

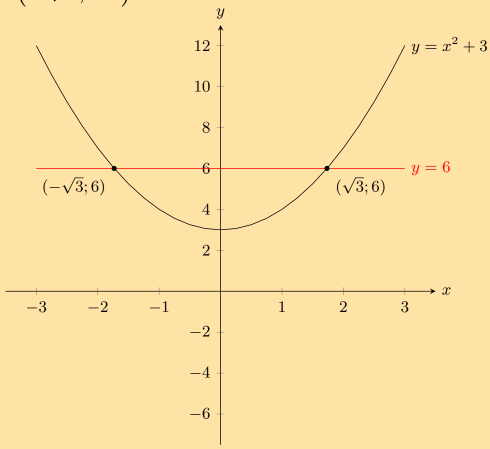
Oplossing:

$y = 6$ is 'n horisontale lyn deur $(0; 6)$. Vir $y = x^2 + 3$ is die y-afsnit $(0; 3)$ en daar is geen x-afsnitte. Van die waarde van q sien ons dat hierdie 'n basiese parabool is wat by 3 eenhede opwaarts verskuif is.

Die snypunte is:

$$\begin{aligned} x^2 + 3 &= 6 \\ x^2 - 3 &= 0 \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) &= 0 \\ x = \sqrt{3} &\text{ of } x = -\sqrt{3} \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Dus die snypunte is $\left(\sqrt{3}; 6\right)$ en $\left(-\sqrt{3}; -6\right)$.



d) $y = -x^2$ en $y = \dfrac{8}{x}$

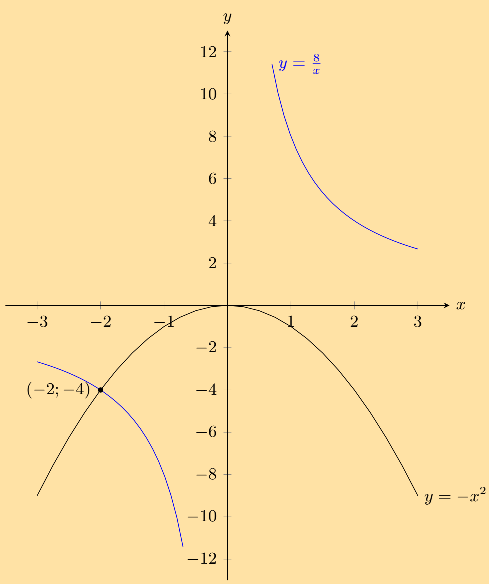
Oplossing:

$y = -x^2$ is 'n parabool wat in die x-as reflekteer. Vir $y = \frac{8}{x}$ is daar geen y-afsnit en geen x-afsnit. Van die waarde van a ons kan sien dat hierdie 'n basiese hiperbool is wat gestrek is met 8 eenhede.

Die snypunt is:

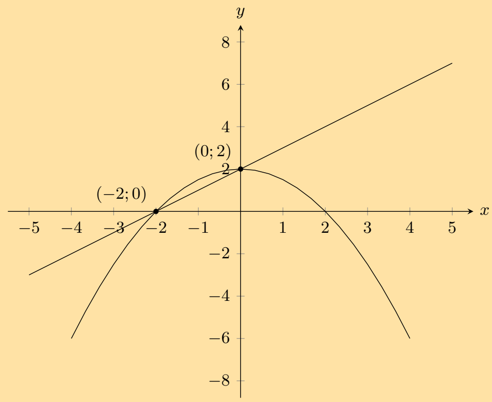
$$\begin{aligned} -x^2 &= \frac{8}{x} \\ x^3 &= -8 \\ x &= -2 \\ y &= \frac{8}{-2} \\ y &= -4 \end{aligned}$$

Dus die snypunt is $(-2; -4)$.



2. Bepaal die vergelykings van die grafieke hieronder.

a)



Oplossing:

Vir die reguitlyngrafiek het ons die x en y-afsnitte. Die y-afsnit gee $c = 2$. Nou kan ons die gradiënt van die reguitlyngrafiek bereken:

$$\begin{aligned} y &= mx + 2 \\ m &= \frac{2-0}{0-(-2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking vir die reguitlyngrafiek $y = x + 2$.

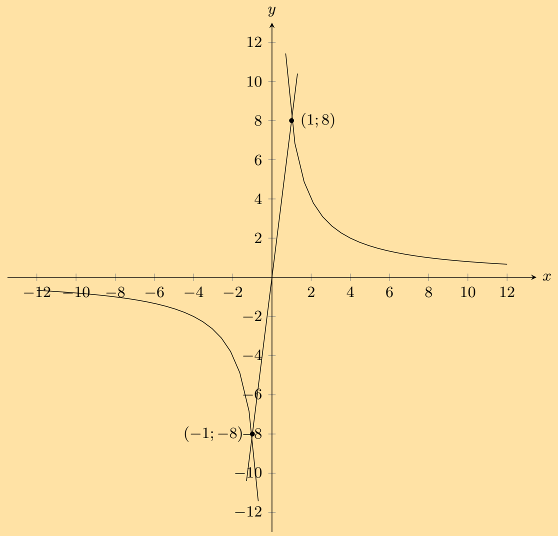
Vir die parabool het ons ook die x en y-afsnitte. Die y-afsnit gee $q = 2$. Nou kan ons a bereken:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 2 \\ 0 &= a(-2)^2 + 2 \\ -2 &= 4a \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking vir die parabool $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Die vergelykings vir die twee grafieke is $y = x + 2$ en $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

b)



Oplossing:

Vir die reguitlyngrafiek neem ons kennis dat dit deur die punt $(0;0)$ gaan en dus $c = 0$.

Ons het twee punte op die reguitlyngrafiek so ons kan die gradiënt bereken:

$$\begin{aligned} y &= mx + 0 \\ m &= \frac{8 - (-8)}{1 - (-1)} \\ m &= 8 \end{aligned}$$

Die vergelyking van die reguitlyngrafiek is $y = 8x$.
Vir die hiperbool ons neem kennis dat die grafiek nie verskuif is nie. Dus $q = 0$. Nou kan ons a bereken:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x} \\ 8 &= \frac{a}{1} \\ a &= 8 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking vir die hiperbool $y = \frac{8}{x}$.
Die vergelykings vir die twee grafieke is $y = 8x$ en $y = \frac{8}{x}$.

3. Kies die korrekte antwoord:

a) Die terrein van $y = 2\sin\theta + 1$ is:

i. $1 \leq \theta \leq 2$
ii. $-2 \leq \theta \leq 2$
iii. $-1 \leq \theta \leq 3$
iv. $-2 \leq \theta \leq 3$

Oplossing:
(iii)

b) Die terrein van $y = 2\cos\theta - 4$ is:

i. $-6 \leq \theta \leq 2$
ii. $-4 \leq \theta \leq -2$
iii. $-6 \leq \theta \leq 1$
iv. $-6 \leq \theta \leq -2$

Oplossing:
(iv)

c) Die y-afsnit van $2^x + 1$ is:

i. 3
ii. 1
iii. 2
iv. 0

Oplossing:
(iii)

d) Watter van die volgende gaan deur $(1; 7)$?

i. $y = \frac{7}{x}$
ii. $y = 2x + 3$
iii. $y = \frac{4}{x}$
iv. $y = x^2 + 1$

Oplossing:
(i)

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JNY 1b. 2JNZ 1c. 2JP2 1d. 2JP3 2a. 2JP4 2b. 2JP5
3a. 2JP6 3b. 2JP7 3c. 2JP8 3d. 2JP9

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

End of chapter Exercise 6 – 8:

1. Voltooi die volgende tabelle en identifiseer die funksie.

a)

x		2	3	4		6
y	3	6		12	15	

Oplossing:

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	9	12	15	18

$$y = 3x$$

b)

x	1			4	5	6
y	-3	-2	-1		1	2

Oplossing:

x	1	2	3	4	5	6
y	-3	-2	-1	0	1	2

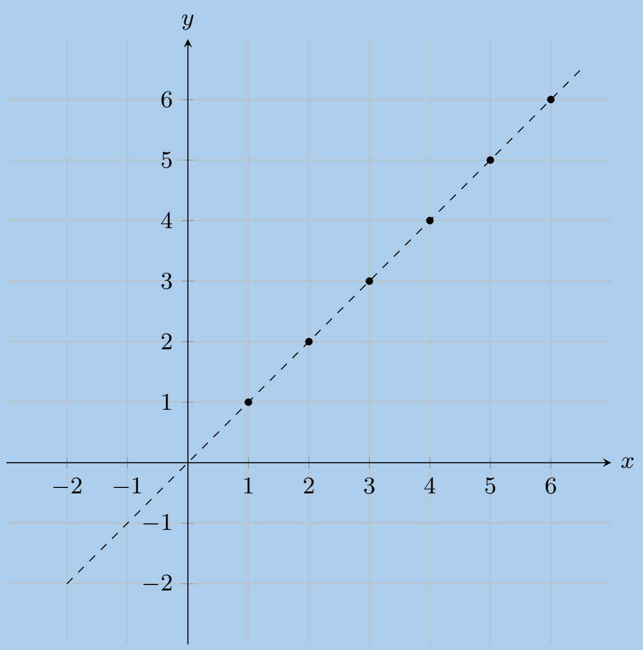
$$y = x - 4$$

2. Stip die volgende punte op 'n grafiek.

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	1	2	3	4	5	6

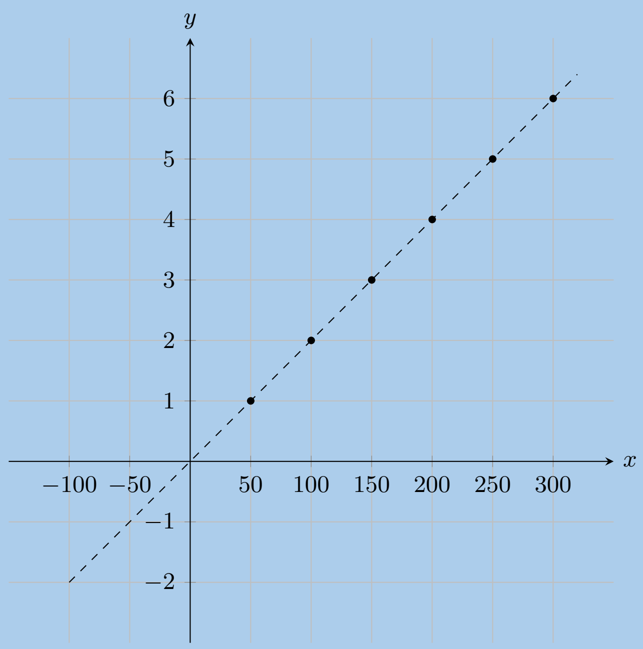
Oplossing:



b)

x	50	100	150	200	250	300
y	1	2	3	4	5	6

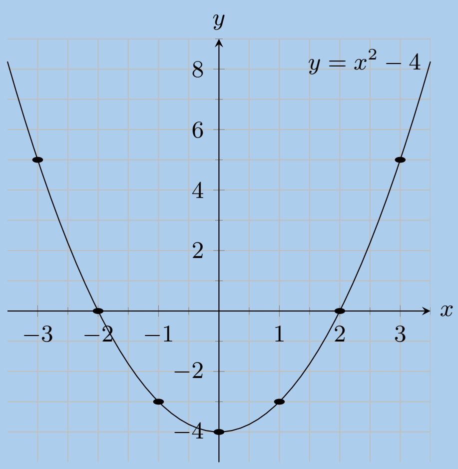
Oplossing:



3. Stel 'n tabel van waardes saam vir die gegewe funksie en skets dan die funksie. Jou tabel moet ten minste 5 geordende getallepare hê.

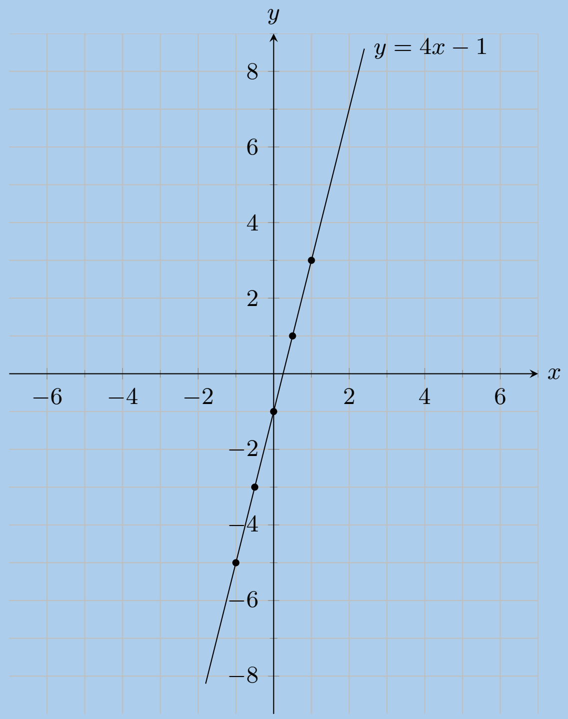
a) $x^2 - 4$
Oplossing:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5



b) $y = 4x - 1$
Oplossing:

x	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
y	-5	-3	-1	1	3



4. Bepaal die y-afsnit en die x-afsnitte van die funksie.

   a) $y = -3x - 5$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= -3x - 5 \\ y &= -3(0) - 5 \\ y &= -5 \\ \therefore c &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -3x - 5 \\ (0) &= -3x - 5 \\ 5 &= -3x \\ -\frac{5}{3} &= x \end{aligned}$$

   x-afsnit $= -\frac{5}{3}$ en y-afsnit $= -5$

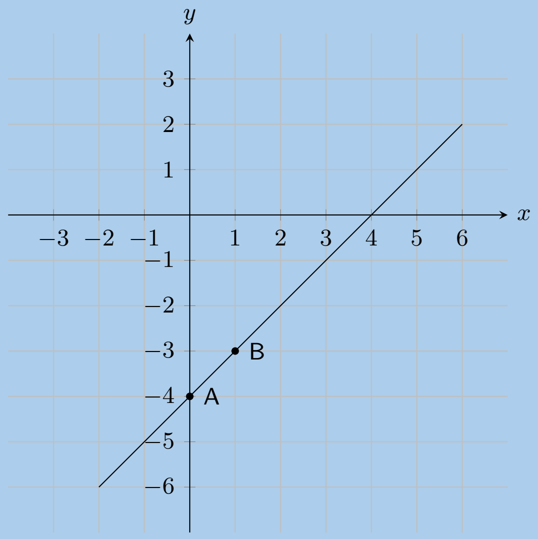
   b) $y = 2x + 4$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 4 \\ y &= 2(0) + 4 \\ y &= 4 \\ \therefore c &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2x + 4 \\ (0) &= 2x + 4 \\ -4 &= 2x \\ -2 &= x \end{aligned}$$

   x-afsnit $= -2$ en y-afsnit $= 4$

5. Die grafiek hieronder toon 'n vergelyking van die vorm $y = mx + c$. Bereken, of vind andersins, die waardes van m (die gradiënt van die lyn) en c (die y-afsnit van die lyn).

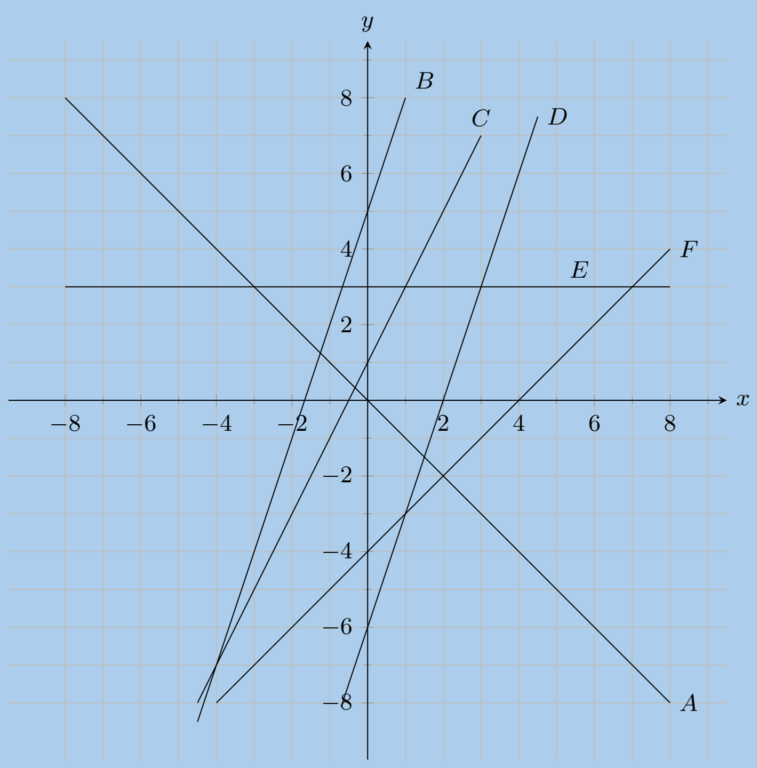


Oplossing:
Punt A is die y-afsnit. Punt A het koördinate $(0; -4)$ en dus is $c = -4$.

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
(-3) &= m(1) - 4 \\
-3 &= m - 4 \\
1 &= m
\end{aligned}
$$

Dus $m = 1$ en $y = x - 4$.

6. Kyk na die grafiek hieronder. Elke grafiek word aangedui met 'n letter. In die vrae wat volg, pas die gegewe vergelyking by die letter van 'n ooreenstemmende grafiek.



a) $y = 3$
Oplossing:
E

b) $y = 3x + 5$
Oplossing:
B

c) $y = -x$
Oplossing:
A

d) $y = 2x + 1$
Oplossing:
C

e) $y = x - 4$
Oplossing:
F

f) $y = 3x - 6$
Oplossing:
D

7. Meld of die volgende waar is of nie

a) Die y-afsnit van $y + 5 = x$ is -5.
Oplossing:
Waar

b) Die gradiënt van $-y = x + 2$ is 1.
Oplossing:
Vals

$$\begin{aligned} -y &= x + 2 \\ y &= -x - 2 \end{aligned}$$

c) Die gradiënt van $-4y = 3$ is 1.
Oplossing:
Vals

$$\begin{aligned} -4y &= 3 \\ y &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

8. Skryf die volgende in standaardvorm:

a) $2y - 5x = 6$
Oplossing:

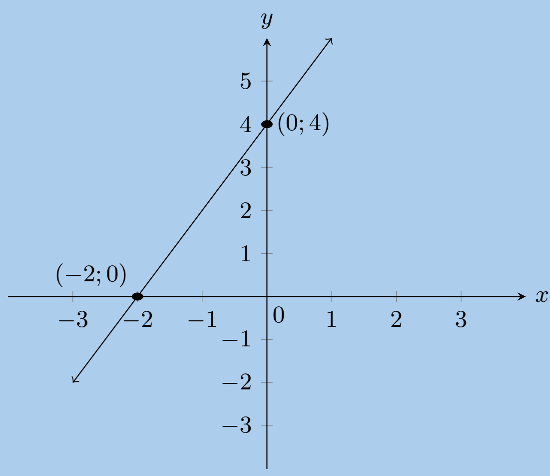
$$\begin{aligned} 2y - 5x &= 6 \\ 2y &= 5x + 6 \\ y &= \frac{5}{2}x + 3 \end{aligned}$$

b) $6y - 3x = 5x + 1$
Oplossing:

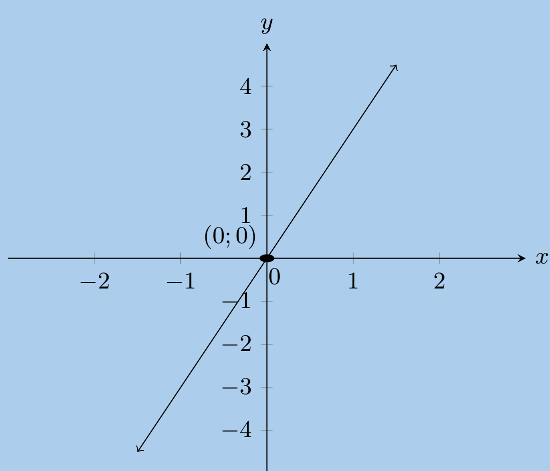
$$\begin{aligned} 6y - 3x &= 5x + 1 \\ 6y &= 8x + 1 \\ y &= \frac{4}{3}x + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

9. Skets die grafieke van die volgende:

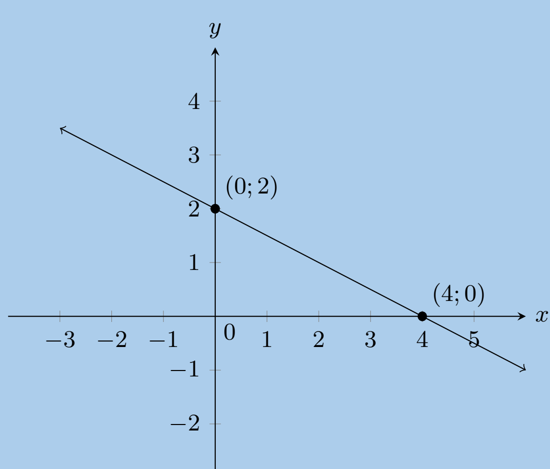
a) $y = 2x + 4$
Oplossing:
Die y-afsnit is $(0; 4)$ en die x-afsnit is $(-2; 0)$.



b) $y - 3x = 0$
Oplossing:
Skryf die vergelyking in standaardvorm: $y = 3x$.
Die y-afsnit is $(0; 0)$ en die x-afsnit is $(0; 0)$.
Ons neem kennis van die volgende pare van waardes: $(1; 3)$, $(2; 6)$, $(-1; -3)$ en $(-2; -6)$. Nou kan ons die grafiek teken.



c) $2y = 4 - x$
Oplossing:
Skryf die vergelyking in standaardvorm: $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
Die y-afsnit is $(0; 2)$ en die x-afsnit is $(4; 0)$.



10. Die funksie vir die hoeveelheid water wat 'n kraan lewer, word gegee deur: $V = 60t$, waar x en V in sekondes en mL gemeet word onderskeidelik.
Gebruik hierdie inligting om die volgende te beantwoord:

a) Bereken $V(2)$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} V(2) &= 60(2) \\ &= 120 \text{ mL} \end{aligned}$$

b) Bereken $V(10)$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} V(10) &= 60(10) \\ &= 600 \text{ mL} \end{aligned}$$

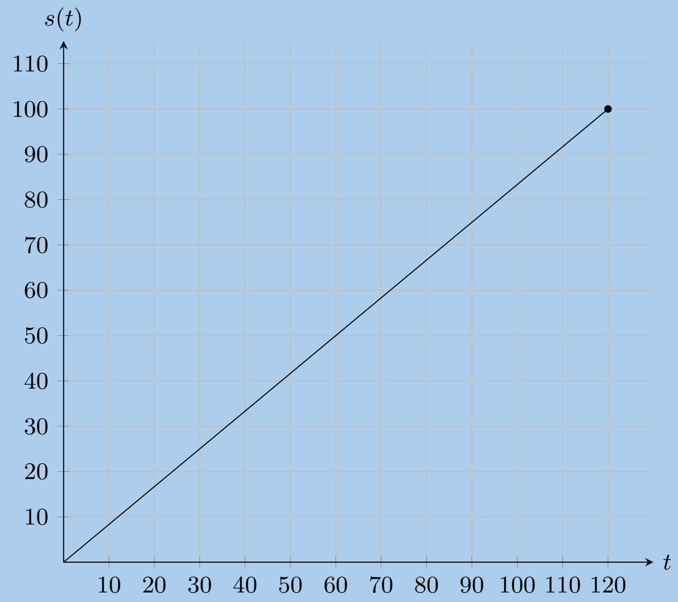
c) Hoe lank sal dit vat om 'n 2 L bottel vol water te maak?
Oplossing:

$$\begin{aligned} V(t) &= 2000t \\ t &= \frac{2000}{60} \\ t &= 33{,}33s \end{aligned}$$

d) Hoeveel water kan die kraan lewer in 4 s?
Oplossing:

$$\begin{aligned} V(4) &= 60(4) \\ &= 240 \text{ mL} \end{aligned}$$

11. Die grafiek hieronder toon die afstand afgelê deur 'n motor oor 'n bestek van tyd, waar $s(t)$ die afstand in km en t die tyd in minute gee.



Gebruik hierdie inligting om die volgende te beantwoord:

a) Watter afstand het die motor afgelê in 'n uur?
Oplossing:
50 km

b) Wat is die gebied van die funksie?

Oplossing:

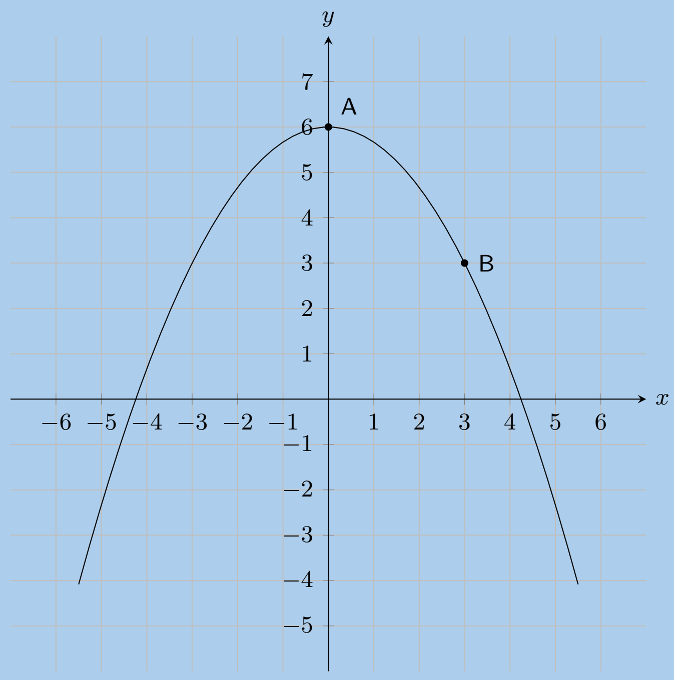
Die gebied is $0 \leq t \leq 120$ min.

c) Wat is die terrein van die funksie? Wat verteenwoordig dit?

Oplossing:

Die terrein is $0 \leq s \leq 100$ km en dit verteenwoordig die totale afstand afgelê.

12. Op die gegewe grafiek sien jy 'n funksie van die vorm: $y = ax^2 + q$.
Twee punte op die parabool word getoon: **Punt A**, die draaipunt van die parabool, is by $(0; 6)$, en **Punt B** is by $(3; 3)$.
Bereken die waardes van a en q.



Oplossing:

Die waarde van q is 6.

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + 6 \\
(3) &= a(3)^2 + 6 \quad \longleftarrow \quad \text{stel die koördinate van 'n punt in!} \\
3 &= 9a + 6 \\
3 - 6 &= 9a \\
-3 &= 9a \\
-\frac{1}{3} &= a
\end{aligned}
$$

$$a = -\frac{1}{3};\ q = 6$$

13. Gegewe die volgende vergelyking:
$y = -5x^2 + 3$

a) Bereken die y-koördinaat van die y-afsnit.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + q \\
&= -5x^2 + 3 \\
&= -5(0)^2 + 3 \\
&= 0 + 3
\end{aligned}
$$

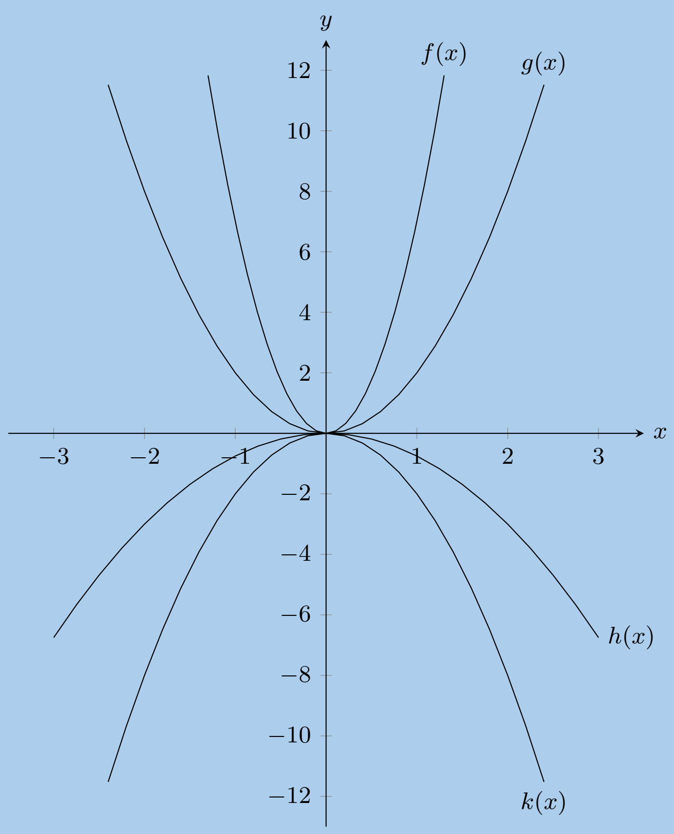
Die y-koördinaat van die y-afsnit is 3.

b) Bereken nou die x-afsnitte. Jy antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= -5x^2 + 3 \\
(0) &= -5x^2 + 3 \\
5x^2 &= 3 \\
x^2 &= \frac{3}{5} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \\
\text{Dus: } x = +\sqrt{\frac{3}{5}} &\text{ en } x = -\sqrt{\frac{3}{5}} \\
x = -0{,}77 &\text{ en } x = 0{,}77
\end{aligned}
$$

Die x-afsnitte is $(-0{,}77; 0)$ en $(0{,}77; 0)$.

14. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



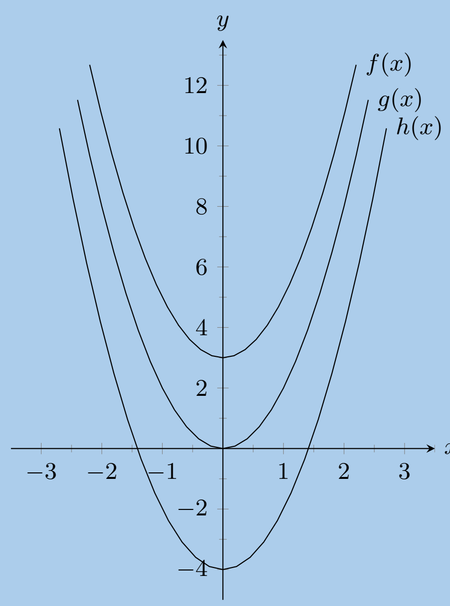
a) $y = -2x^2$
Oplossing:
$k(x)$

b) $y = 2x^2$
Oplossing:
$g(x)$

c) $y = -0{,}75x^2$
Oplossing:
$h(x)$

d) $y = 7x^2$
Oplossing:
$f(x)$

15. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



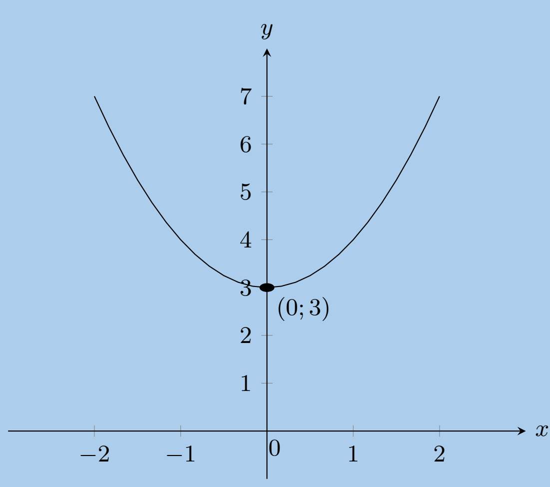
a) $y = 2x^2$
Oplossing:
$g(x)$

b) $y = 2x^2 + 3$
Oplossing:
$f(x)$

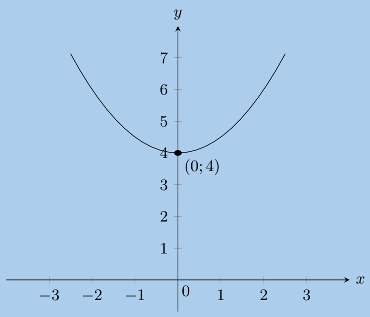
c) $y = 2x^2 - 4$
Oplossing:
$h(x)$

16. Skets die volgende funksies:

a) $y = x^2 + 3$
Oplossing:
Die y-afsnit is $(0; 3)$. Daar is geen x-afsnitte.
a is positief, en so die grafiek is 'n glimlag met 'n minimum draaipunt by $(0; 3)$.



b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$
Oplossing:
Die y-afsnit is $(0; 4)$. Daar is geen x-afsnitte.
a is positief so die grafiek is 'n glimlag met 'n minimum draaipunt by $(0; 4)$.

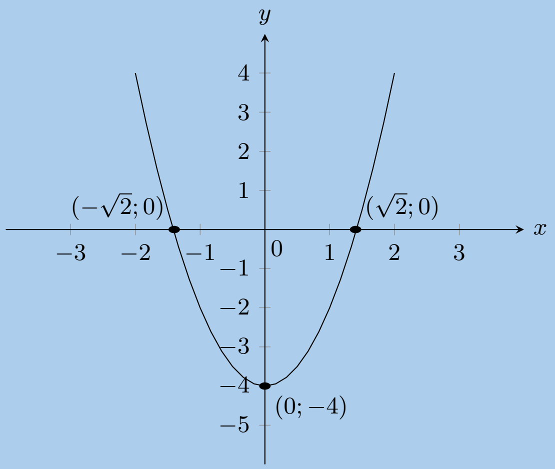


c) $y = 2x^2 - 4$

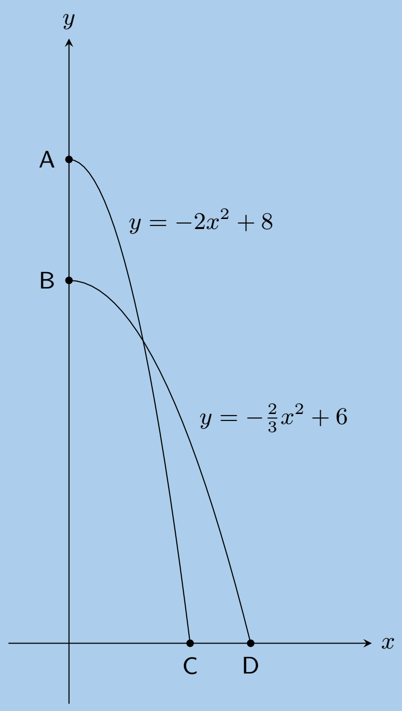
Oplossing:

Die y-afsnit is $(0; -4)$. Die x-afsnitte is by $\left(\sqrt{2}; 0\right)$ en $\left(-\sqrt{2}; 0\right)$.

a is positief so die grafiek is 'n glimlag met 'n minimum draaipunt by $(0; -4)$.



17. Sebastian en Lucas duik in 'n poel water in van verskillende hoogtes af. Hulle paaie deur die lug kan beskryf word deur die volgende kwadratiese vergelykings: $y = -2x^2 + 8$ vir Sebastian en $y = -\frac{2}{3}x^2 + 6$ vir Lucas.



a) Van watter hoogte af het Sebastian geduik?

Oplossing:

Maksimumwaarde van $y = -2x^2 + 8$ is 8 m

b) Van watter hoogte af het Lucas geduik?

Oplossing:

Maksimumwaarde van $y = -\frac{2}{3}x^2 + 6$ is 6 m

c) Hoe ver van die poel se kant af het Lucas geland?

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{2}{3}x^2 + 6 \\
0 &= -\frac{2}{3}x^2 + 6 \\
\frac{3}{2}x^2 - 6 &= 0 \\
x^2 - 9 &= 0 \\
(x-3)(x+3) &= 0 \\
\therefore x &= 3 \text{ m}
\end{aligned}
$$

Lucas het 3 m van die poel se kant geland.

d) Hoeveel nader aan die kant van die poel het Sebastian geland?

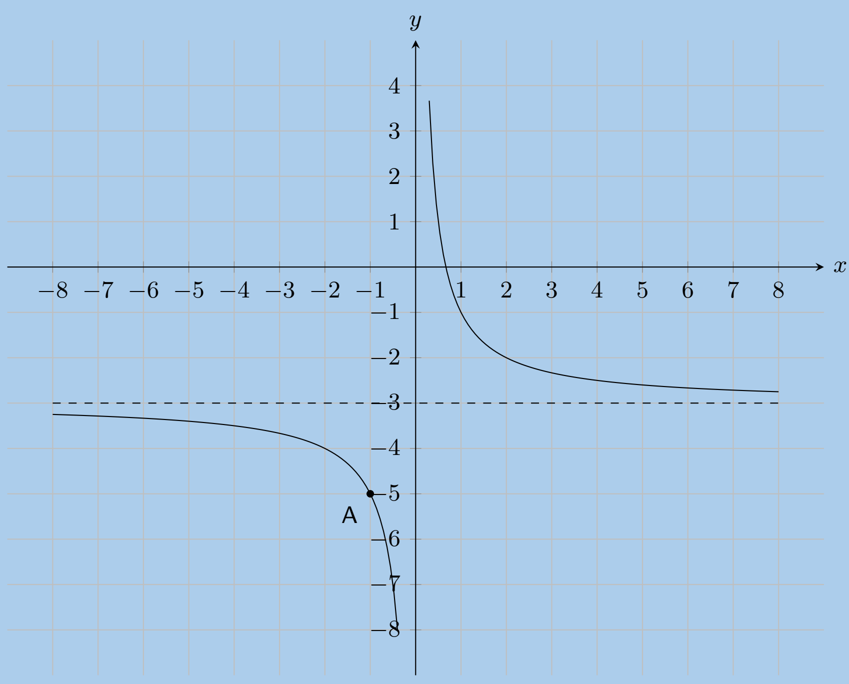
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= -2x^2 + 8 \\
0 &= -2x^2 + 8 \\
2x^2 - 8 &= 0 \\
x^2 - 4 &= 0 \\
(x-2)(x+2) &= 0 \\
\therefore x &= 2 \text{ m}
\end{aligned}
$$

Sebastian het 2 m van die poelwand af geland.

Dus Sebastian het 1 m nader aan die poel se kant geland as Lucas.

18. Die volgende grafiek toon 'n hiperboliese vergelyking van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$. **Punt A** word getoon by $(-1; -5)$. Bereken die waardes van a en q.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
q &= -3 \\
\\
y &= \frac{a}{x} - 3 \\
(-5) &= \frac{a}{(-1)} - 3 \\
-1\,(-5) &= \left[\frac{a}{-1} - 3\right](-1) \\
5 &= a + 3 \\
2 &= a
\end{aligned}
$$

Dus $a = 2$ en $q = -3$.

Die vergelyking is $y = \dfrac{2}{x} - 3$.

19. Gegewe die volgende vergelyking:

$$y = -\frac{3}{x} + 4$$

a) Bepaal die posisie van die y-afsnit.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{3}{x} + 4 \\
y &= -\frac{3}{(0)} + 4 \\
&\text{geen oplossing}
\end{aligned}
$$

Daar is geen y-afsnit.

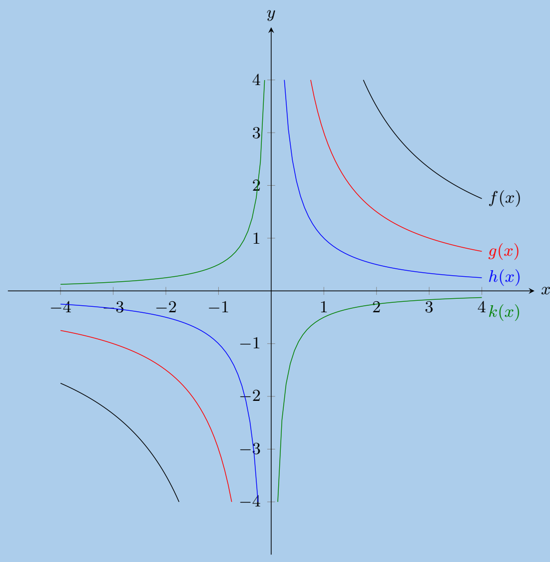
b) Bepaal die posisie van die x-afsnit.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{3}{x} + 4 \\
(0) &= -\frac{3}{x} + 4 \\
(x)(0) &= \left[-\frac{3}{x} + 4\right](x) \\
0 &= -3 + 4x \\
3 &= 4x \\
x &= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Die x-afsnit is by $\left(\frac{3}{4}; 0\right)$.

20. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



a) $y = -\frac{1}{2x}$

Oplossing:

$k(x)$

b) $y = \frac{7}{x}$

Oplossing:

$f(x)$

c) $y = \frac{3}{x}$

Oplossing:

$g(x)$

d) $y = \frac{1}{x}$

Oplossing:

$h(x)$

21. Skets die volgende funksies en identifiseer die asimptote:

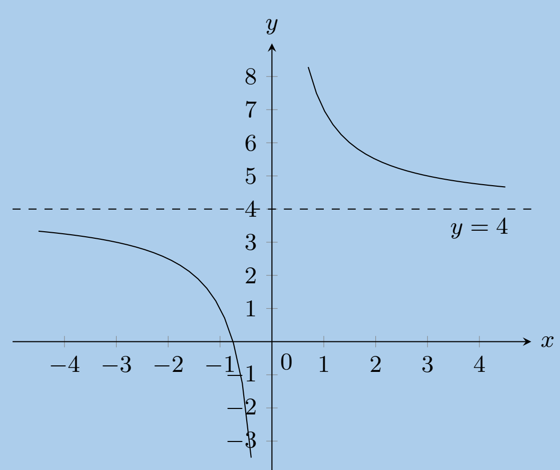
a) $y = \frac{3}{x} + 4$

Oplossing:

Die asimptoot is $y = 4$.

a is positief so die grafiek lê in die eerste en derde kwadrate.

Daar is geen y-afsnit. Die x-afsnit is by $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$.



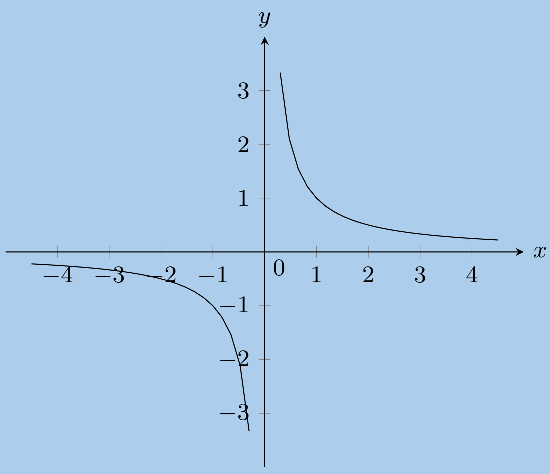
b) $y = \frac{1}{x}$

Oplossing:

Die asimptoot is $y = 0$.

a is positief so die grafiek lê in die eerste en derde kwadrate.

Daar is geen y-afsnit en geen x-afsnit.



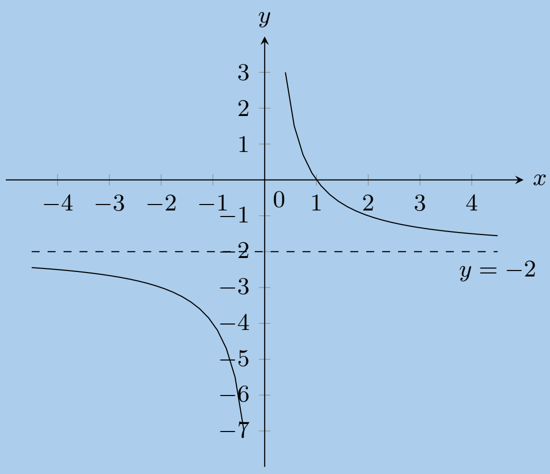
c) $y = \frac{2}{x} - 2$

Oplossing:

Die asimptoot is $y = -2$.

a is positief so die grafiek lê in die eerste en derde kwadrate.

Daar is geen y-afsnit. Die x-afsnit is by $(1; 0)$.



22. Skets die gegewe funksies en beskryf die transformasie gebruik om die tweede funksie te verkry. Toon alle asimptote.

a) $y = \frac{2}{x}$ en $\frac{2}{x} + 2$

Oplossing:

$y = \frac{2}{x}$:

Die asimptoot is $y = 0$.

a is positief so die grafiek lê in die eerste en derde kwadrante.

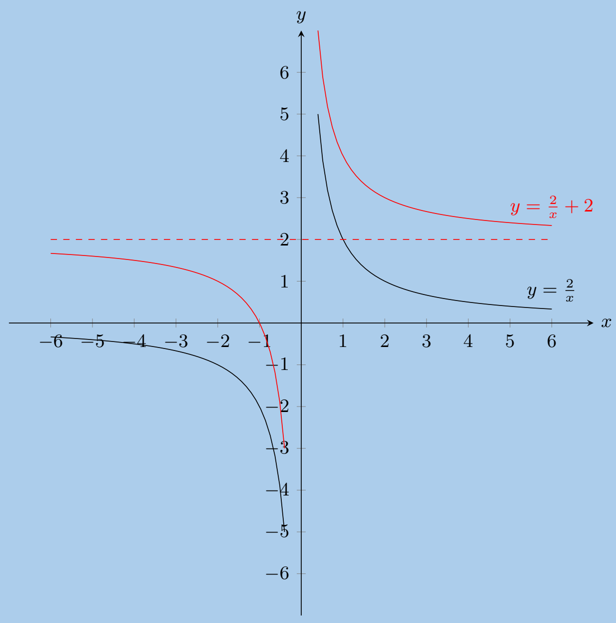
Daar is geen y-afsnit en geen x-afsnit.

$y = \frac{2}{x} + 2$:

Die asimptoot is $y = 2$.

a is positief so die grafiek lê in die eerste en derde kwadrante.

Daar is geen y-afsnit. Die x-afsnit is by $(-1; 0)$.



Translasie van 2 in die positiewe y-rigting.

b) $y = \dfrac{2}{x}$ en $\dfrac{1}{2x}$

Oplossing:

$y = \dfrac{2}{x}$:

Die asimptoot is $y = 0$.

a is positief so die grafiek lê in die eerste en derde kwadrante.

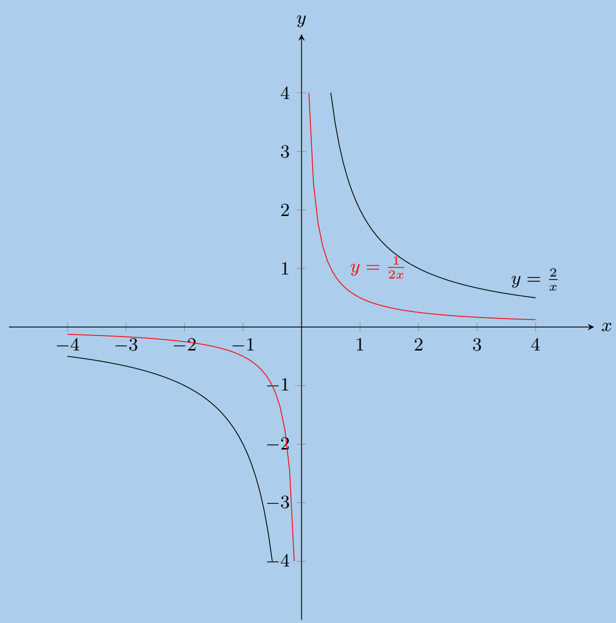
Daar is geen y-afsnit en geen x-afsnit.

$y = \dfrac{1}{2x}$:

Die asimptoot is $y = 0$.

a is positief so die grafiek lê in die eerste en derde kwadrante.

Daar is geen y-afsnit en geen x-afsnit.



Verkleining met 'n faktor 4

c) $y = \dfrac{3}{x}$ en $y = \dfrac{3x+3}{x}$

Oplossing:

Ons moet eers die tweede vergelyking eenvoudig:

$y = \frac{3x+3}{x} = \frac{3}{x} + 1$

$y = \frac{3}{x}$:

Die asimptoot is $y = 0$.

a is positief so die grafiek lê in die eerste en derde kwadrante.

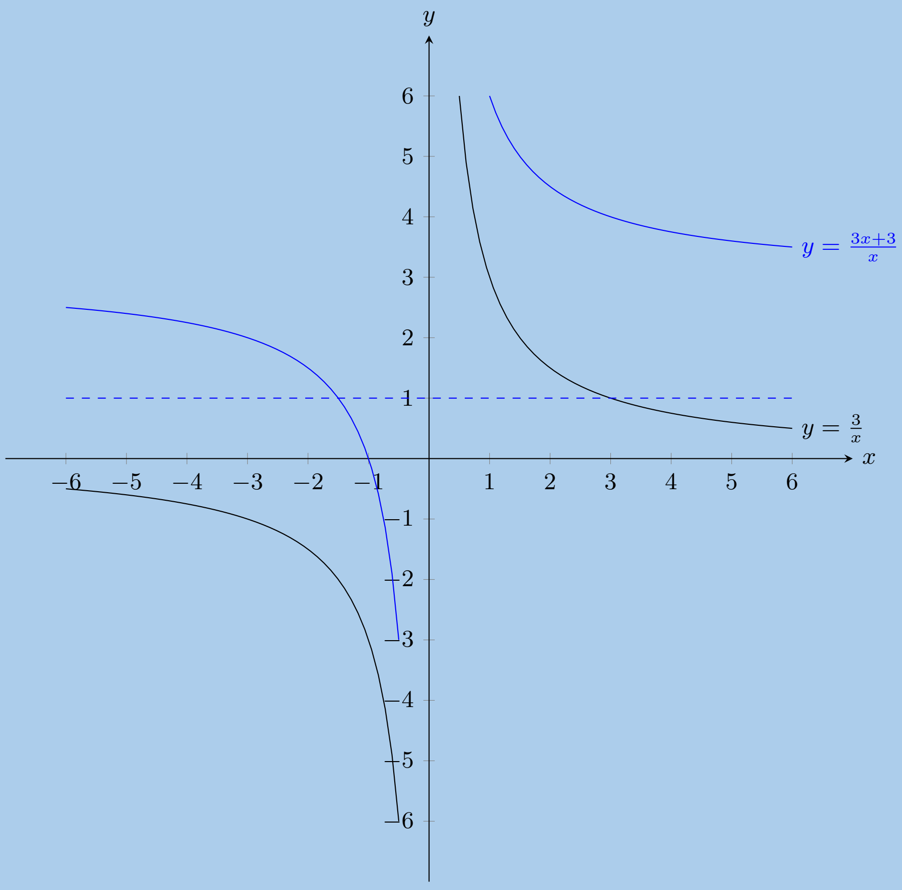
Daar is geen y-afsnit en geen x-afsnit.

$y = \frac{3}{x} + 1$:

Die asimptoot is $y = 1$.

a is positief so die grafiek lê in die eerste en derde kwadrante.

Daar is geen y-afsnit. Die x-afsnit is by $(-1; 0)$.



Translasie met 3 eenhede in die positiewe y-rigting.

d) $y = \frac{3}{x}$ en $y = -\frac{3}{x}$

Oplossing:

$y = \frac{3}{x}$:

Die asimptoot is $y = 0$.

a is positief so die grafiek lê in die eerste en derde kwadrante.

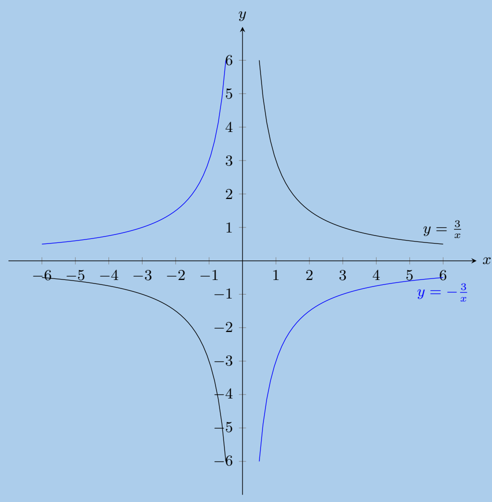
Daar is geen y-afsnit en geen x-afsnit.

$y = -\frac{3}{x}$:

Die asimptoot is $y = 0$.

a is negatief so die grafiek lê in die tweede en vierde kwadrante.

Daar is geen y-afsnit en geen x-afsnit.



Refleksie om die x-as

23. Gegewe die volgende vergelyking:
$y = -\frac{1}{2} \cdot (4)^x + 3$

a) Bereken die y-afsnit. Jou antwoord moet korrek wees tot 2 desimale plekke.
Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{1}{2}\right).(4)^x + 3 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right).(4)^{(0)} + 3 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right).(1) + 3 \\ &= (-0{,}5) + 3 \\ &= 2{,}50 \end{aligned}$$

Die y-afsnit is $(0; 2{,}50)$.

b) Bereken nou die x-afsnit. Benader jou antwoord tot een desimale plek waar nodig.
Oplossing:
Ons bereken die x-afsnit deur $y = 0$ te stel. Begin dan om vir x op te los.

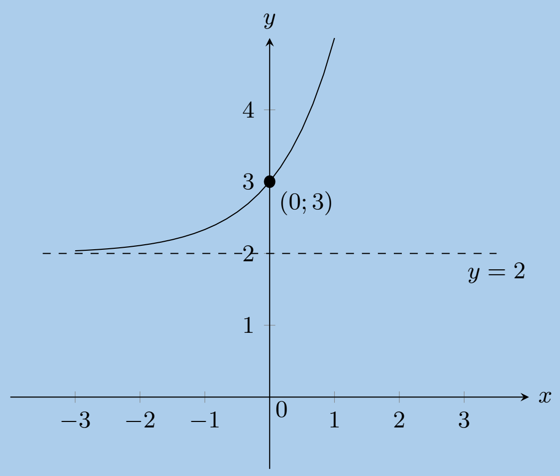
$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (4)^x + 3 \\ -3 &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (4)^x \\ (-2)(-3) &= (-2)\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (4)^x \\ 6 &= 4^x \end{aligned}$$

Probeer: $4^0 = 1$
Probeer: $4^1 = 4$
Probeer: $4^2 = 16$

Ons kan sien die eksponent moet tussen 1 en 2 lê. Met probeer en tref kry ons 1,3. Dus is die x-afsnit $(1{,}3; 0)$

24. Skets die volgende funksies en identifiseer die asimptote:

a) $y = 3^x + 2$
Oplossing:
Die y-afsnit is $(0; 2)$. Daar is geen x-afsnit. Die asimptoot is $y = 2$.
$a > 1$ dus buig die grafiek opwaarts.

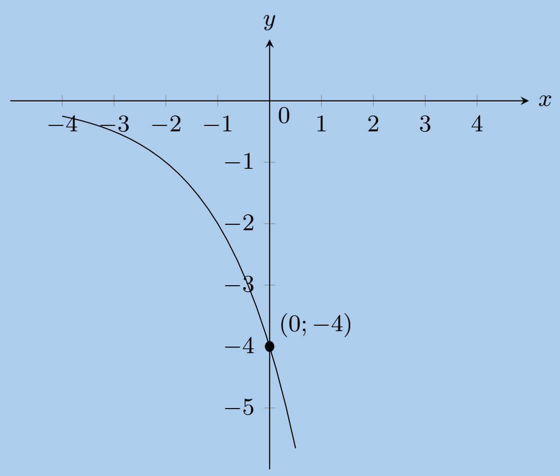


b) $y = -4 \times 2^x$

Oplossing:

Die y-afsnit is $(0; -4)$. Daar is geen x-afsnit. Die asimptoot is $y = 0$.

$a < 1$ dus buig die grafiek afwaarts.

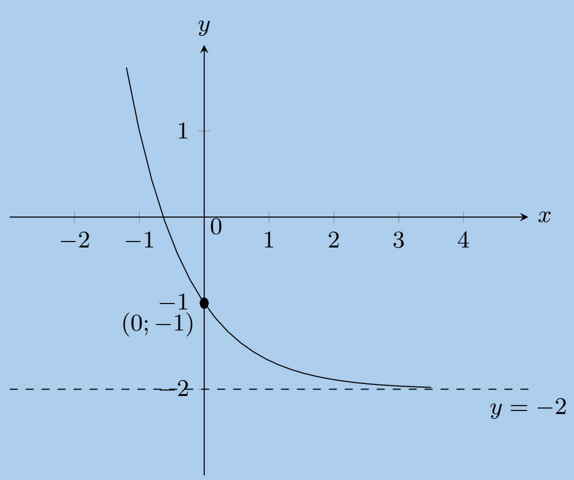


c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$

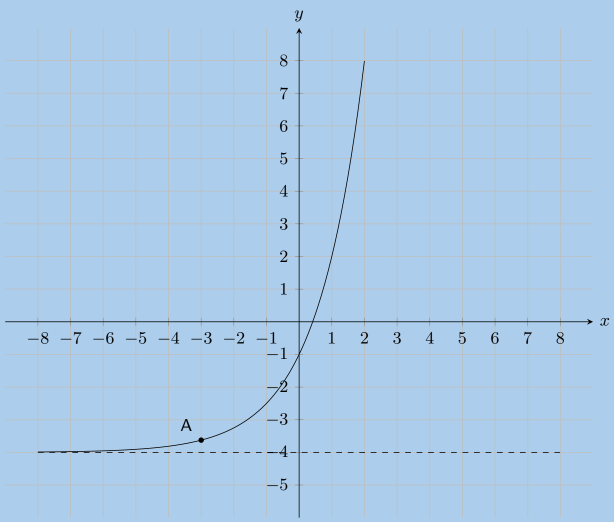
Oplossing:

Die y-afsnit is $(0; -2)$. Die x-afsnit is $(0{,}6; 0)$. Die asimptoot is $y = -2$.

$0 < a < 1$ dus buig die grafiek afwaarts.



25. Die vorm van die gegewe kromme is $y = a \cdot 2^x + q$. Een punt op die kromme is gegee: **Punt A** is by $(-3; -3{,}625)$. Vind die waardes van a en q, korrek tot die naaste heelgetal.



Oplossing:

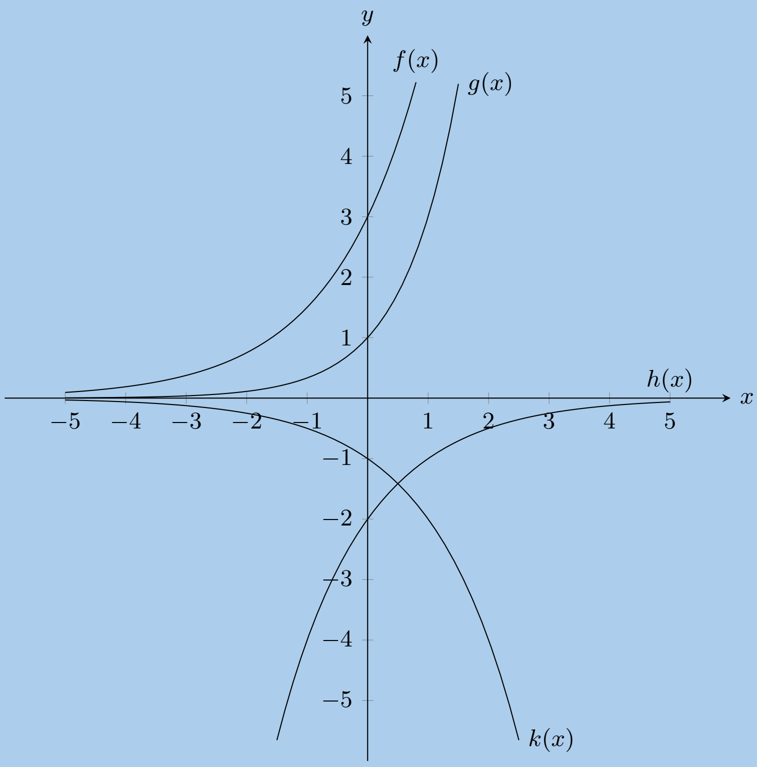
Die asimptoot lê by $y = -4$. Dus is $q = -4$.

Op hierdie punt weet ons die vergelyking van die grafiek moet $y = a.2^x - 4$ wees.

$$
\begin{aligned}
y &= a(2)^x - 4 \\
(-3{,}625) &= a(2)^{(-3)} - 4 \\
-3{,}625 + 4 &= a(2)^{(-3)} \\
0{,}375 &= a(0{,}125) \\
3 &= a
\end{aligned}
$$

$a = 3$ en $q = -4$

26. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



a) $y = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Oplossing:

$h(x)$

b) $y = 3{,}2^x$

Oplossing:

$f(x)$

c) $y = -2^x$

Oplossing:

$k(x)$

d) $y = 3^x$

Oplossing:

$g(x)$

27. Gebruik die funksies $f(x) = 3 - x, g(x) = 2x^2 - 4; h(x) = 3^x - 4; k(x) = \frac{3}{2x} - 1$, om die waarde van die volgende te vind:

a) $f(7)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 - (7) \\ &= -4 \end{aligned}$$

b) $g(1)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} g(1) &= 2(1)^2 - 4 \\ &= -2 \end{aligned}$$

c) $h(-4)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} h(-4) &= 3^{-4} - 4 \\ &= -\frac{323}{81} \end{aligned}$$

d) $k(5)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} k(5) &= \frac{3}{2(5)} - 1 \\ &= -\frac{7}{10} \end{aligned}$$

e) $f(-1) + h(-3)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(-1) + h(-3) &= 3 - (-1) + 3^{-3} - 4 \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

f) $h(g(-2))$

Oplossing:

$$\begin{aligned} g(-2) &= 2(-2)^2 - 4 \\ &= 4 \\ \therefore h(g(-2)) &= h(4) \\ &= 3^4 - 4 \\ &= 77 \end{aligned}$$

g) $k(f(6))$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(6) &= 3-(6) \\ &= -3 \\ \therefore k(f(6)) &= k(-3) \\ &= \frac{3}{2(-3)} - 1 \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

28. Bepaal of die volgende bewerings waar of onwaar is. As die bewering onwaar is, gee redes waarom.

a) Die gegewe of gekose y-waarde staan bekend as die onafhanklike veranderlike.

Oplossing:

Vals, die gegewe of gekose y-waarde is die afhanklike veranderlike omdat sy waarde afhang van die onafhanklike veranderlike x.

b) 'n Grafiek is kontinu as daar onderbrekings in die grafiek is.

Oplossing:

Vals, 'n grafiek is kontinu as daar geen onderbrekings in is nie.

c) Funksies van die vorm $y = ax + q$ is reguitlyne.

Oplossing:

Waar

d) Funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$ is eksponensiële funksies.

Oplossing:

Vals, funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$ is hiperboliese funksies.

e) 'n Asimptoot is 'n reguitlyn wat 'n grafiek ten minste eenmaal sal sny.

Oplossing:

Vals, 'n asimptoot is 'n reguitlyn wat 'n grafiek nooit sal ontmoet nie.

f) Gegee 'n funksie van die vorm $y = ax + q$. Om die y-afsnit te kry, stel $x = 0$ en los op vir y.

Oplossing:

Waar

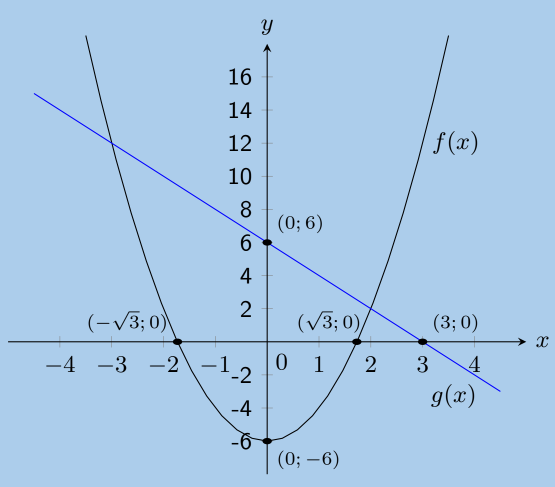
29. Gegee die funksies $f(x) = 2x^2 - 6$ en $g(x) = -2x + 6$.

a) Skets die grafieke van f en g op dieselfde assestelsel.

Oplossing:

Vir $g(x)$ is die y-afsnit $(0;6)$ en die x-afsnit is $(3;0)$.

Vir $f(x)$ is die y-afsnit $(0;-6)$ en die x-afsnitte is $\left(\sqrt{3};0\right)$ en $\left(-\sqrt{3};0\right)$.



b) Bereken die snypunte van f en g.

Oplossing:

Die x-waardes van die snypunte kan gevind word deur $f(x) = g(x)$ te stel:

$$2x^2 - 6 = -2x + 6$$
$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x-2)(x+3) = 0$$
$$\therefore x = 2 \text{ en } x = -3$$

Die y-waardes kan verkry word deur substitusie van die x-waardes in enige van die vergelykings:

$$g(x) = -2(-3) + 6 = 12$$
$$g(x) = -2(2) + 6 = 2$$

Dus is die snypunte $(2; 2)$ en $(-3; 12)$.

c) Gebruik jou grafieke en die snypunte om vir x op te los wanneer:
   i. $f(x) > 0$
   ii. $g(x) < 0$
   iii. $f(x) \leq g(x)$

Oplossing:

i.

$$\text{Stel } f(x) = 0$$
$$2x^2 - 6 = 0$$
$$2x^2 = 6$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Dus, vir $f(x) > 0$, $x \in (-\infty; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$.

ii.

$$\text{Stel } g(x) = 0$$
$$-2x + 6 = 0$$
$$-2x = -6$$
$$x = 3$$

Dus, vir $g(x) < 0$, $x \in (3; \infty)$.

iii. Dit word gevind deur te kyk waar die grafiek van $f(x)$ onder die grafiek van $g(x)$ lê.
Vir $f(x) \leq g(x)$, $x \in [-3; 2]$.

d) Gee die vergelyking van die refleksie van f in die x-as.

Oplossing:

$y = -2x^2 + 6$

30. As ’n bal laat val word, neem die hoogte wat die bal terugbons af met elke bons. Die vergelyking $y = 5(0{,}8)^x$ toon die verband tussen die aantal terugbonse x en die hoogte van die bons y vir ’n sekere bal. Wat is die benaderde hoogte van die vyfde bons van hierdie bal tot die naaste tiende van ’n eenheid?

Oplossing:

Vir die vyfde bons $x = 5$. Los op vir y:

$$y = 5(0{,}8)^x$$
$$= 5\left(\frac{4}{5}\right)^5$$
$$= 5\left(\frac{1024}{3125}\right)$$
$$= 5(0{,}38)$$
$$= 1{,}6 \text{ eenhede}$$

Dus is die benaderde hoogte van die vyfde bons 1,6 eenhede.

31. Mark het 15 muntstukke in R 5 en R 2 munte. Hy het 3 meer R 2 munte as R 5 munte. Hy stel 'n stelsel van vergelykings op om die situasie voor te stel, waar x die aantal R 5 munte voorstel, terwyl y die aantal R 2 munte voorstel. Toe los hy die vergelykings op met behulp van grafieke.

a) Skryf die stelsel van vergelykings neer.

Oplossing:

Laat $x =$ R 5 muntstukke en $y =$ R 2 muntstukke. Dan is die stelsel van vergelykings:

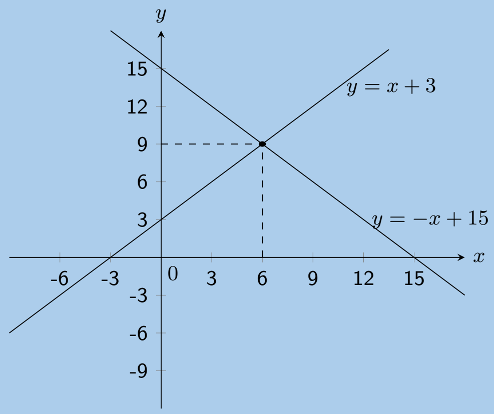
$x + y = 15$; $y = x + 3$

b) Trek die grafieke op dieselfde assestelsel.

Oplossing:

Vir $x + y = 15$ is die y-afsnit $(0; 15)$ en die x-afsnit is $(15; 0)$.

Vir $y = x + 3$ is die y-afsnit $(0; 3)$ en die x-afsnit is $(-3; 0)$.



c) Gebruik jou sketse en bepaal hoeveel R 5 en R 2 stukke Mark het.

Oplossing:

Van die skets ons kan sien dat die grafiek sny by $(6; 9)$. Algebraïes kontroleer ons:

Substitueer die waarde van $y = -x + 15$ in die tweede vergelyking:

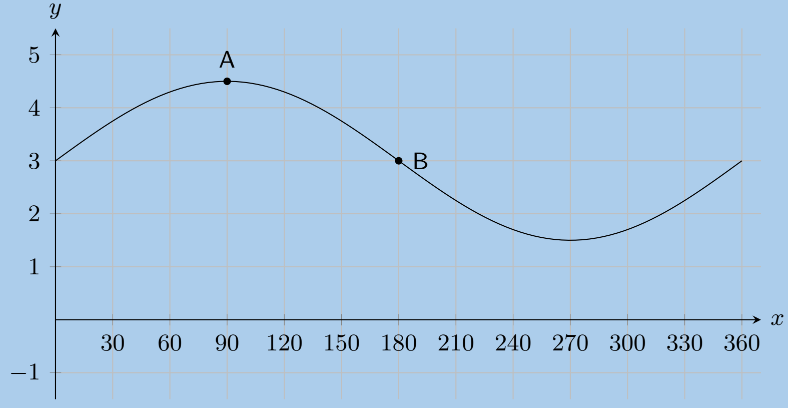
$$\begin{aligned} -x + 15 &= x + 3 \\ -2x &= -12 \\ \therefore x &= 6 \end{aligned}$$

Substitueer die waarde van x terug in die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} y &= -(6) + 15 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Mark het 6 R 5 munte en 9 R 2 munte.

32. Die volgende grafiek toon 'n funksie van die vorm: $y = a \sin \theta + q$ waar **Punt A** is by $(90°; 4{,}5)$, en **Punt B** is by $(180°; 3)$. Bepaal die waardes van a en q.



Oplossing:

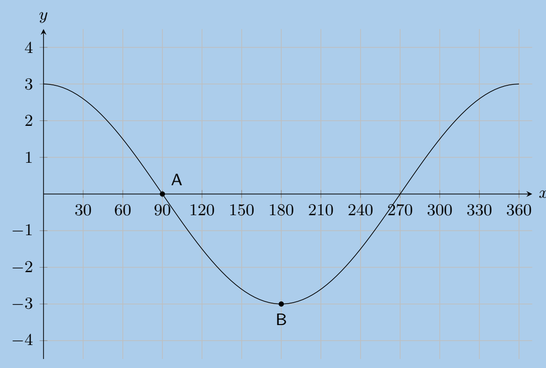
Om q te bepaal neem ons kennis dat q die grafiek verskuif. Om q te bepaal kan ons kyk na enige punt op die grafiek. Byvoorbeeld punt B is by $(180°; 3)$. Vir 'n oorsponklike sinusgrafiek sou punt B $(180°; 0)$ wees. Vir hierdie grafiek sien ons dat hierdie punt 3 eenhede afwaarts verskuif het. Dus $q = 3$.

Om a te vind ons neem kennis dat die y-waarde by die middel (punt B) is 3, terwyl die y-waarde by die top (punt A) is 4,5. Ons kan die amplitude bereken deur die afstand van die top van die grafiek na die middel van die grafiek te vind: $4{,}5 - 3 = 1{,}5$. Dus $a = \frac{3}{2}$.

Die volledige vergelyking is $y = \frac{3}{2}\sin\theta + 3$.

Dus $a = \frac{3}{2}$ en $q = 3$.

33. Die grafiek hieronder toon 'n trigonometriese vergelyking van die vorm : $y = a\cos\theta + q$. Twee punte word op die grafiek getoon: **Punt A** is by $(90°; 0)$, en **Punt B** is by $(180°; -3)$. Bereken die waardes van a (die amplitude van die grafiek) en q (die vertikale verskuiwing van die grafiek).



Oplossing:

Om a te vind neem ons kennis dat die y-waarde by die middel (punt A) 0 is, terwyl die y-waarde by die onderste (punt B) -3 is. Ons kan die amplitude bereken deur die afstand van die onderste van die grafiek na die middel van die grafiek te vind: $0 - (-3) = 3$. Dus $a = \frac{3}{2}$.

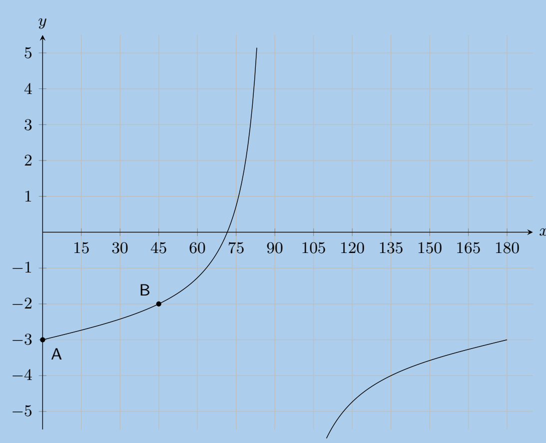
Om q te bepaal neem ons kennis dat q die grafiek verskuif. Om q te bepaal kan ons kyk na enige punt op die grafiek. Byvoorbeeld punt A is by $(90°; 0)$. Vir 'n oorsponklike cosinusgrafiek sou punt B $(90°; 0)$ wees. Vir hierdie grafiek sien ons dat hierdie punt nie verskuif het nie. Dus $q = 3$.

Die volledige vergelyking is $y = 3\cos\theta$.

Dus $a = 3$ en $q = 0$.

34. Op die grafiek hieronder sien jy 'n tangenskromme van die volgende vorm: $y = a\tan\theta + q$. Twee punte word gemerk op die kromme: **Punt A** is by $(0°; -3)$, en **Punt B** is by $(45°; -2)$.

Bereken, of bepaal andersins, die waardes van a en q.



Oplossing:

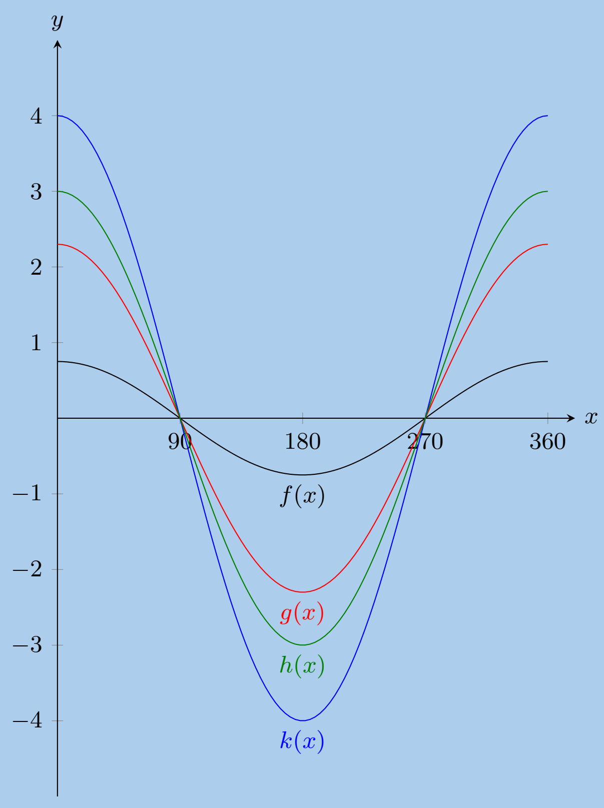
Om q te vind neem ons kennis dat q die grafiek op of af verskuif. Om q te bepaal kan ons kyk na enige punt op die grafiek. Byvoorbeeld punt A is by $(0°; -3)$. Vir 'n oorspronklike tangensgrafiek sou punt A $(0°; 0)$ wees. Vir hierdie grafiek sien ons dat hierdie punt het 3 eenhede afwaarts verskuif. Dus $q = -3$.

Om a te vind kan ons punt B vervang in die vergelyking vir die tangensgrafiek:

$$
\begin{aligned}
y &= a\tan\theta - 3 \\
(-2) &= a\tan 45^\circ - 3 \\
-2 &= a(-1) - 3 \\
-2 + 3 &= -a \\
-1 &= -a \\
1 &= a
\end{aligned}
$$

Die volledig vergelyking is: $y = \tan\theta - 3$.
Dus $a = 1$ en $q = -3$.

35. Gegewe die volgende grafiek, identifiseer 'n funksie wat by elk van die volgende vergelykings pas:



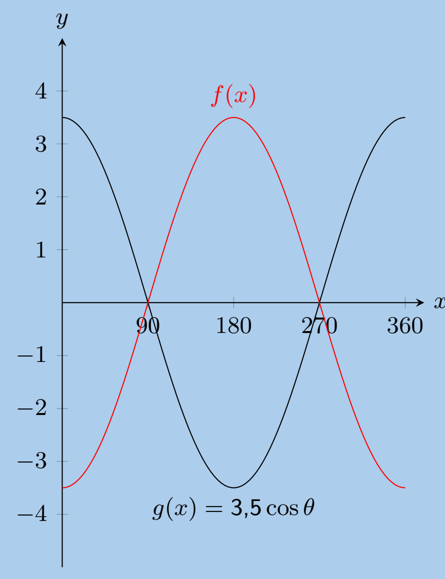
a) $y = 2{,}3\cos\theta$
Oplossing:
$g(x)$

b) $y = 0{,}75\cos\theta$
Oplossing:
$f(x)$

c) $y = 4\cos\theta$
Oplossing:
$k(x)$

d) $y = 3\cos\theta$
Oplossing:
$h(x)$

36. Die grafiek toon funksies $f(x)$ en $g(x)$



Wat is die vergelyking vir $f(x)$

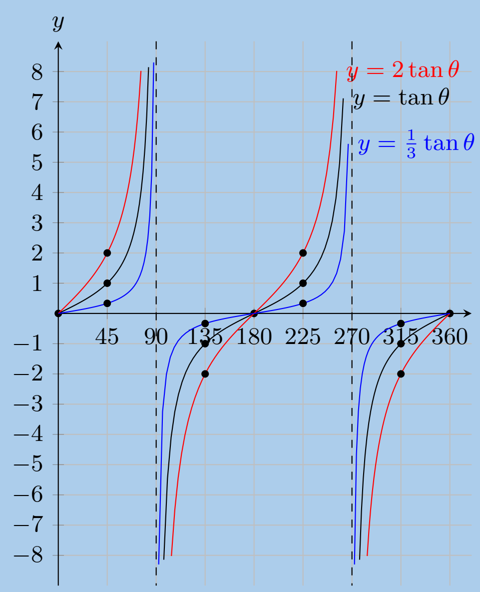
Oplossing:

$f(x) = -3.5 \cos\theta$

37. Met behulp van die tabel hieronder, skets die drie funksies op dieselfde assestelsel.

θ	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
$\tan\theta$	0	1	ongedefinieerd	-1	0	1	ongedefinieerd	-1	0
$2\tan\theta$	0	2	ongedefinieerd	-2	0	2	ongedefinieerd	-2	0
$\frac{1}{3}\tan\theta$	0	$\frac{1}{3}$	ongedefinieerd	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	ongedefinieerd	$-\frac{1}{3}$	0

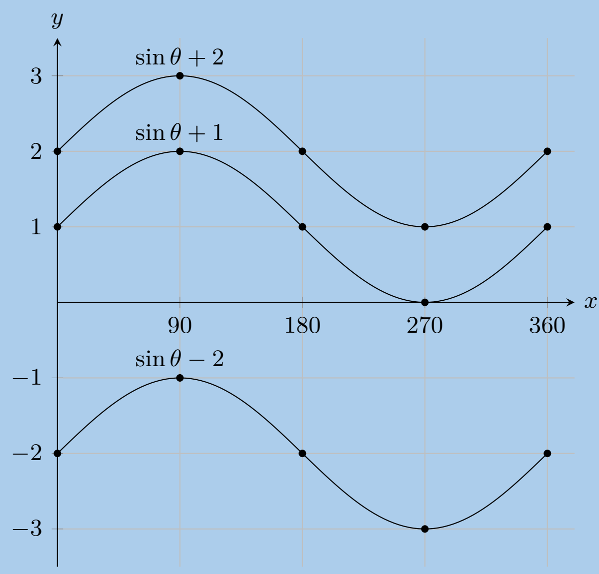
Oplossing:



38. Met behulp van die tabel hieronder, skets die drie funksies op dieselfde assestelsel.

θ	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\theta + 1$	1	2	1	0	1
$\sin\theta + 2$	3	2	2	1	2
$\sin\theta - 2$	-2	-1	-2	-3	-2

Oplossing:



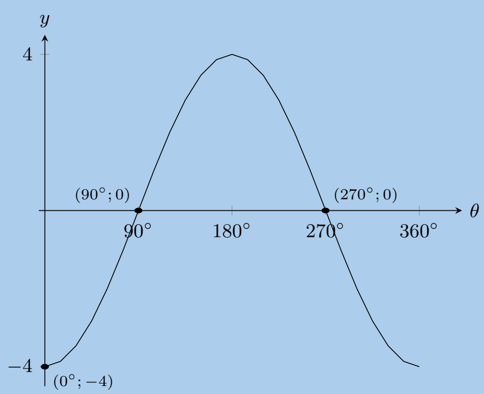
39. Skets die grafieke van die volgende trigonometriese funksies vir $\theta \in [0°; 360°]$. Toon die afsnitte en asimptote.

a) $y = -4\cos\theta$

Oplossing:

Die y-afsnit is $(0°; -4)$. Die x-afsnitte is $(90°; 0)$ en $(270°; 0)$. Daar is geen asimptote.

Die grafiek het nie verskuif nie want $q = 0$. Die grafiek is gestrek met 4 en reflekteer in die x-as.

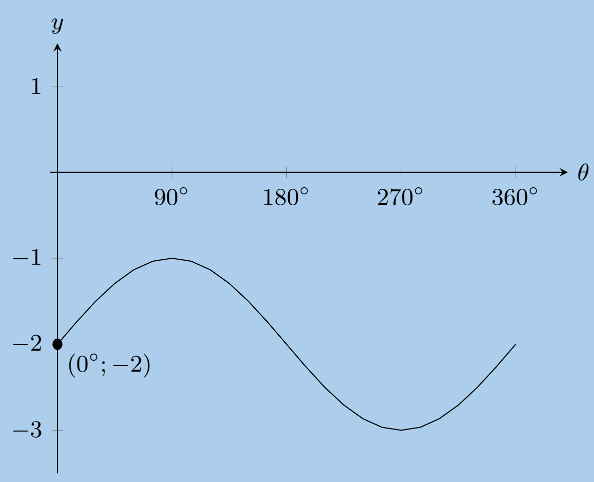


b) $y = \sin\theta - 2$

Oplossing:

Die y-afsnit is $(0°; -2)$. Daar is geen x-afsnitte. Daar is geen asimptote.

Die grafiek is verskuif met -2 aangesien $q = -2$. Die grafiek is nie gestrek nie aangesien $a = 1$.

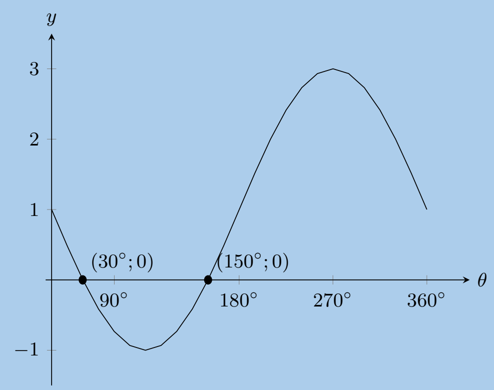


c) $y = -2\sin\theta + 1$

Oplossing:

Die y-afsnit is $(0°; 1)$. Die x-afsnitte is $(30°; 0)$ en $(150°; 0)$. Daar is geen asimptote.

Die grafiek is verskuif met 1 aangesien $q = 1$. Die grafiek is gestrek met -2 en reflekteer in die x-as aangesien $a = -2$.

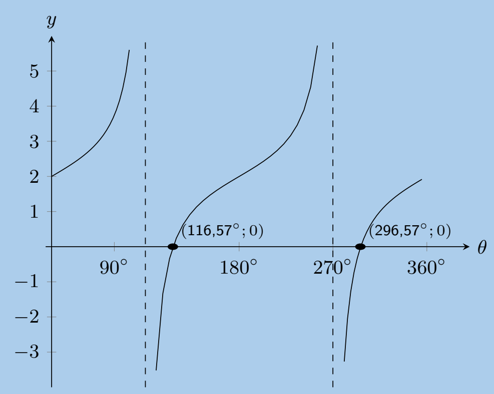


d) $y = \tan\theta + 2$

Oplossing:

Die y-afsnit is $(0°; 2)$. Die x-afsnitte is $(30°; 0)$ en $(150°; 0)$. Die asimptote is $x = 90°$ en $x = 270°$.

Die grafiek is verskuif met 2 aangesien $q = 2$. Die grafiek is nie gestrek nie aangesien $a = 1$.

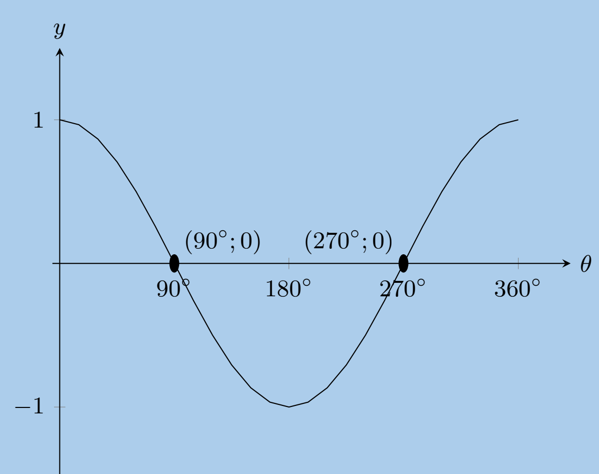


e) $y = \frac{\cos\theta}{2}$

Oplossing:

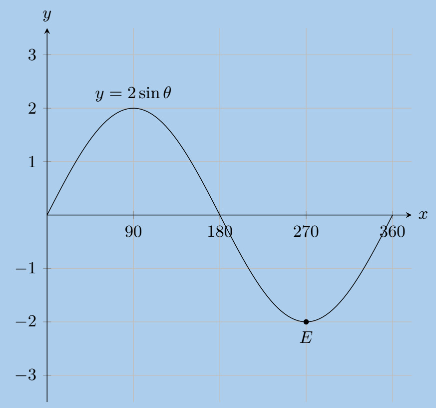
Die y-afsnit is $(0°; 0{,}5)$. Die x-afsnitte is $(90°; 0)$ en $(270°; 0)$. Daar is geen asimptote.

Die grafiek is nie verskuif nie aangesien $q = 0$. Die grafiek is gestrek deur 0,5 aangesien $a = \frac{1}{2}$.



40. Noem die koördinate by E en die terrein van die funksie.

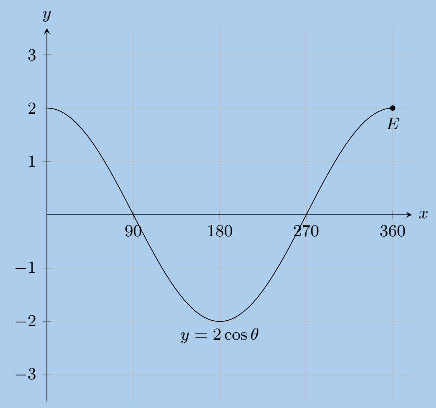
a)



Oplossing:

$E = (270°; -2)$ en $-2 \leq y \leq 2$

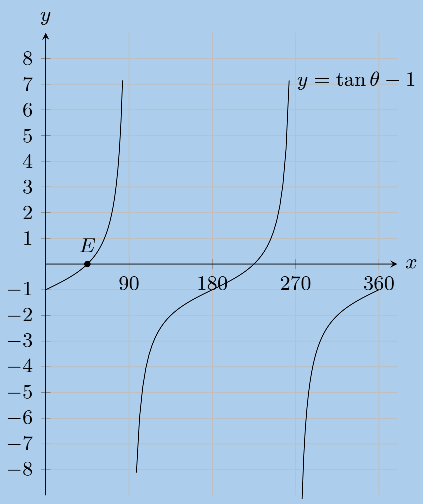
b)



Oplossing:

$E = (360°; 2)$ en $-2 \leq y \leq 2$

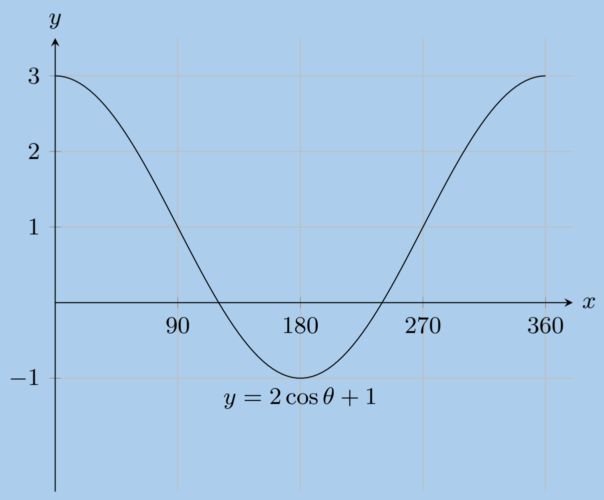
41. Meld die koördinate by E en die gebied en die terrein van die funksie in die gegewe interval.



Oplossing:

$E = (45°; 0)$, terrein $y \in \mathbb{R}$ en gebied $0 \leq x \leq 360, x \neq 90, \theta \neq 270$

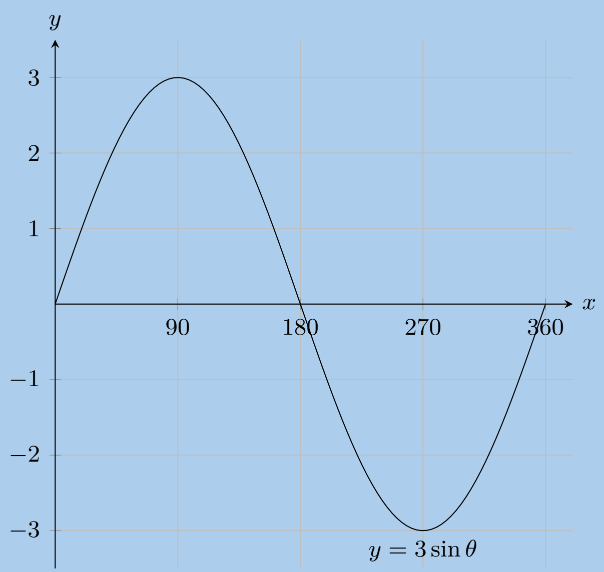
42. Vir watter waardes van θ neem die funksie af in die gegewe interval?



Oplossing:

$0° < \theta < 180°$

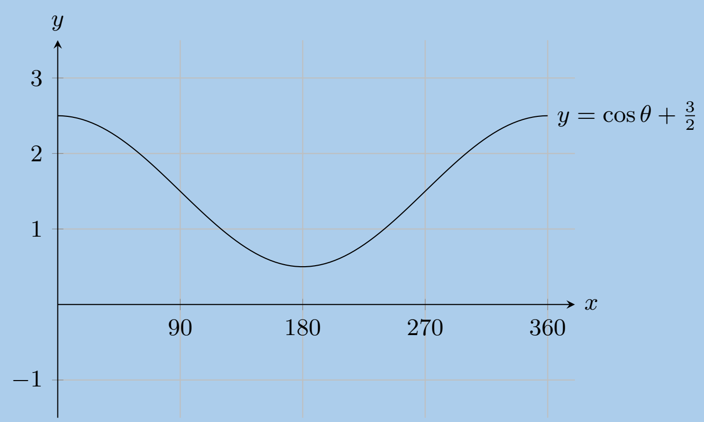
43. Vir watter waardes van θ is die funksie toenemend in die gegewe interval?



Oplossing:

$0° < \theta < 90°$ en $270° < \theta < 360°$

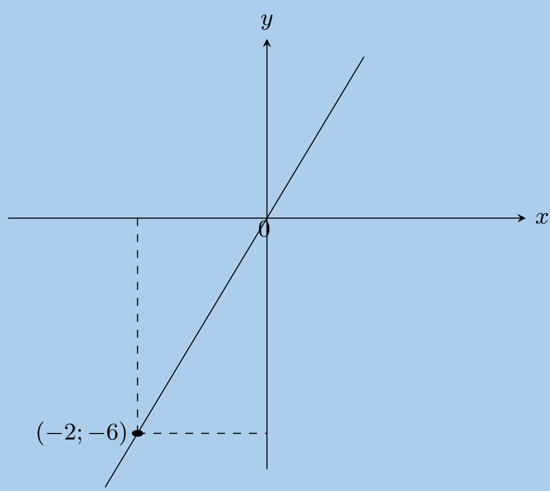
44. Vir watter waardes van θ is die funksie positief in die gegewe interval?



Oplossing:
$0° < \theta < 360°$

45. Gegee die algemene vergelykings $y = mx + c$, $y = ax^2 + q$, $y = \frac{a}{x} + q$, $y = a \cdot b^x + q$, $y = a\sin\theta + q$, $y = a\cos\theta + q$ en $y = a\tan\theta + q$, bepaal die spesifieke vergelykings vir elk van die volgende grafieke.

a)

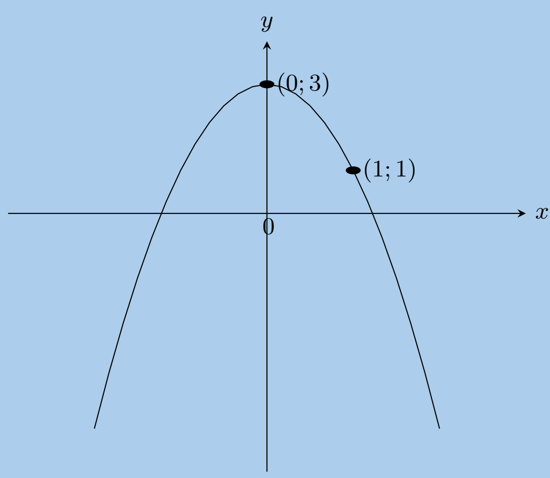


Oplossing:
Hierdie is 'n reguitlyn grafiek so die algemene vergelyking is $y = mx + c$. Die y-afsnit is by $(0; 0)$ en $c = 0$. Om te vind m substitueer ons die gegewe punt in die vergelyking en los op vir m:

$$\begin{aligned} y &= mx \\ -6 &= -2m \\ m &= 3 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking $y = 3x$.

b)

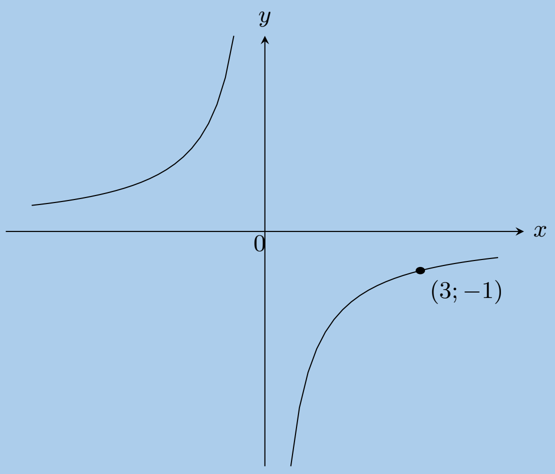


Oplossing:
Dit is 'n parabool so ons kan $y = ax^2 + q$ gebruik. Die y-afsnit is by $(0; 3)$ en dus is $q = 3$. Substitueer die punt $(1; 1)$ in die vergelyking en los op vir a:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 3 \\ 1 &= a(1)^2 + 3 \\ -2 &= a \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking $y = -2x^2 + 3$.

c)

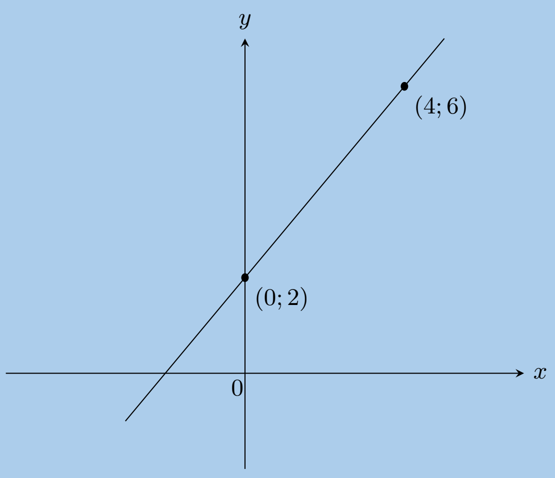


Oplossing:
Dit is 'n hiperbool so ons gebruik $y = \frac{a}{x} + q$. Daar is geen x-afsnit nie en so die grafiek het nie verskuif nie. Dus $q = 0$.
Substitueer die punt $(3; -1)$ in die vergelyking en los op vir a:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x} \\ -1 &= \frac{a}{3} \\ -3 &= a \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking $y = \frac{-3}{x}$.

d)

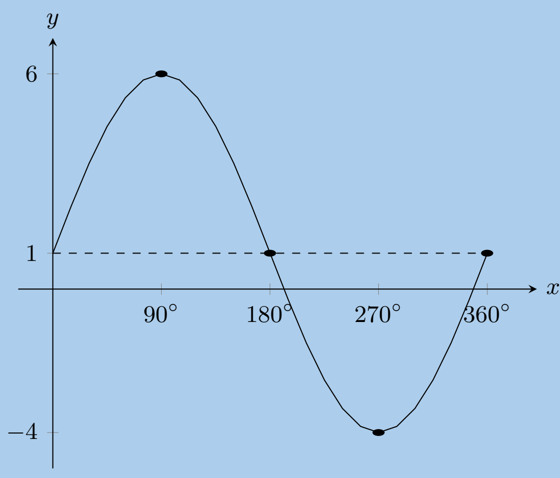


Oplossing:
Dit is 'n reguitlyngrafiek en so die algemene vergelyking is $y = mx + c$. Die y-afsnit is by $(0; 2)$ en dus is $c = 2$. Om te vind m substitueer ons die punt $(4; 6)$ in die vergelyking en los op vir m:

$$\begin{aligned} y &= mx + 2 \\ 6 &= 4m + 2 \\ m &= 1 \end{aligned}$$

Die vergelyking is $y = x + 2$.

e)



Oplossing:

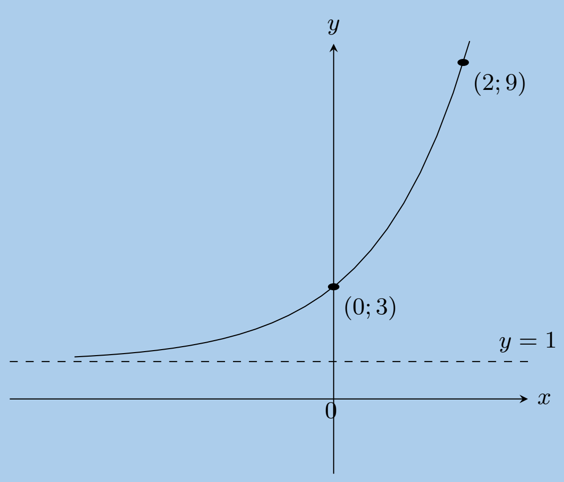
Dit is 'n sinusgrafiek so die algemene vergelyking is $y = a\sin\theta + q$.

Om a te vind neem ons kennis dat die y-waarde by die onderste punt -4 is, terwyl die y-waarde by die top 6 is. Ons kan die amplitude bereken deur die afstand vanaf die onderkant van die grafiek na die top van die grafiek te vind en hierdie waarde te deel deur 2: $\frac{6-(-4)}{2} = 5$. Dus $a = 5$.

Om q te vind neem ons kennis dat q die grafiek verskuif. Om q te bepaal kan ons kyk na enige punt op die grafiek. Byvoorbeeld ons kan sien dat wanneer $x = 180°$, $y = 1$. Vir 'n basiese sinusgrafiek met dieselfde a waarde (b.v. $5\sin\theta$) sou hierdie punt by $(180°; 0)$ wees. Vir hierdie grafiek sien ons dat hierdie punt gestrek is met 1 eenheid. Dus $q = 1$.

Die volledige vergelyking vir hierdie grafiek is $y = 5\sin\theta + 1$.

f)



Oplossing:

Dit is 'n eksponensiële grafiek so ons gebruik $y = a\ .\ b^x + q$. Ons sien dat die asimptoot by $y = 1$ is en dus is $q = 1$. Om a te vind substitueer ons die punt $(0; 3)$ in die vergelyking:

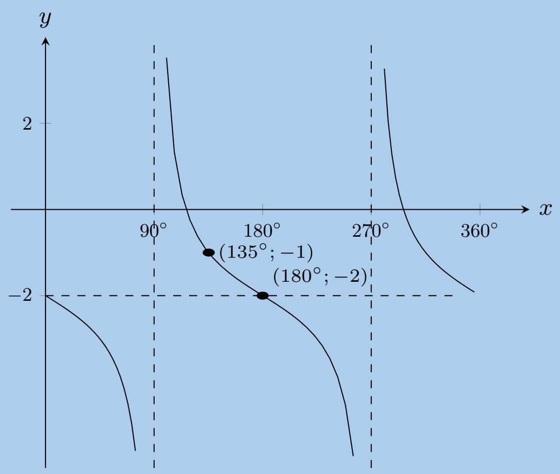
$$\begin{aligned} y &= a\ .\ b^x + 1 \\ 3 &= a\ .\ b^0 + 1 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Om b te vind substitueer ons die punt $(2; 9)$ in die vergelyking:

$$\begin{aligned} y &= 2 \,.\, b^x + 1 \\ 9 &= 2 \,.\, b^2 + 1 \\ 4 &= b^2 \\ 2^2 &= b^2 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking $y = 2 \times 2^x + 1$.

g)



Oplossing:

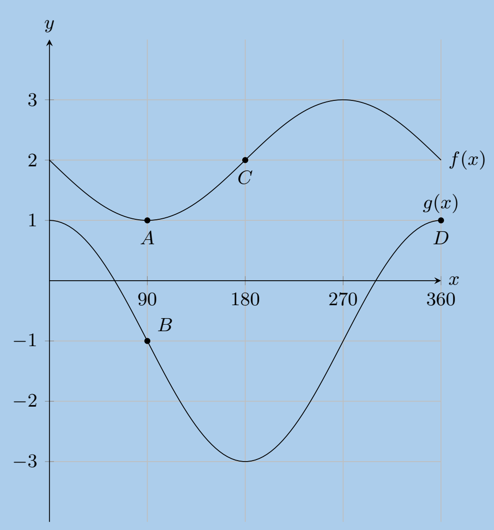
Dit is 'n tangensgrafiek so ons gebruik $y = a \tan \theta + q$. Om q te vind neem ons kennis dat die grafiek afwaarts deur 2 eenhede (die punt $(180°; -2)$ is gegee) verskuif is. Dus $q = -2$.

Om a te vind substitueer $(135°; -1)$ in die vergelyking:

$$\begin{aligned} y &= a \tan \theta - 2 \\ -1 &= a \tan(135°) - 2 \\ 1 &= -a \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Die vergelyking is $y = -\tan \theta - 2$.

46.



a) Noem die koördinate by A, B, C en D.

Oplossing:

$A(90°;1)$, $B(90°;-1)$, $C(180°;2)$ en $D(360°;1)$

b) Hoeveel keer in hierdie interval sal $f(x)$ en $g(x)$ mekaar sny?

Oplossing:

0

c) Wat is die amplitude van $f(x)$?

Oplossing:

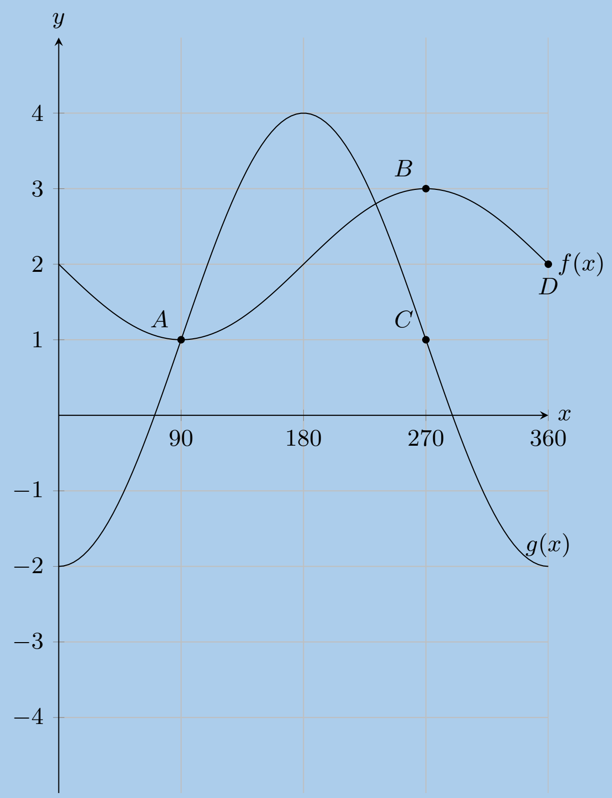
1

d) Bereken: $f(180°) - g(180°)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(180°) - g(180°) &= 2 - (-3) \\ &= 5 \end{aligned}$$

47.



a) Noem die koördinate by A, B, C en D.

Oplossing:

$A(90°;1)$, $B(270°;3)$, $C(270°;1)$ en $D(360°;2)$

b) Hoeveel keer in hierdie interval sal $f(x)$ en $g(x)$ mekaar sny?

Oplossing:

2

c) Wat is die amplitude van $g(x)$?

Oplossing:

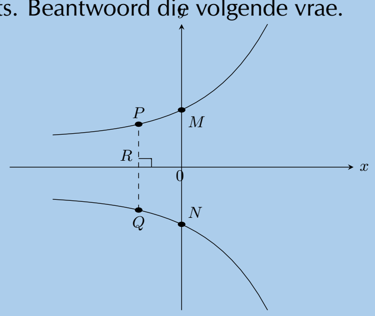
3

d) Evalueer: $g(180°) - f(180°)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(180°) - g(180°) &= 4 - 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

48. $y = 2^x$ en $y = -2^x$ is hieronder geskets. Beantwoord die volgende vrae.



a) Bereken die koördinate van M en N.

Oplossing:

M is die y-afsnit van $y = 2^x$ so $y = 2^0 = 1$. Dus is die koördinate van M $(0; 1)$.

N is die y-afsnit van $y = -2^x$ so $y = -(2^0) = -1$. Dus is die koördinate van N $(0; -1)$.

Dus $M(0; 1)$ en $N(0; -1)$.

b) Bereken die lengte van MN.

Oplossing:

M en N beide lê op die y-as so hulle albei lê op 'n reguit lyn.

Dus $MN = 1 + 1 = 2$.

c) Bereken die lengte van PQ as $OR = 1$ eenheid.

Oplossing:

By P, $x = -1$, dus $y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

By Q, $x = -1$, dus $y = -(2^{-1}) = -\frac{1}{2}$.

Dus lengte $PQ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

d) Gee die vergelyking van $y = 2^x$ gereflekteer rondom die y-as.

Oplossing:

$y = 2^{-x}$

e) Gee die terrein van beide grafieke.

Oplossing:

Terrein $y = 2^x$: $(0; \infty)$

Terrein $y = -2^x$: $(-\infty; 0)$

49. Teken die volgende funksies op dieselfde assestelsel en merk al die snypunte duidelik.

a) $y = -2x^2 + 3$
$y = 2x + 4$

Oplossing:

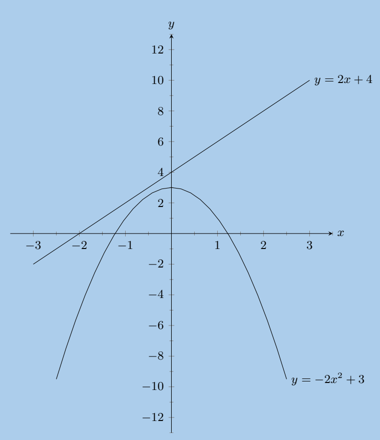
Vir $y = -2x^2 + 3$:

Die y-afsnit is by $(0; 3)$. Die x-afsnitte is by $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right)$ en $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right)$.

Vir $y = 2x + 4$:

Die y-afsnit is by $(0; 4)$. Die x-afsnit is by $(-2; 0)$.

Daar is geen snypunte nie.



b) $y = x^2 - 4$
$y = 3x$

Oplossing:

Vir $y = x^2 - 4$:

Die y-afsnit is by $(0;-4)$. Die x-afsnitte is $(2;0)$ en $(-2;0)$.

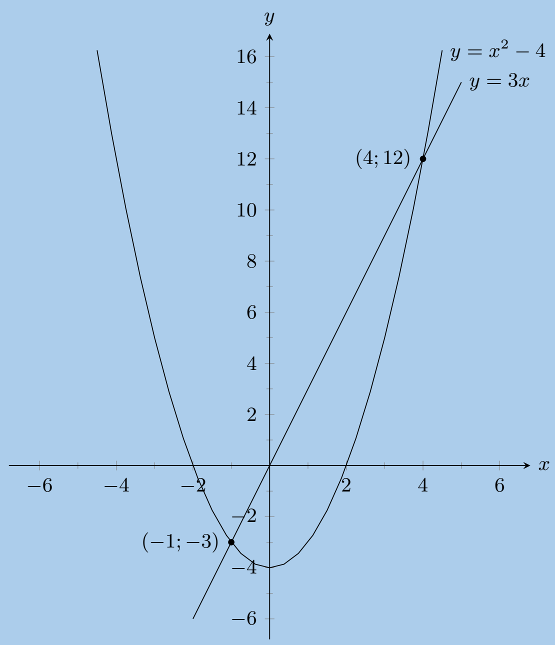
Vir $y = 3x$:

Die y-afsnit is $(0;0)$. Die x-afsnit is $(0;0)$.

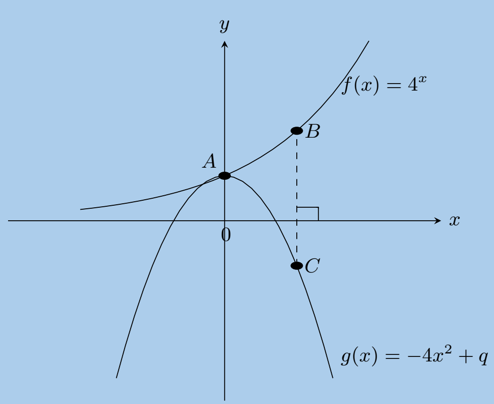
Om die snypunt te vind stel ons die twee funksies gelyk:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 3x \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ (x-4)(x+1) &= 0 \\ x &= 4 \text{ of } x = -1 \\ y = 3(4) &\text{ of } y = 3(-1) \\ y = 12 &\text{ of } y = -3 \end{aligned}$$

Dus is die snypunte $(4;12)$ en $(-1;-3)$.



50. $f(x) = 4^x$ en $g(x) = -4x^2 + q$ is hieronder geskets. Die punte $A(0;1)$ en $B(1;4)$ word gegee. Beantwoord die volgende vrae.



a) Bepaal die waarde van q.

Oplossing:

Punt A is die y-afsnit van $g(x)$, dus $q = 1$.

b) Bereken die lengte van BC.

Oplossing:

B is by $(1;4)$ so C is by $(1;y)$. Om y te vind substitueer ons C in $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= -4x^2 + 1 \\ y &= -4(1)^2 + 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Dus $BC = 3 + 4 = 7$ eenhede.

c) Gee die vergelyking van $f(x)$ gereflekteer rondom die x-as.

Oplossing:

$y = -4^x$

d) Gee die vergelyking van $f(x)$ vertikaal opwaarts geskuif met 1 eenhede.

Oplossing:

$y = 4^x + 1$

e) Gee die vergelyking van die asimptote van $f(x)$.

Oplossing:

$y = 0$

f) Gee die terrein van $f(x)$ en $g(x)$.

Oplossing:

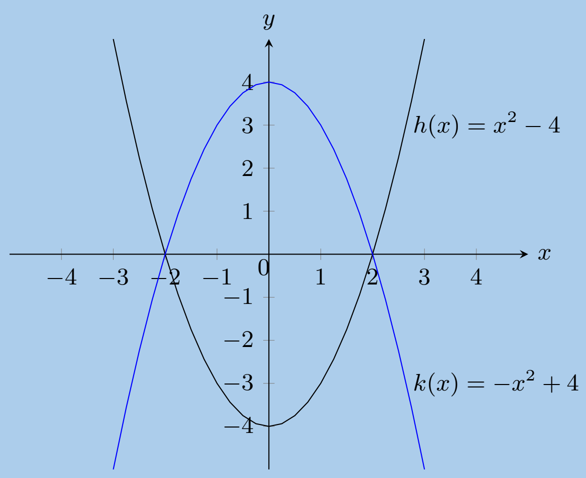
Terrein $f(x)$: $(0;\infty)$, Terrein $g(x)$: $(-\infty;1]$

51. Gegee $h(x) = x^2 - 4$ en $k(x) = -x^2 + 4$. Beantwoord die vrae wat volg.

a) Skets beide grafieke op dieselfde assestelsel.

Oplossing:

Vir $h(x)$ is die y-afsnit by $(0;4)$. Die x-afsnitte is by $(2;0)$ en $(-2;0)$.
Vir $k(x)$ is die y-afsnit by $(0;-4)$. Die x-afsnitte is by $(2;0)$ en $(-2;0)$.



b) Beskryf die verband tussen h en k.

Oplossing:

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 - 4 \\ k(x) &= -x^2 + 4 \\ &= -(x^2 - 4) \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

$k(x)$ is dus die refleksie van $h(x)$ in die x-as.

c) Gee die vergelyking van $k(x)$ gereflekteer in die lyn $y = 4$.

Oplossing:

$y = x^2 + 4$

d) Gee die gebied en terrein van h.

Oplossing:

Gebied h: $(-\infty; \infty)$. Terrein h: $[-4; \infty)$.

52. Skets die grafieke van $f(\theta) = 2\sin\theta$ en $g(\theta) = \cos\theta - 1$ op dieselfde assestelsel. Gebruik jou skets om die volgende te bepaal:

a) $f(180°)$

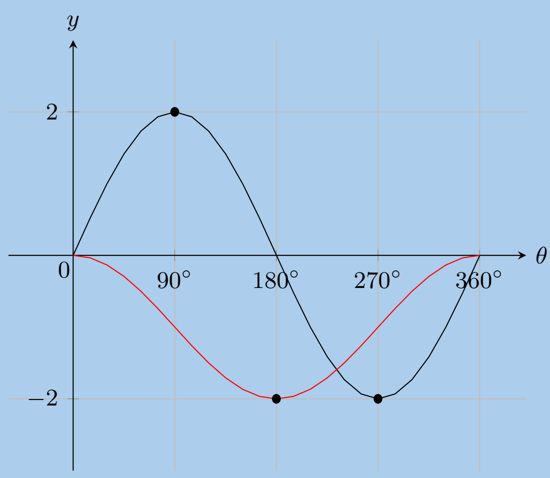
b) $g(180°)$

c) $g(270°) - f(270°)$

d) Die gebied en terrein van g.

e) Die amplitude en periode van f.

Oplossing:



a) $f(180°) = 0$

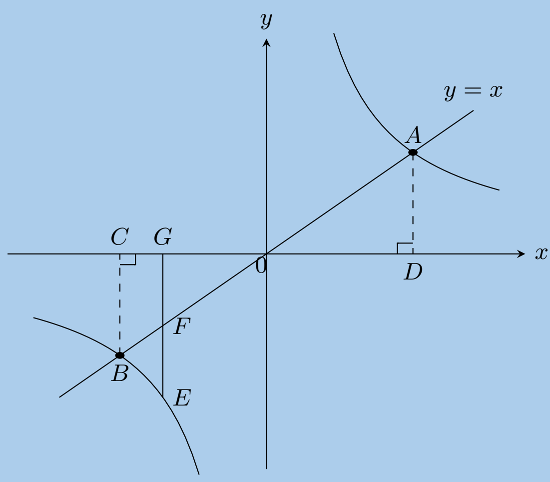
b) $g(180°) = -2$

c) $g(270°) - f(270°) = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$

d) Gebied: $[0°; 360°]$. Terrein: $[-2; 0]$

e) Amplitude: 2. Period: 360° .

53. Die grafieke van $y = x$ en $y = \dfrac{8}{x}$ word getoon in die volgende diagram.



Bereken:

a) Die koördinate van punte A en B.

Oplossing:

A en B is die snypunte vir die twee funksies. Dus:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{8}{x} \\
x^2 &= 8 \\
\therefore x &= \pm\sqrt{8}
\end{aligned}
$$

Aangesien die vergelyking van die reguitlyn is $y = x$ is, is die x-waardes ook die y-waardes vir die snypunte.
Dus $A(\sqrt{8}; \sqrt{8})$ en $B(-\sqrt{8}; -\sqrt{8})$

b) Die lengte van CD.

Oplossing:

C het dieselfde x waarde as A en D het dieselfde x waarde as B.
Dus $C(-\sqrt{8}; 0)$ en $D(\sqrt{8}; 0)$.
$CD = \sqrt{8} + \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$.

c) Die lengte van AB.

Oplossing:

Gebruik Pythagoras:

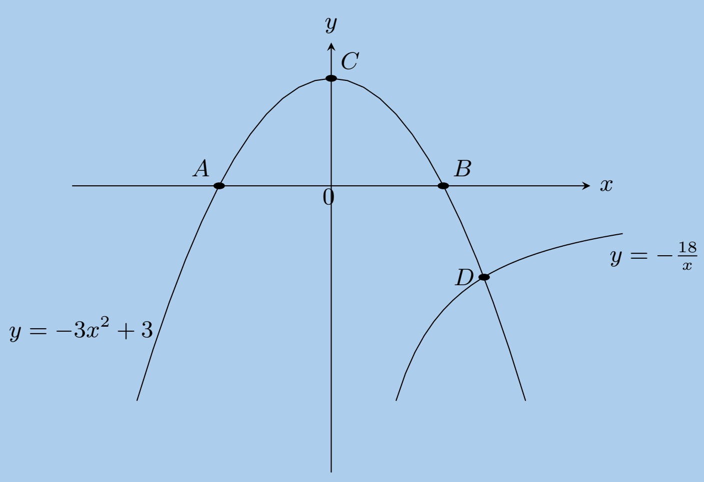
$$
\begin{aligned}
OD = \sqrt{8} \text{ eenhede en } AD &= \sqrt{8} \text{ eenhede} \\
AO^2 &= OD^2 + AD^2 \\
&= (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 \\
&= 8 + 8 \\
&= 16 \\
\therefore AO &= 4 \text{ eenhede} \\
\text{Net so, } OB &= 4 \text{ eenhede} \\
\therefore AB &= 8 \text{ eenhede}
\end{aligned}
$$

d) Die lengte van EF, gegewe $G(-2; 0)$.

Oplossing:

F en E het dieselfde x waardes as punt G. F lê op $y = x$ en dus is $F(-2; -2)$. E lê op $y = \frac{8}{x}$ en dus is $E(-2; -4)$.
Dus lengte $EF = 2 + 4 = 2$ eenhede.

54. Gegee die diagram met $y = -3x^2 + 3$ en $y = -\dfrac{18}{x}$.



a) Bereken die koördinate van A, B en C.

Oplossing:

A en B is die x-afsnitte van $y = -3x^2 + 3$. C is die y-afsnit van $y = -3x^2 + 3$.
Dus is punt C by $(0; 3)$.
Punte B en A is by $(1; 0)$ en $(-1; 0)$ onderskeidelik.
Dus $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 3)$

b) Beskryf in woorde wat gebeur by die punt D.
Oplossing:
Die parabool en die hiperbool sny by die punt D wat in die vierde kwadrant lê:

c) Bereken die koördinate van D.
Oplossing:

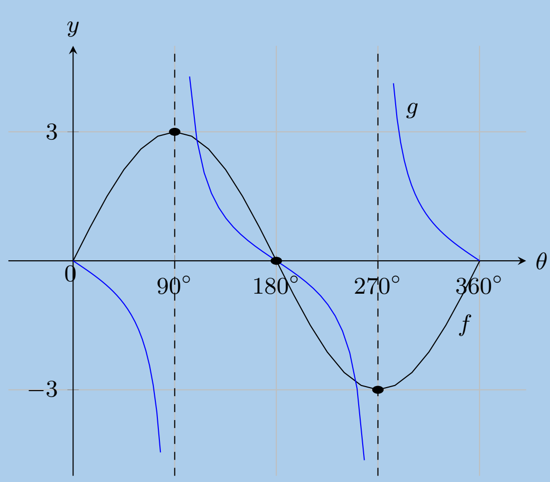
$$\begin{aligned}
-\frac{18}{x} &= -3x^2 + 3 \\
-18 &= -3x^3 + 3x \\
0 &= -3x^3 + 3x + 18 \\
0 &= x^3 - x - 6 \\
0 &= (x-2)(x^2 + 2x + 3) \\
x &= 2 \\
f(2) &= (2)^3 - 2 - 6 = 0 \\
\text{as } x = 2,\ y &= -3(2)^2 + 3 = -9 \\
\therefore D(2;-9)
\end{aligned}$$

d) Bereken die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punte C en D gaan.
Oplossing:
Bepaal gradiënt $D(2;-9)$ en $C(0;3)$:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{-9-3}{2-0} \\
&= -6
\end{aligned}$$

C is die y-afsnit en dus $c = 3$.
Dus $y = -6x + 3$.

55. Die diagram toon die grafiek van $f(\theta) = 3\sin\theta$ en $g(\theta) = -\tan\theta$



a) Gee die gebied van g.
Oplossing:
Gebied: $\{\theta : 0° \leq \theta \leq 360°, \theta \neq 90°; 270°\}$

b) Wat is die amplitude van f?
Oplossing:
Amplitude: 3

c) Bepaal vir watter waardes van θ:
   i. $f(\theta) = 0 = g(\theta)$
   ii. $f(\theta) \times g(\theta) < 0$
   iii. $\frac{g(\theta)}{f(\theta)} > 0$

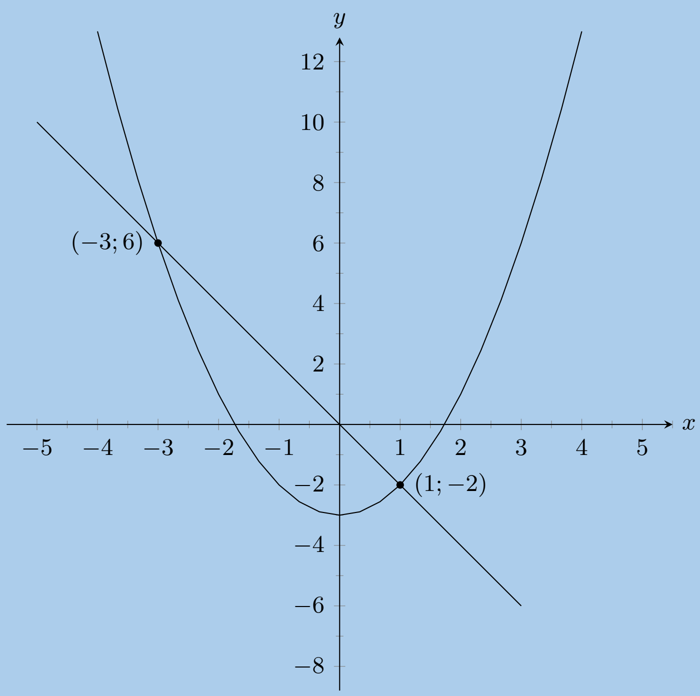
iv. neem $f(\theta)$ toe

Oplossing:

i. $\{0°;\ 180°;\ 360°\}$
ii. $(0°;\ 90°) \cup (270°;\ 360°)$
iii. $\{\theta : 90° < \theta < 270°, \theta \neq 180°\}$
iv. $(0°;\ 90°) \cup (270°;\ 360°)$

56. Bepaal die vergelykings van die grafieke hieronder.

a)



Oplossing:

Vir die reguitlyn:

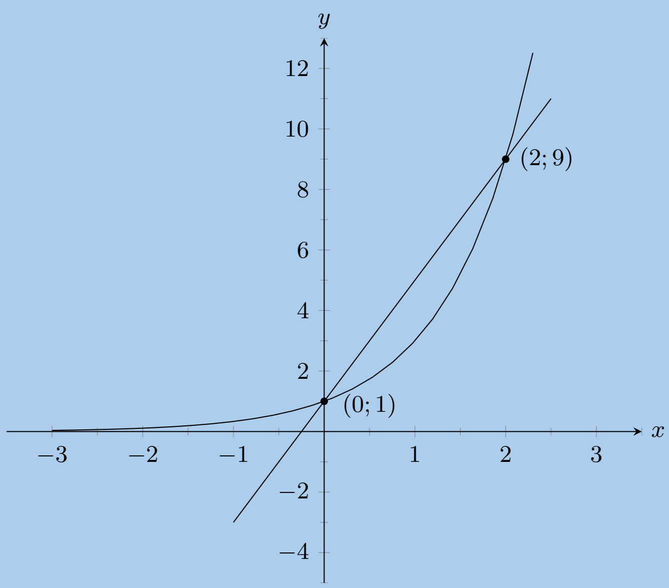
$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
c &= 0 \\
m &= \frac{6 - (-2)}{-3 - 1} \\
m &= -2 \\
y &= -2x
\end{aligned}
$$

Vir die parabool:

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + q \\
q &= -3 \\
y &= ax^2 - 3 \\
6 &= a(-3)^2 - 3 \\
9 &= 9a \\
a &= 1 \\
y &= x^2 - 3
\end{aligned}
$$

Dus is die vergelykings: $y = -2x$ en $y = x^2 - 3$.

b)



Oplossing:

Vir die reguitlyn:

$$\begin{aligned}
y &= mx + c \\
c &= 1 \\
m &= \frac{9-1}{2-0} \\
m &= 4 \\
y &= 4x + 1
\end{aligned}$$

Vir die eksponensiële grafiek:

$$\begin{aligned}
y &= a \ . \ b^x + q \\
q &= 0 \\
y &= a \ . \ b^x \\
1 &= a(b^0) \\
1 &= a \\
y &= b^x \\
9 &= b^2 \\
3^2 &= b^2 \\
b &= 3 \\
y &= 3^x
\end{aligned}$$

Dus is die vergelykings $y = 4x + 1$ en $y = 3^x$.

57. Kies die korrekte antwoord:

a) Watter van die volgende het nie 'n gradiënt van 3 nie?

i. $y = 3x + 6$ ii. $3y = 9x - 1$ iii. $\frac{1}{3}(y - 1) = x$ iv. $\frac{1}{2}(y - 3) = 6x$

Oplossing:

(iv)

b) Die asimptoot van $xy = 3 + x$ is:

i. 3 ii. 1 iii. -3 iv. -1

Oplossing:

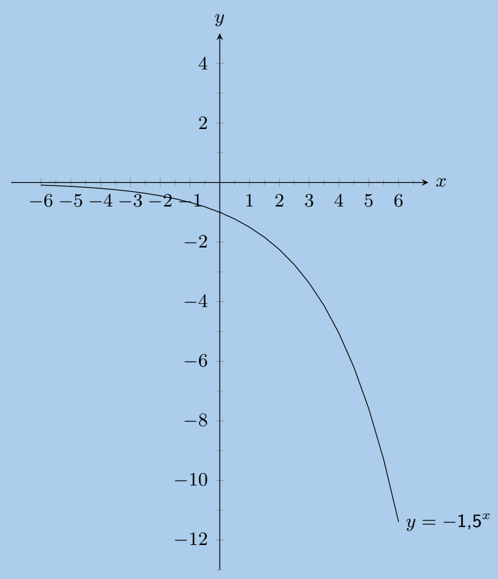
(ii)

58. Skets die volgende

a) $y = -1{,}5^x$

Oplossing:

Die asimptoot is $y = 0$. Die y-afsnit is by $(0; -1)$. Daar is geen x-afsnit nie.



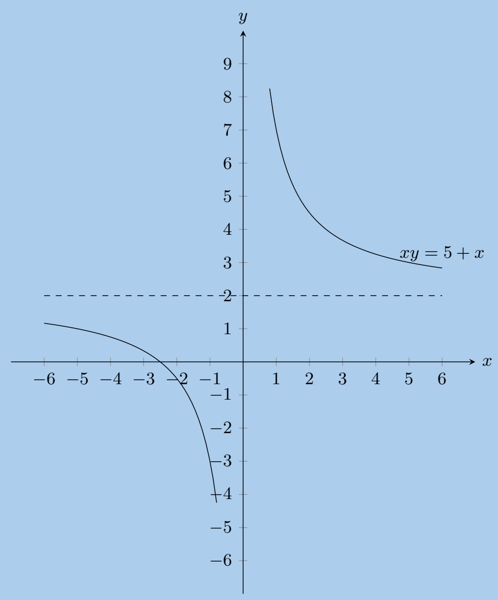
b) $xy = 5 + 2x$

Oplossing:

Skryf die vergelyking in standaardvorm:

$$xy = 5 + 2x$$
$$y = \frac{5}{x} + 2$$

Daar is geen y-afsnit nie. Die x-afsnit is by $(-2{,}5; 0)$. Die asimptoot is $y = 2$.



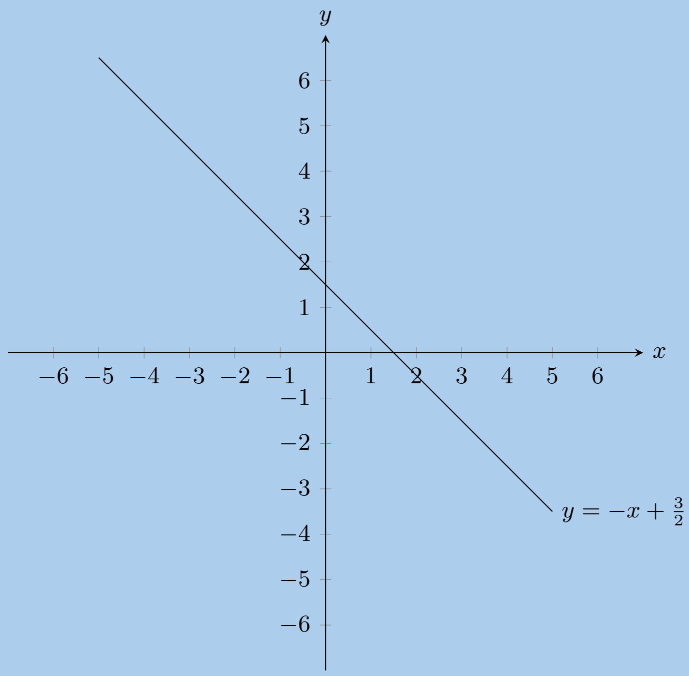
c) $2y + 2x = 3$

Oplossing:

Skryf die vergelyking in standaardvorm:

$$2y + 2x = 3$$
$$y = -x + \frac{3}{2}$$

Die y-afsnit is $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Die x-afsnit is $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JPC	1b. 2JPD	2a. 2JPF	2b. 2JPG	3a. 2JPH	3b. 2JPJ
4a. 2JPK	4b. 2JPM	5. 2JPN	6. 2JPP	7a. 2JPQ	7b. 2JPR
7c. 2JPS	8a. 2JPT	8b. 2JPV	9a. 2JPW	9b. 2JPX	9c. 2JPY
10. 2JPZ	11. 2JQ2	12. 2JQ3	13. 2JQ4	14. 2JQ5	15. 2JQ6
16a. 2JQ7	16b. 2JQ8	16c. 2JQ9	17. 2JQB	18. 2JQC	19. 2JQD
20. 2JQF	21a. 2JQG	21b. 2JQH	21c. 2JQJ	22a. 2JQK	22b. 2JQM
22c. 2JQN	22d. 2JQP	23. 2JQQ	24a. 2JQR	24b. 2JQS	24c. 2JQT
25. 2JQV	26. 2JQW	27. 2JQX	28a. 2JQY	28b. 2JQZ	28c. 2JR2
28d. 2JR3	28e. 2JR4	28f. 2JR5	29. 2JR6	30. 2JR7	31. 2JR8
32. 2JR9	33. 2JRB	34. 2JRC	35. 2JRD	36. 2JRF	37. 2JRG
38. 2JRH	39a. 2JRJ	39b. 2JRK	39c. 2JRM	39d. 2JRN	39e. 2JRP
40a. 2JRQ	40b. 2JRR	41. 2JRS	42. 2JRT	43. 2JRV	44. 2JRW
45. 2JRX	46. 2JRY	47. 2JRZ	48. 2JS2	49a. 2JS3	49b. 2JS4
50. 2JS5	51. 2JS6	52. 2JS7	53. 2JS8	54. 2JS9	55. 2JSB
56a. 2JSC	56b. 2JSD	57a. 2JSF	57b. 2JSG	58a. 2JSH	58b. 2JSJ
58c. 2JSK					

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 7

Euklidiese meetkunde

- Inhoud gedek in hierdie hoofstuk sluit die hersiening van lyne, hoeke en driehoeke in. Die middelpuntstelling word behandel. Vlieërs, parallelogramme, reghoeke, ruite of rombusse, vierkante en trapesiums word ondersoek.
- Oplos van probleme en bewyse word eers later in die jaar behandel. Die fokus van hierdie hoofstuk is om spesiale vierhoeke in te lei en inhoude van vorige grade te hersien.
- Hersiening van driehoeke behoort te fokus op gelykvormige en kongruente driehoeke.
- Sketse is waardevolle en belangrike hulpmiddels. Moedig leerders aan om akkurate diagramme te trek om probleme op te los.
- Dit is belangrik om vir leerders te beklemtoon dat eweredigheid geen aanduiding gee van werklike lengtes nie. Dit dui slegs die verhouding of ratio tussen lengtes aan.
- Notasie - beklemtoon vir leerders die belangrikheid van die korrekte opeenvolging van letters om ’n figuur te benoem, aangesien dit aandui watter hoeke ewe groot is en watter sye in dieselfde verhouding is.

GeoGebra is ’n handige hulpmiddel om te gebruik vir die maak van sketse in die uitgewerkte voorbeelde en aktiwiteite.

7.1 Inleiding

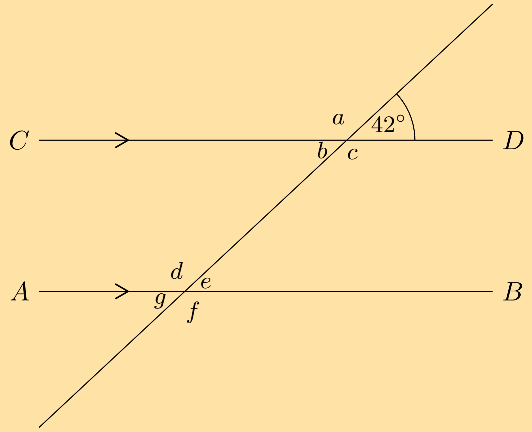
Hoeke

Eienskappe en notasie

Ewewydige lyne en snydende lyne

Exercise 7 – 1:

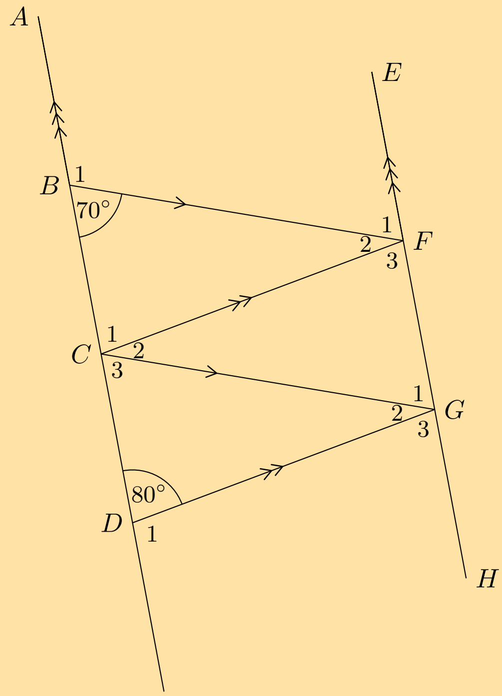
1. Gebruik aangrensende, ooreenstemmende, ko-binnehoeke en verwisselende binnehoeke om al die hoeke in die diagram met letters te bereken:



Oplossing:
Teken die diagram oor en vul die hoeke in soos jy hulle kry.

$$\begin{aligned}
a &= 180° - 42° = 138° && \text{(}\angle\text{e op reguitlyn)}\\
b &= 42° && \text{(regoorst }\angle\text{'e)}\\
c &= 138° && \text{(regoorst }\angle\text{'e)}\\
d &= 138° && \text{(ko-binne }\angle\text{e; } AB \parallel CD\text{)}\\
e &= 180° - 138° = 42° && \text{(}\angle\text{e op reguitlyn)}\\
f &= 138° && \text{(regoorst }\angle\text{'e)}\\
g &= 42° && \text{(regoorst }\angle\text{'e)}
\end{aligned}$$

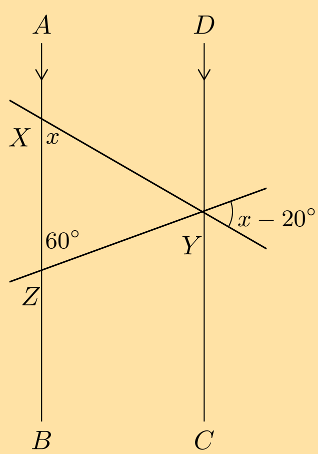
2. Vind al die onbekende hoeke in die figuur:



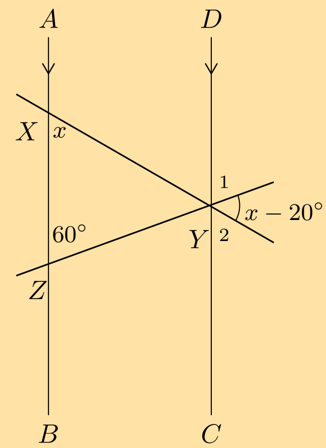
Oplossing:

$$
\begin{array}{lll}
\hat{B}_1 & = 180° - 70° = 110° & (\angle\text{e op reguit lyn}) \\
\hat{D}_1 & = 180° - 80° = 100° & (\angle\text{e op reguit lyn}) \\
\hat{F}_1 & = 70° & (\text{ko-binne } \angle\text{e; } AD \parallel EH) \\
\hat{G}_3 & = 80° & (\text{ko-binne } \angle\text{e; } AD \parallel EH) \\
\hat{C}_3 & = 70° & (\text{ooreenk } \angle\text{e; } BF \parallel CG) \\
\hat{G}_1 & = 70° & (\text{ooreenk } \angle\text{e; } BF \parallel CG) \\
\hat{G}_2 & = 180° - 70° - 80° = 30° & (\angle\text{e op reguit lyn}) \\
\hat{C}_2 & = 30° & (\text{verw. } \angle\text{e; } CF \parallel DG) \\
\hat{F}_2 & = 30° & (\text{verw. } \angle\text{e; } BF \parallel CG) \\
\hat{F}_3 & = 80° & (\angle\text{e op reguit lyn}) \\
\hat{C}_1 & = 80° & (\angle\text{e op reguit lyn})
\end{array}
$$

3. Vind die waarde van x in die figuur:



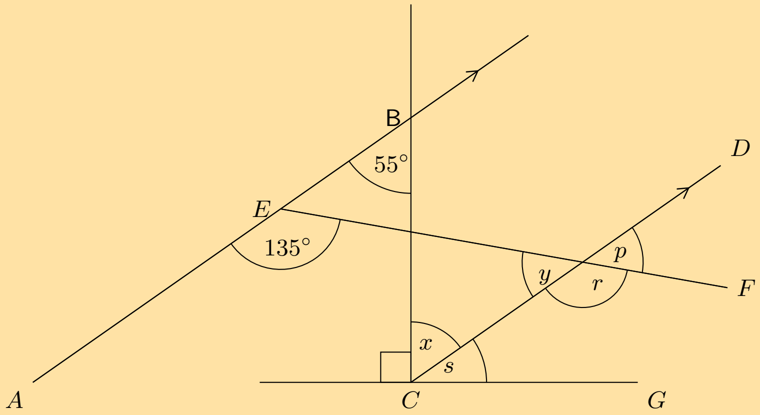
Oplossing:



$\hat{Y}_1 = 60°$ (ooreenk $\angle$e; $AB \parallel DC$).
$\hat{Y}_2 = x$ (ooreenk $\angle$e; $AB \parallel DC$).

$$\begin{aligned} \therefore x + 60° + (x - 20°) &= 180° \qquad (\angle\text{e op 'n reguit lyn}) \\ 2x &= 180° - 40° \\ 2x &= 140° \\ \therefore x &= 70° \end{aligned}$$

4. Gegee die diagram hieronder:



a) Vind elk van die onbekende hoeke gemerk in die figuur hieronder. Vind 'n rede wat tot die antwoord sal lei in een enkele stap.

Oplossing:

$\hat{x}$ en $A\hat{B}C$ is verwisselende binnehoeke op 'n snylyn BC. Dus, hulle moet ewe groot wees, since $AB \parallel CD$.
Dus $\hat{x} = 55°$.
Ons het nou net gevind dat $\hat{x} = 55°$. $\hat{x} + \hat{s} + 90° = 180°$ ($\angle$e op reguit lyn)

$$\begin{aligned} \hat{s} &= 90° - 55° \\ &= 35° \end{aligned}$$

$\angle A\hat{E}F$ en $\hat{r}$ is ooreenstemmende hoeke ($AB \parallel CD$).
Dus: $\hat{r} = 135°$.
$\hat{r} + \hat{y} = 180°$ ($\angle$e op reguit lyn)

$$\begin{aligned} \hat{y} &= 180° - 135° \\ &= 45° \end{aligned}$$

$\hat{p} = \hat{y}$ (regoorst $\angle$e).

Dus: $\hat{p} = 45°$.

b) Gebaseer op die resultate vir die hoeke hierbo, is $EF \parallel CG$?

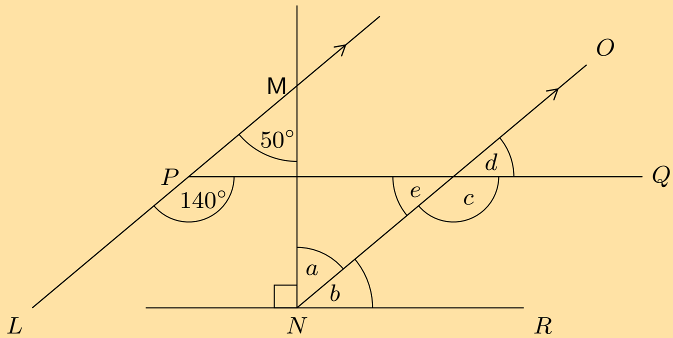
Oplossing:

Om $EF \parallel CG$ te bewys, moet ons toon dat die volgende waar is:

- $\hat{s} = \hat{p}$ (ooreenk $\angle$e)
- $\hat{s} = \hat{y}$ (verw. binne$\angle$e)
- $\hat{s} + \hat{r} = 180°$ (ko-binne $\angle$e)

Maar $\hat{s} \neq \hat{p}$, gevolglik is EF nie ewewydig om CG nie.

5. Gegee die diagram hieronder:



a) Vind elk van die onbekende hoeke gemerk in die figuur hieronder. Vind 'n rede wat tot die antwoord sal lei in een enkele stap.

Oplossing:

$\hat{a}$ en $L\hat{M}N$ is verwisselende binnehoeke op 'n snylyn MN. $LM \parallel NO$, dus moet hulle moet ewe groot wees.

Dus $\hat{a} = 50°$.

Ons het nou net gevind dat $\hat{a} = 50°$. $\hat{a} + \hat{b} + 90° = 180°$ ($\angle$e op reguit lyn)

$$\begin{aligned} \hat{b} &= 90° - 50° \\ &= 40° \end{aligned}$$

$\angle L\hat{P}Q$ en $\hat{c}$ is ooreenstemmende hoeke ($LM \parallel NO$).

Dus: $\hat{c} = 140°$.

$\hat{c} + \hat{e} = 180°$ ($\angle$e op reguit lyn)

$$\begin{aligned} \hat{e} &= 180° - 140° \\ &= 40° \end{aligned}$$

$\hat{d} = \hat{e}$ (regoorst $\angle$e).

Dus: $\hat{d} = 40°$.

b) Gebaseer op die resultate vir die hoeke hierbo, is $PQ \parallel NR$?

Oplossing:

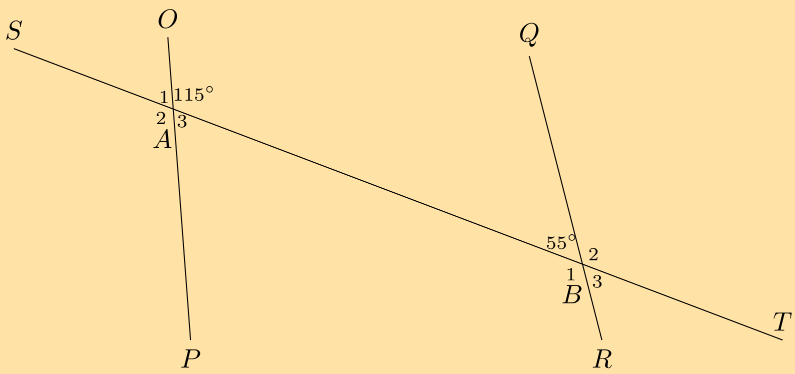
Om $PQ \parallel NR$ te bewys, moet ons toon dat die volgende waar is:

- $\hat{b} = \hat{d}$ (ooreenk $\angle$e)
- $\hat{b} = \hat{e}$ (verw $\angle$e)
- $\hat{b} + \hat{c} = 180°$ (ko-binne $\angle$e)

$\hat{b} = \hat{d}$ (ooreenk $\angle$e), dus $PQ \parallel NR$. Ons let ook op dat $\hat{b} = \hat{e}$ en $\hat{b} + \hat{c} = 180°$.

6. Bepaal of die pare lyne in die volgende figure ewewydig is:

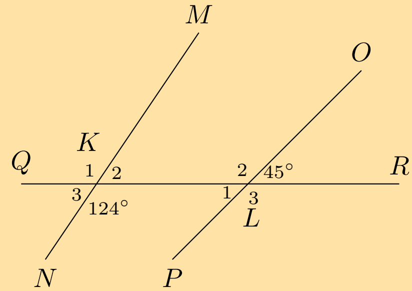
a)



Oplossing:

As $OP \parallel QR$ dan $O\hat{A}B + Q\hat{B}A = 180°$ (ko-binne $\angle$e). Maar $O\hat{A}B + Q\hat{B}A = 115° + 55° = 170°$. Dus daar is geen ewewydige lyne nie, OP is nie ewewydig aan QR nie. Let op dat ons nie ST oorweeg nie aangesien dit die snylyn is.

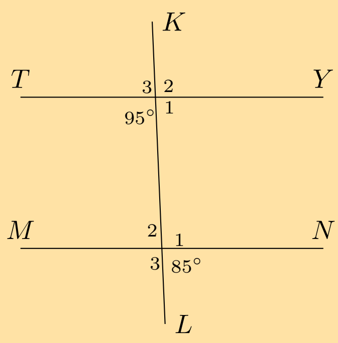
b)



Oplossing:

$K_2 = 180° - 124° = 56°$ ($\angle$e op reguit lyn). As $MN \parallel OP$ dan sal $\hat{K}_2$ gelyk wees aan $\hat{L}$, $\therefore$ MN is nie ewewydig aan OP. Let op dat QR 'n snylyn is.

c)



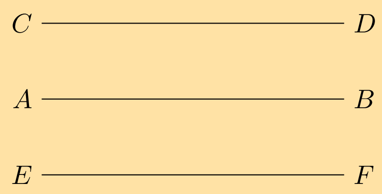
Oplossing:

Laat U die snypunt wees van lyne KL en TY en laat V die snypunt wees van KL en MN.

$$
\begin{aligned}
\hat{U}_4 &= 95° \\
\hat{U}_1 &= 180° - 95° \qquad (\angle\text{e op reguit lyn}) \\
\hat{U}_1 &= 85° \\
\hat{V}_4 &= 85° \qquad (\text{gegee}) \\
\therefore \hat{V}_4 &= \hat{U}_1
\end{aligned}
$$

Hierdie is ooreenstemmende hoeke $\therefore TY \parallel MN$.

7. As AB ewewydig is aan CD en AB ewewydig is aan EF, verduidelik waarom CD ewewydig moet wees aan EF.



Oplossing:
As $a = 2$ en $b = a$ dan weet ons dat $b = 2$.
Soortgelyk, as $AB \parallel CD$ en $EF \parallel AB$ dan weet ons dat $EF \parallel CD$.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JSQ 2. 2JSR 3. 2JSS 4. 2JST 5. 2JSV 6a. 2JSW
6b. 2JSX 6c. 2JSY 7. 2JSZ

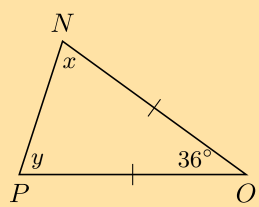
www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

7.2 Driehoeke

Exercise 7 – 2:

1. Bereken die onbekende veranderlikes in elk van die volgende figure.

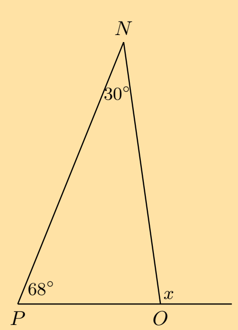
a)



Oplossing:
Die driehoek is gelykbenig en dus $x = y$ ($\angle$e tenoor gelyke sye).

$$
\begin{aligned}
180° &= 36° - 2x \qquad (\angle\text{e van } \triangle) \\
2x &= 144° \\
\therefore x &= 72° = y
\end{aligned}
$$

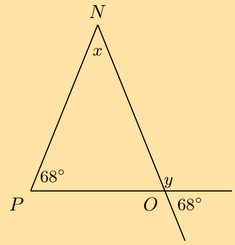
b)



Oplossing:
x is 'n buitehoek, dus $P\hat{N}O + O\hat{P}N = x$ (buite $\angle$ van $\triangle$).

$$\begin{aligned} x &= 30° + 68° \\ &= 98° \end{aligned}$$

c)

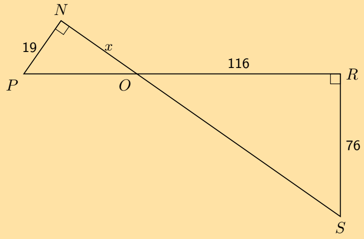


Oplossing:
Vind eers y. $y + 68° = 180°$ ($\angle$ op reguitlyn). Dus $y = 112°$.
y is 'n buitehoek, dus $P\hat{N}O + O\hat{P}N = y$ (buite $\angle$ van $\triangle$).

$$\begin{aligned} 112° &= x + 68° \\ x &= 112° - 68° \\ &= 44° \end{aligned}$$

Dus $x = 44°$ en $y = 180°$.

d)



Oplossing:

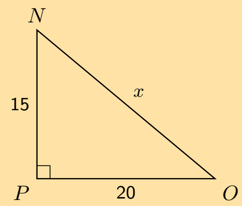
$$\begin{aligned} N\hat{P}O &= 180° - P\hat{N}O - N\hat{O}P \qquad (\angle\text{e van } \triangle) \\ &= 180° - 90° - N\hat{O}P \\ &= 90° - N\hat{O}P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\hat{S}O &= 180° - O\hat{R}S - R\hat{O}S \qquad (\angle\text{e van } \triangle) \\ &= 180° - 90° - R\hat{O}S \\ &= 90° - R\hat{O}S \end{aligned}$$

$N\hat{O}P = R\hat{O}S$ (regoorst $\angle$e).
$\therefore N\hat{P}O = R\hat{S}O$.
Dus $\triangle NPO$ en $\triangle ROS$ is gelykvormig omdat hulle dieselfde hoeke het.
Gelykvormige driehoeke het eweredige sye:

$$\begin{aligned} \therefore \frac{NP}{RS} &= \frac{NO}{OR} \\ \frac{19}{76} &= \frac{x}{116} \\ \therefore x &= 29 \end{aligned}$$

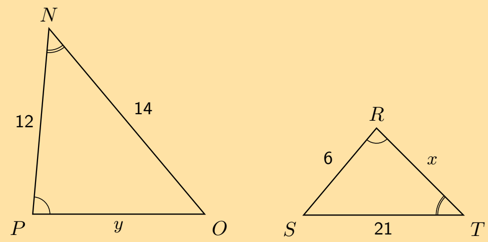
e)



Oplossing:
Van die stelling van Pythagoras het ons:

$$\begin{aligned} x^2 &= 15^2 + 20^2 \\ \therefore x &= \sqrt{625} \\ &= 25 \end{aligned}$$

f)



Oplossing:
Ons let op dat:

$$\begin{aligned} N\hat{P}O &= S\hat{R}T && \text{(gegee)} \\ P\hat{N}O &= R\hat{T}S && \text{(gegee)} \\ \therefore P\hat{N}O &= R\hat{T}S && (\angle\text{e van } \triangle) \\ \therefore \triangle NPO &\ ||| \ \triangle TSR && \text{(HHH)} \end{aligned}$$

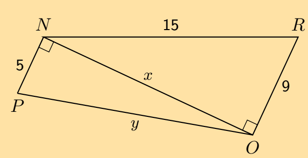
Nou kan ons die feit gebruik dat die sye in verhouding is, om x en y te vind:

$$\begin{aligned} \frac{NO}{OP} &= \frac{TS}{TR} \\ \frac{14}{12} &= \frac{21}{x} \\ x &= \frac{21 \times 12}{14} \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{OP}{NP} &= \frac{SR}{TR} \\ \frac{y}{12} &= \frac{6}{18} \\ 18y &= 72 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Dus $x = 18$ en $y = 4$.

g)



Oplossing:

Van die stelling van Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 15^2 - 9^2 \\
x &= \sqrt{144} \\
&= 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y^2 &= x^2 + 5^2 \\
y^2 &= 144 + 25 \\
y &= \sqrt{169} \\
y &= 13
\end{aligned}
$$

Dus $x = 12$ en $y = 13$.

2. Gegee die volgende diagramme:
Diagram A

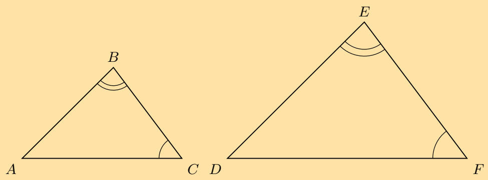
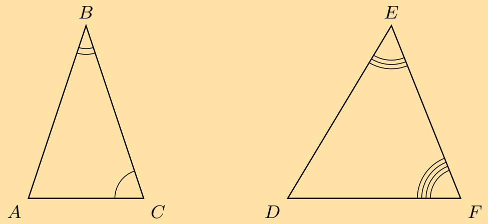


Diagram B



Watter diagram gee 'n paar driehoeke wat gelykvormig is?
Oplossing:
Diagram A toon 'n paar driehoeke met alle pare ooreenstemmende hoeke gelyk (dieselfde drie hoekmerkers is gebruik in beide driehoeke). Diagram B toon 'n paar driehoeke met verskillende hoeke in elke driehoek. Al ses hoeke is verskillend en daar is geen pare ooreenstemmende hoeke wat gelyk is nie.
Dus gee diagram A 'n paar driehoeke wat gelykvormig is.

3. Gegee die volgende diagramme:
Diagram A

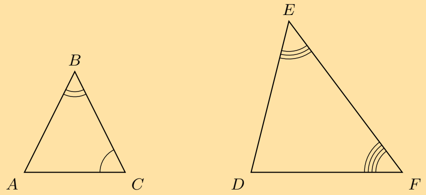
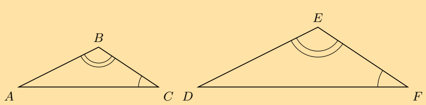


Diagram B



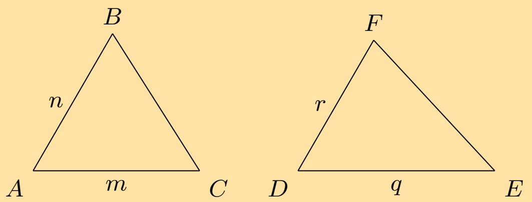
Watter diagram gee ’n paar driehoeke wat gelykvormig is?

Oplossing:

Diagram A toon ’n paar driehoeke met verskillende hoeke in elke driehoek. Al ses hoeke is verskillend en daar is geen pare ooreenstemmende hoeke wat gelyk is nie. Diagram B toon ’n paar driehoeke met alle pare ooreenstemmende hoeke gelyk (dieselfde twee hoekmerkers is gebruik in beide driehoeke en die derde hoek is dieselfde in elke driehoek).

Dus gee diagram B ’n paar driehoeke wat gelykvormig is.

4. Beskou die volgende driehoeke, wat op skaal geteken is:

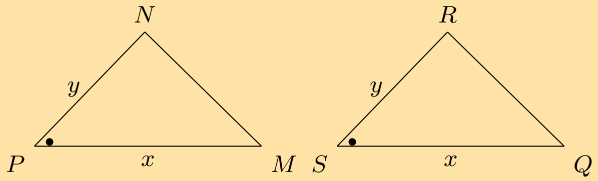


Is die twee driehoeke kongruent? Indien wel, gee die rede en gebruik die korrekte notasie om kongruensie aan te dui.

Oplossing:

Dit word nie vir ons gesê of $n = r$ en $m = q$ of $n = q$ en $m = r$, dus kan ons nie sê dat die sye ewe lank is nie. Ons het ook geen inligting oor die hoeke van die twee driehoeke nie. Dus kan ons nie sê of die twee driehoeke kongruent is nie.

5. Beskou die volgende driehoeke, wat op skaal geteken is:



Is die twee driehoeke kongruent? Indien wel, gee die rede en gebruik die korrekte notasie om kongruensie aan te dui.

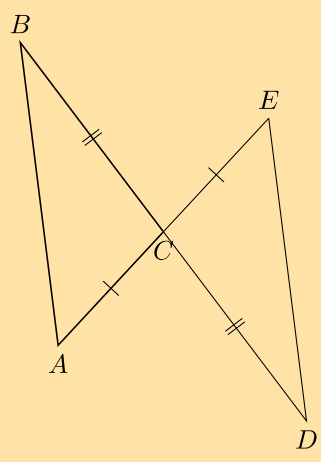
Oplossing:

Let op dat die twee paar sye gelyk is, soos aangedui deur x en y. Die hoeke tussen daardie twee sye is ook gemerk as ewe groot (dit is die ingeslote hoek) .

Dus is hierdie twee driehoeke kongruent, rede: SHS.

6. Meld of die volgende pare driehoeke kongruent is of nie. Gee redes vir jou antwoorde. As daar nie genoeg inligting is om ’n besluit te neem nie, verduidelik hoekom.

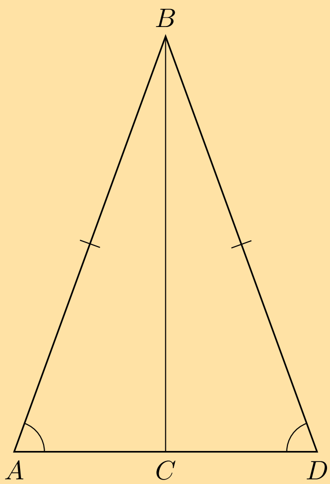
a)



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
AC &= CE && \text{(gegee)}\\
BC &= CD && \text{(gegee)}\\
A\hat{C}B &= D\hat{C}E && \text{(regoorst. } \angle\text{e)}\\
\therefore \triangle ABC &\equiv \triangle EDC && \text{SHS}
\end{aligned}
$$

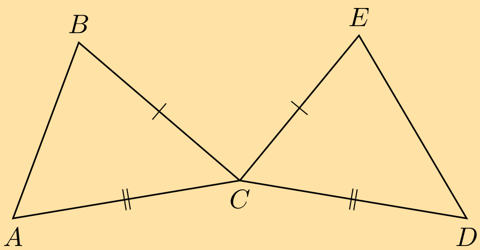
b)



Oplossing:

Ons het twee sye gelyk ($AB = BD$ en BC is gemeenskaplik aan beide driehoeke) en een hoek gelyk ($\hat{A} = \hat{D}$) maar die sye sluit nie die bekende hoek in nie. Die driehoeke het dus nie SHS nie en is dus nie kongruent. (Nota: $A\hat{C}B$ is nie noodwendig gelyk aan $D\hat{C}B$ nie omdat dit nie gegee is dat $BC \perp AD$).

c)

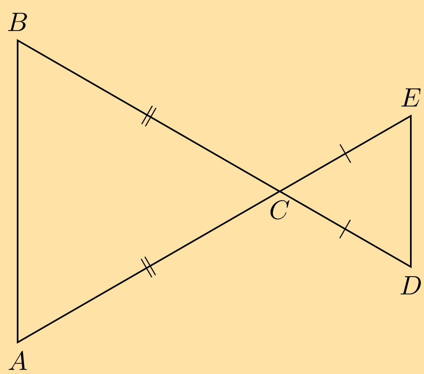


Oplossing:

Daar word nie genoeg inligting gegee nie. Ons het ten minste drie feite nodig oor die driehoeke en in hierdie voorbeeld het ons net twee sye in elke driehoek.

Let op dat BCD en ECA nie reguitlyne is nie en dus kan ons nie regoorstaande hoeke gebruik nie.

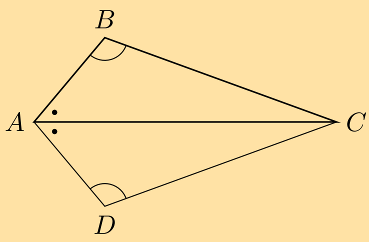
d)



Oplossing:

Daar word nie genoeg inligting gegee nie. Alhoewel ons kan uitwerk watter hoeke ewe groot is, word daar nie aangedui dat enige sye gelyk is nie. Al wat ons weet, is dat ons twee gelykbenige driehoeke het. Let op dat hierdie vraag verskil van deel a). In deel a) het ons gesien daar is gelyke sye in beide driehoeke, terwyl ons in hierdie vraag slegs gegee word dat sye in dieselfde driehoek gelyk is.

e)



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
AC &= AC && \text{(gemene sy)}\\
B\hat{A}C &= D\hat{A}C && \text{(gegee)}\\
A\hat{B}C &= A\hat{D}C && \text{(gegee)}\\
\therefore \triangle ABC &\equiv \triangle ADC && \text{HHS}
\end{aligned}
$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JT7 1b. 2JT8 1c. 2JT9 1d. 2JTB 1e. 2JTC 1f. 2JTD
1g. 2JTF 2. 2JTG 3. 2JTH 4. 2JTJ 5. 2JTK 6a. 2JTM
6b. 2JTN 6c. 2JTP 6d. 2JTQ 6e. 2JTR

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

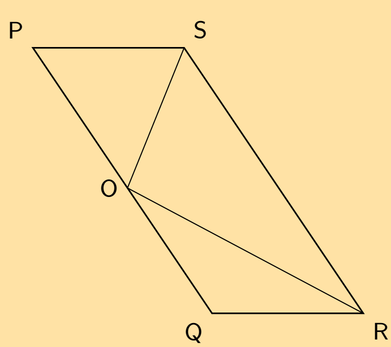
7.3 Vierhoeke

Mathopenref het nuttige simulasies oor verskillende tipes vierhoeke. Kliek op enige van genoemde vierhoeke om na die spesifieke bladsy oor daardie vierhoek te gaan.

Parallelogram

Exercise 7 – 3:

1. $PQRS$ is 'n parallelogram. $PS = OS$ en $QO = QR$. $S\hat{O}R = 96°$ en $Q\hat{O}R = x$.



a) Vind, met redes, twee ander hoeke gelyk aan x.
Oplossing:
$S\hat{R}O = Q\hat{O}R = x$ (verw $\angle$e; $SR \parallel OQ$).
$O\hat{R}Q = Q\hat{O}R = x$ ($\angle$e tenoor gelyke sye).
Dus $S\hat{R}O$ en $O\hat{R}Q$ is beide gelyk aan x.

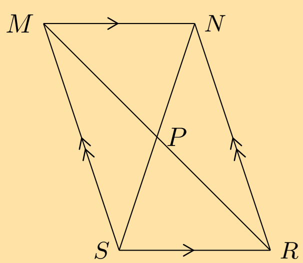
b) Skryf $\hat{P}$ in terme van x.
Oplossing:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= Q\hat{R}S \qquad (\text{ teenorst } \angle\text{e van parm}) \\ &= S\hat{R}O + O\hat{R}Q \\ \therefore \hat{P} &= 2x \end{aligned}$$

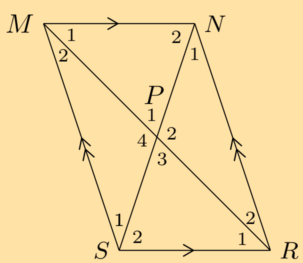
c) Bereken die waarde van x.
Oplossing:

$$\begin{aligned} S\hat{O}R &= 96^\circ \qquad (\text{gegee}) \\ S\hat{O}P &= \hat{P} \qquad (\angle\text{e tenoor gelyke sye}) \\ 180^\circ &= \hat{P} + 96^\circ + Q\hat{O}R \qquad (\angle\text{e op reguitlyn}) \\ 84^\circ &= 2x + x \\ 3x &= 84^\circ \\ \therefore x &= 28^\circ \end{aligned}$$

2. Bewys dat die hoeklyne van parallelogram $MNRS$ mekaar halveer by P.



Wenk: Gebruik kongruensie.
Oplossing:
Nommer eers elke hoek op die gegewe diagram:



In $\triangle MNP$ en $\triangle RSP$:

$$\begin{aligned} \hat{M}_1 &= \hat{R}_1 \quad (\text{verw } \angle\text{e; } MN \parallel SR) \\ \hat{P}_1 &= \hat{P}_3 \quad (\text{regoorst. } \angle\text{e}) \\ MN &= RS \text{ (teenoorst. sye van parm)} \end{aligned}$$

Dus $\triangle MNP \equiv \triangle RSP$ (HHS).
Nou weet ons dat $MP = RP$ en dus is P die middelpunt van MR.
Soortgelyk, in $\triangle MSP$ en $\triangle RNP$:

$$\begin{aligned} \hat{M}_2 &= \hat{R}_2 \quad \text{(verw } \angle\text{e; } MS \parallel NR) \\ \hat{P}_4 &= \hat{P}_2 \quad \text{(regoorst. } \angle\text{e)} \\ MS &= RN \text{ (teenoorst. sye van parm)} \end{aligned}$$

Dus $\triangle MSP \equiv \triangle RNP$ (HHS).
Nou weet ons dat $NP = SP$ en dus is P die middelpunt van NS.
Dus, die hoeklyne van 'n parallelogram halveer mekaar.

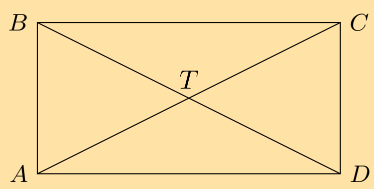
Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2JTS 2. 2JTT

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Reghoek

Exercise 7 – 4:

1. $ABCD$ is vierhoek. Hoeklyne AC en BD sny by T. $AC = BD$, $AT = TC$, $DT = TB$. Bewys dat:



   a) $ABCD$ 'n parallelogram is
   Oplossing:
   $AT = TC$ (gegee)
   $\therefore DB$ halveer AC by T
   en $DT = TB$ (gegee)
   $\therefore AC$ halveer DB by T
   dus is vierhoek $ABCD$ 'n parallelogram (hoeklyne halveer)
   b) $ABCD$ 'n reghoek is
   Oplossing:
   $AC = BD$ (gegee).
   Dus $ABCD$ is 'n reghoek (hoeklyne van reghoek).

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2JTV

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Rombus of ruit

Vierkant

Trapesium

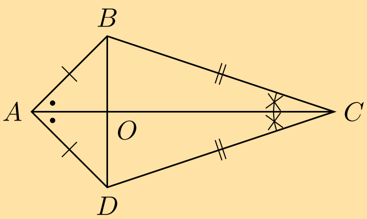
In Britse Engels word die woord trapesium gebruik om ’n vierhoek aan te dui met een paar teenoorstaande sye ewewydig, terwyl in Amerikaanse Engels is ’n trapesium ’n vierhoek met geen pare teenoorstaande sye ewewydig nie. Ons sal die Britse Engelse definisie gebruik in hierdie boek.

In Britse Engels word die woord trapesoïde gebruik om ’n vierhoek aan te dui met nie een paar teenoorstaande sye ewewydig nie terwyl in Amerikaanse Engels is ’n trapesoïde ’n vierhoek met een paar teenoorstaande sye ewewydig.

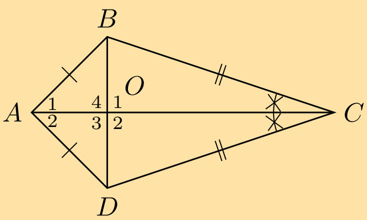
Vlieër

Exercise 7 – 5:

1. Gebruik die skets van vierhoek $ABCD$ om te bewys die hoeklyne van ’n vlieër is loodreg op mekaar.



Oplossing:
Benoem eers die hoeke



In $\triangle ADO$ en $\triangle ABO$:

$$\begin{aligned} AD &= AB && \text{(gegee)} \\ AO & && \text{(gemene sy)} \\ B\hat{A}O &= D\hat{A}O && \text{(gegee)} \\ \therefore \triangle ADO &\equiv \triangle ABO && \text{(SHS)} \\ \therefore A\hat{B}O &= A\hat{D}O && \end{aligned}$$

In $\triangle ADB$:

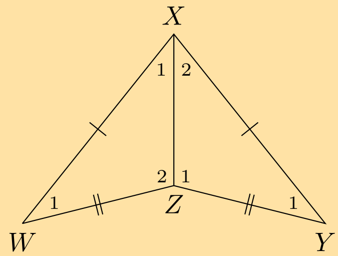
$$\begin{aligned} \text{laat } \hat{A}_1 = \hat{A}_2 &= t \\ \text{and let } A\hat{D}O = A\hat{B}O &= p \\ 2t + 2p &= 180^\circ \quad (\angle\text{e van } \triangle) \\ \therefore t + p &= 90^\circ \end{aligned}$$

Vervolgens let ons op dat:

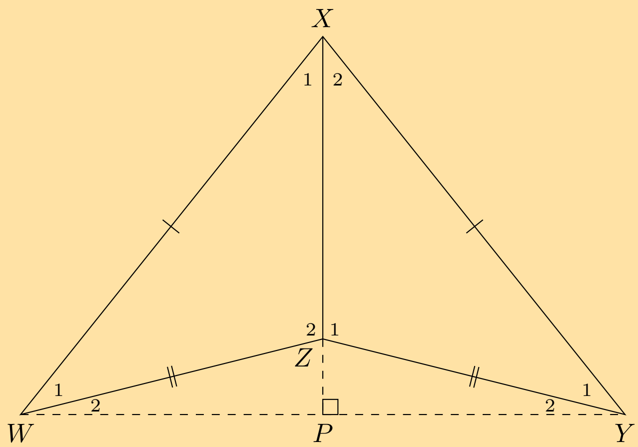
$$\begin{aligned} \hat{O}_1 &= A\hat{B}O + \hat{A}_1 \text{ (buite } \angle\text{e van } \triangle) \\ \hat{O}_1 &= p + t \\ &= 90^\circ \\ \therefore AC &\perp BD \end{aligned}$$

Dus is die hoeklyne van ’n vlieër loodreg op mekaar.

2. Verduidelik waarom vierhoek $WXYZ$ 'n vlieër is. Skryf al die eienskappe neer van vierhoek $WXYZ$.



Oplossing:



Vierhoek $WXYZ$ is 'n vlieër omdat dit twee pare aangrensende sye het wat ewe lank is.

- Hoeklyne tussen gelyke sye halveer die ander hoeklyn: $WP = PY$.
- Een paar tenoorstaande hoeke is gelyk: $\hat{W}_1 = \hat{Y}_1$.
- Hoeklyne tussen gelyke sye halveer die binnehoeke en is 'n as van simmetrie: $\hat{X}_1 = \hat{X}_2$.
- Hoeklyne sny mekaar loodreg ($90°$): $WY \perp PX$.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2JTW 2. 2JTX

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Exercise 7 – 6:

1. Die volgende vorm is **op skaal** geteken:

Gee die mees spesifieke naam vir die vorm.
Oplossing:
Ons begin deur die aantal sye te tel. Daar is vier sye in hierdie figuur en dit is 'n eenvoudige vierhoek of een van die spesiale tipes vierhoeke.

Vervolgens vra ons onsself af of daar enige ewewydige lyne in die figuur is. Jy kan na die figuur kyk om te sien of daar enige lyne is wat ewewydig lyk of 'n vinnige skets maak om te sien of enige pare teenoorstaande sye by 'n punt ontmoet.

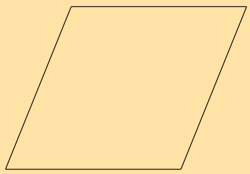
Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig. Dit beteken dat die figuur slegs een van die volgende kan wees: parallelogram, reghoek, ruit of vierkant.

Vervolgens vra ons onsself af of al die binnehoeke 90° groot is. Al die binnehoeke is 90° en dit moet dus 'n vierkant of 'n reghoek wees. Uiteindelik kontroleer ons of al die sye ewe lank is. In hierdie figuur is al die sye nie ewe lank nie en dus is dit 'n reghoek.

Dus is dit 'n reghoek.

Die vorm is ook 'n parallelogram en 'n vierhoek. Hierdie vraag vra egter vir die mees spesifieke naam vir die vorm.

2. Die volgende vorm is **op skaal** geteken:



Gee die mees spesifieke naam vir die vorm.

Oplossing:

Ons begin deur die aantal sye te tel. Daar is vier sye in hierdie figuur en dit is 'n eenvoudige vierhoek of een van die spesiale tipes vierhoeke.

Vervolgens vra ons onsself af of daar enige ewewydige lyne in die figuur is. Jy kan na die figuur kyk om te sien of daar enige lyne is wat ewewydig lyk of 'n vinnige skets maak om te sien of enige pare teenoorstaande sye by 'n punt ontmoet.

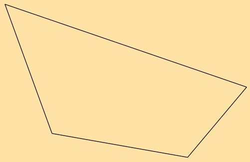
Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig. Dit beteken dat die figuur slegs een van die volgende kan wees: parallelogram, reghoek, ruit of vierkant.

Vervolgens vra ons onsself of af die binnehoeke 90° groot is. Al die binnehoeke is nie 90° nie en dus moet dit 'n parallelogram of 'n ruit wees. Uiteindelik kontroleer ons of al die sye ewe lank is. In hierdie figuur is die sye ewe lank en dus is dit 'n ruit.

Dus is dit 'n ruit of rombus.

Die vorm is ook 'n parallelogram en 'n vierhoek. Hierdie vraag vra egter vir die mees spesifieke naam vir die vorm.

3. Gebaseer op die vorm wat jy sien, maak 'n lys van al die name van die vorm. Die figuur is op skaal geteken.

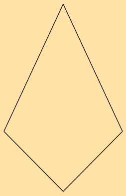


Oplossing:

Geen pare teenoorstaande sye is ewewydig nie. Dit beteken die figuur kan slegs 'n kombinasie wees van die volgende: trapesium, vlieër of 'n gewone vierhoek.

Die vorm is beslis 'n vierhoek omdat dit vier sye het. Dit het nie enige spesiale eienskappe nie: dit het nie ewewydige sye, of regte hoeke, of ewe lang sye nie. Dit is dus slegs 'n vierhoek.

4. Gebaseer op die vorm wat jy sien, maak 'n lys van al die name van die vorm. Die figuur is op skaal geteken.



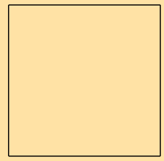
Oplossing:

Geen pare teenoorstaande sye is ewewydig nie. Dit beteken die figuur kan slegs 'n kombinasie wees van die volgende: trapesium, vlieër of 'n gewone vierhoek.

Die vorm is beslis 'n vierhoek omdat dit vier sye het. Dit is ook 'n vlieër want dit het twee pare ewe lang aangrensende sye. Dit kan nie nie 'n vierkant of 'n reghoek wees nie want dit het nie regte hoeke nie. Dit kan nie 'n parallelogram of 'n trapesium wees nie want dit het geen ewewydige sye nie. Dit is nie 'n ruit nie want die vier sye is nie almal ewe lank nie.

Dus is die korrekte antwoord: vlieër en vierhoek.

5. Gebaseer op die vorm wat jy sien, maak 'n lys van al die name van die vorm. Die figuur is op skaal geteken.



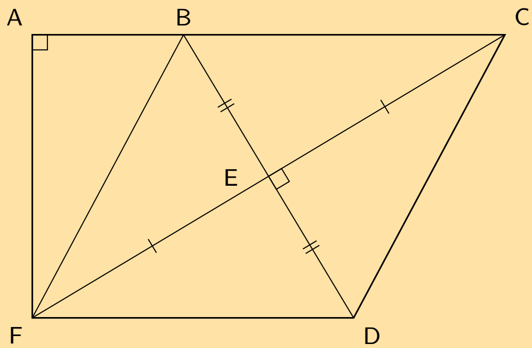
Oplossing:

Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig. Dit beteken dat hierdie vorm kan behoort aan een of meer van hierdie groepe: vierkant, ruit, reghoek of parallelogram.

Die gegewe vorm is 'n vierkant, maar, dit is ook 'n reghoek. 'n Vierkant is ook 'n parallelogram, omdat dit ewewydige sye het; dit is ook 'n ruit, wat toevallig ook regte hoeke het. 'n Vierkant is ook 'n ruit, 'n trapesium en, natuurlik, 'n vierhoek.

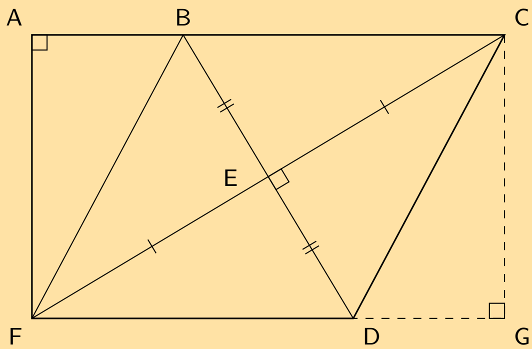
Dus is die korrekte antwoord: vierkant, reghoek, ruit, parallelogram, vlieër, trapesium en vierhoek.

6. Vind die oppervlakte van $ACDF$ as $AB = 8,\ BF = 17,\ FE = EC,\ BE = ED,\ \hat{A} = 90°,\ C\hat{E}D = 90°$



Oplossing:

Konstrueer G sodat $AC = FG$



$BCDF$ is 'n ruit (hoeklyne halveer reghoekig)

Aangesien $BCDF$ 'n ruit is, is $BC = DF$. Ons konstrueer G sodat $AC = FG$. Dus $AB = DG$.

In $\triangle ABF$ en $\triangle CGD$:

$$B\hat{A}F = C\hat{G}D = 90° \quad \text{(gegee en deur konstruksie)}$$
$$AB = DG \quad \text{(deur konstruksie)}$$
$$BF = CD \quad (BCDF \text{ is 'n ruit})$$

Dus $ABF \equiv CGD$ (90°SkS)

Gevolglik: $AF = CG$ en dus is $ACGF$ 'n reghoek (beide pare teenoorstaande sye is ewe lank en alle binnehoeke is 90°).

Ons weet hoe lank AB en BF is. Aangesien $\triangle ABF$ reghoekig is, kan ons die stelling van Pythagoras gebruik om die lengte van AF te vind:

$$\begin{aligned} BF^2 &= AB^2 + AF^2 \\ (17)^2 &= (8)^2 + AF^2 \\ AF^2 &= 225 \\ AF &= 15 \end{aligned}$$

Ons weet ook dat $FD = BF = 17$ en dus $AC = 17 + 8 = 25$.

Dus die oppervlakte van die reghoek $ACGF$ is:

$$\begin{aligned} A_{\text{reghoek}} &= l \times b \\ &= (25)(15) \\ &= 375 \end{aligned}$$

Ons is amper daar. Ons moet nou die oppervlakte van driehoek CDG bereken en dan hierdie oppervlakte aftrek van die oppervlakte van die reghoek om die oppervlakte te kry van $ACDF$.

Die oppervlakte van driehoek CDG is:

$$\begin{aligned} A_{\text{driehoek}} &= \frac{1}{2} DG \times CG \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 15 \\ &= 60 \end{aligned}$$

Dus is die oppervlakte van $ACDF$ gelyk aan $375 - 60 = 315$ vierkante eenhede.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

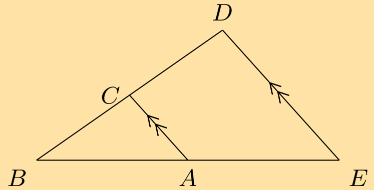
1. 2JTZ 2. 2JV2 3. 2JV3 4. 2JV4 5. 2JV5 6. 2JV6

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

7.4 Die middelpuntstelling

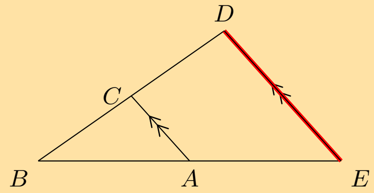
Exercise 7 – 7:

1. Punte C en A is die middelpunte van lyne BD en BE. Bestudeer $\triangle EDB$ noukeurig. Identifiseer die derde sy van hierdie driehoek, gebruik die inligting soos gegee, tesame met dit wat jy weet van die middelpuntstelling. Benoem die derde sy volgens sy eindpunte, bv. FG.



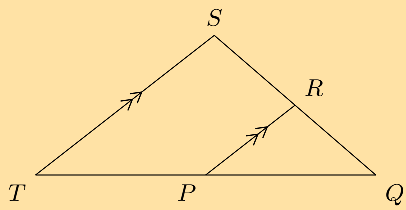
Oplossing:

Die rooi lyn, ED of DE, dui die derde sy van die driehoek aan. Volgens die middelpuntstelling sal die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, ewewydig wees aan die derde sy van die driehoek.



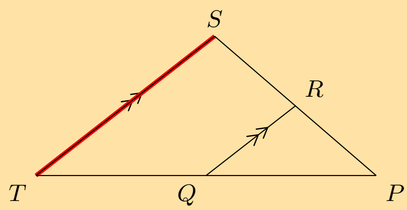
Die derde sy is: ED of DE.

2. Punte R en P is die middelpunte van lyne QS en QT. Bestudeer $\triangle TSQ$ noukeurig. Identifiseer die derde sy van hierdie driehoek, gebruik die inligting soos gegee, tesame met dit wat jy weet van die middelpuntstelling. Benoem die derde sy volgens sy eindpunte, bv. FG.



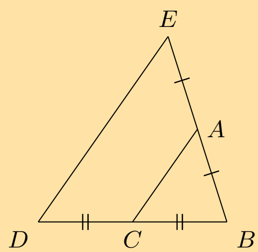
Oplossing:

Die rooi lyn, TS of ST, dui die derde sy van die driehoek aan. Volgens die middelpuntstelling sal die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, ewewydig wees aan die derde sy van die driehoek.



Die derde sy is: TS of ST.

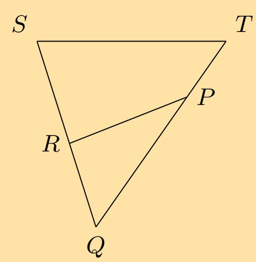
3. Punte C en A op die lyne BD en BE word gegee. Bestudeer die driehoek noukeurig, identifiseer en benoem die ewewydige lyne.



Oplossing:

Die lyne AC en ED is ewewydig volgens die middelpuntstelling, omdat AC die lyne EB en DB halveer.

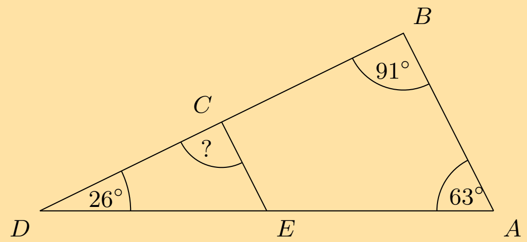
4. Punte R en P op die lyne QS en QT word gegee. Bestudeer die driehoek noukeurig, identifiseer en benoem die ewewydige lyne.



Oplossing:

Die lyne TS en PR is nie ewewydig volgens die middelpuntstelling nie, omdat lyn PR nie TQ en SQ halveer nie. Dus is daar geen ewewydige lyne in die driehoek nie.

5. Die figuur toon 'n groot driehoek met hoekpunte A, B en D, en 'n kleiner driehoek met hoekpunte by C, D en E. Punt C is die middelpunt van BD en punt E is die middelpunt van AD.



a) Drie hoeke word gegee: $\hat{A} = 63°$, $\hat{B} = 91°$ en $\hat{D} = 26°$; bepaal die waarde van $D\hat{C}E$.

Oplossing:

$$AB \parallel EC \qquad \text{(Midpt.-stelling)}$$
$$\therefore D\hat{C}E = \hat{B} \qquad \text{(ooreenk } \angle\text{e; } AB \parallel EC\text{)}$$
$$D\hat{C}E = 91°$$

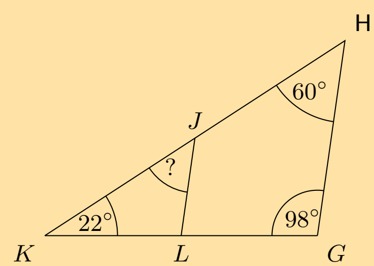
b) Die twee driehoeke in hierdie vraag is gelykvormige driehoeke. Voltooi die volgende stelling korrek deur die drie hoekpunte in die regte volgorde te skryf (daar is slegs een korrekte antwoord).

$\triangle DEC \; ||| \; \triangle ?$

Oplossing:

Hoek D is gelyk aan hoek D; hoek E is gelyk aan hoek A; en hoek C is gelyk aan hoek B. Dus, $\triangle DEC \; ||| \; \triangle DAB$.

6. Die figuur toon 'n groot driehoek met hoekpunte G, H en K, en 'n kleiner driehoek met hoekpunte by J, K en L. Punt J is die middelpunt van HK en punt L is die middelpunt van GK.



a) Drie hoeke word gegee: $\hat{G} = 98°$, $\hat{H} = 60°$, en $\hat{K} = 22°$; bepaal die waarde van $K\hat{J}L$.

Oplossing:

$$GH \parallel LJ \qquad \text{(Midpt.-stelling)}$$
$$\therefore K\hat{J}L = \hat{H} \qquad \text{(ooreenk } \angle\text{e; } GH \parallel LJ\text{)}$$
$$K\hat{J}L = 60°$$

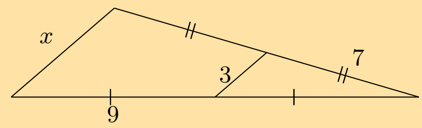
b) Die twee driehoeke in hierdie vraag is gelykvormige driehoeke. Voltooi die volgende stelling korrek deur die drie hoekpunte in die regte volgorde te skryf (daar is slegs een korrekte antwoord).

$\triangle HKG \; ||| \; \triangle ?$

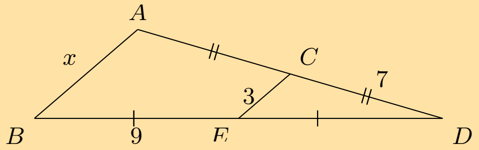
Oplossing:

Hoek H is gelyk aan J; hoek K is gelyk aan K ; en hoek G is gelyk aan L. Dus, $\triangle HKG \; ||| \; \triangle JKL$.

7. Beskou die driehoek in die diagram hieronder. Daar loop 'n lyn deur die groot driehoek. Let op dat sommige lyne in die figuur gelyk aan mekaar gemerk is. Een sy van die driehoek het 'n lengte van 3.



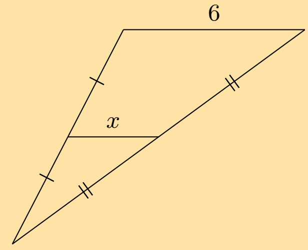
Bepaal die waarde van x.
Oplossing:



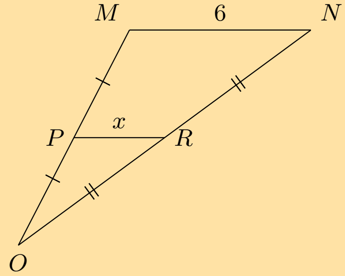
Van die middelpuntstelling weet ons:

$$\begin{aligned} AB &= 2 \times CE \\ x &= 2(3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

8. Beskou die driehoek in die diagram hieronder. 'n Snylyn loop deur die groot driehoek. Let op dat sommige lyne in die figuur gelyk aan mekaar gemerk is. Een sy van die driehoek is 6 eenhede lank.



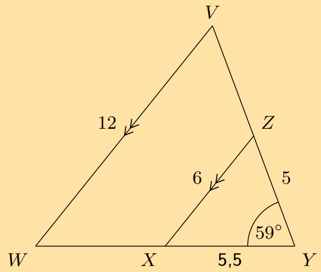
Bepaal die waarde van x.
Oplossing:



Van die middelpuntstelling weet ons:

$$\begin{aligned} MN &= 2 \times PR \\ (6) &= 2x \\ \frac{1}{2}(6) &= x \\ 3 &= x \end{aligned}$$

9. In die figuur hieronder, $VW \parallel ZX$, soos benoem. Verder word die volgende lengtes en hoekgroottes gegee: $VW = 12$; $ZX = 6$; $XY = 5{,}5$; $YZ = 5$ en $\hat{V} = 59°$. Die figuur is op skaal geteken.



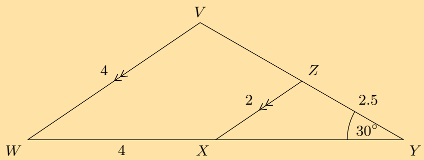
Bepaal die lengte van WY.

Oplossing:

X is die middelpunt van WY en Z is die middelpunt van VY ($VW \parallel ZX$, dit word ook gegee dat $XZ = \frac{1}{2}VW$).

$$\begin{aligned} WY &= 2 \times XY && \text{definisie van middelpt} \\ &= 2(5{,}5) \\ &= 11 \end{aligned}$$

10. In die figuur hieronder, $VW \parallel ZX$, soos benoem. Verder word die volgende lengtes en hoekgroottes gegee: $VW = 4$; $ZX = 2$; $WX = 4$; $YZ = 3{,}5$ en $\hat{Y} = 30°$. Die figuur is op skaal geteken.



Bepaal die lengte van XY.

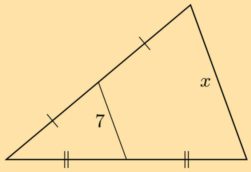
Oplossing:

X is die middelpunt van WY en Z is die middelpunt van VY ($VW \parallel ZX$, dit word ook gegee dat $XZ = \frac{1}{2}VW$).

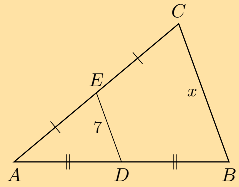
$$\begin{aligned} XY &= WX && \text{definisie van middelpt} \\ &= 4 \end{aligned}$$

11. Vind x en y in die volgende:

a)



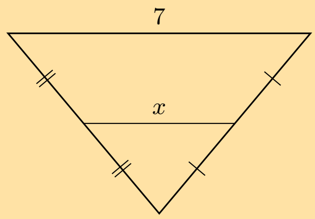
Oplossing:



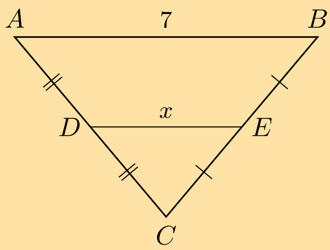
Van die middelpuntstelling weet ons:

$$\begin{aligned} BC &= 2 \times DE \\ x &= 2(7) \\ &= 14 \end{aligned}$$

b)



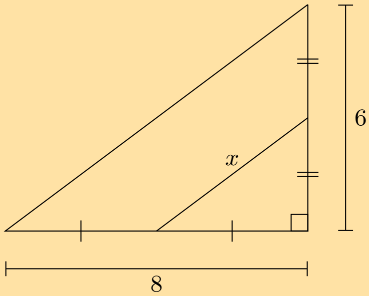
Oplossing:



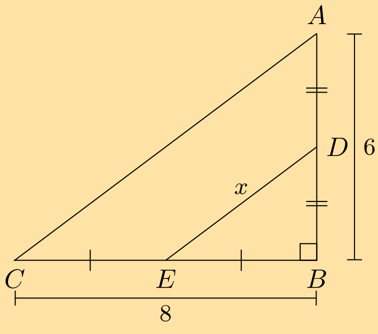
Van die middelpuntstelling weet ons:

$$\begin{aligned} AB &= 2 \times DE \\ 7 &= 2x \\ 3{,}5 &= x \end{aligned}$$

c)



Oplossing:



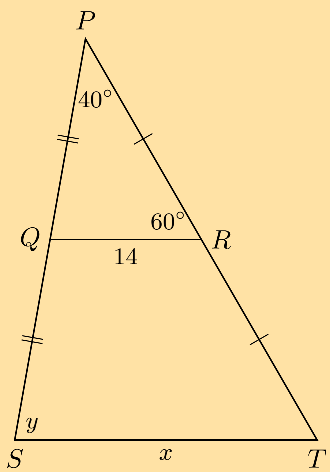
Ons kan die stelling van Pythagoras gebruik om AC te vind :

$$\begin{aligned}
AC^2 &= BC^2 + AB^2 \\
&= (8)^2 + (6)^2 \\
&= 64 + 36 \\
&= 100 \\
AC &= 10
\end{aligned}$$

Van die middelpuntstelling weet ons:

$$\begin{aligned}
AC &= 2 \times DE \\
10 &= 2x \\
5 &= x
\end{aligned}$$

d)



Oplossing:
Van die middelpuntstelling weet ons:

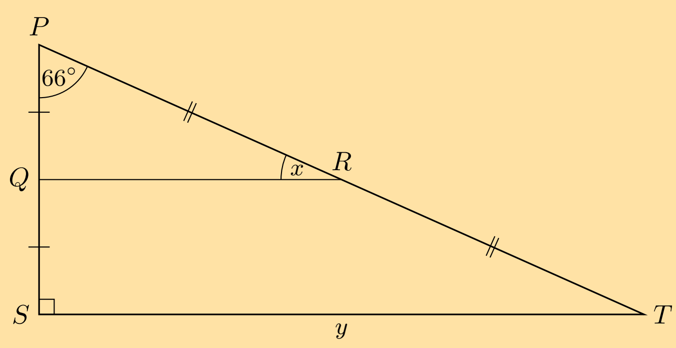
$$\begin{aligned}
ST &= 2 \times QR \\
x &= 2(14) \\
&= 28
\end{aligned}$$

Om y te vind, let ons die volgende op:

- $P\hat{Q}R = 180° - 60° - 40° = 100°$ ($\angle$e van $\triangle$).
- Van die middelpuntstelling weet ons dat $QR \parallel ST$.

Dus $y = 100°$ (ooreenk $\angle$e; $QR \parallel ST$).
Die finale antwoord is: $x = 28$ eenhede en $y = 100°$.

e) In die volgende diagram is $PQ = 2{,}5$ en $RT = 6{,}5$.



Oplossing:

Van die middelpuntstelling weet ons dat $QR \parallel ST$. Dus $P\hat{Q}R = P\hat{S}T = 90°$ (ooreenk $\angle$e; $QR \parallel ST$).

Dus $x = 180° - 90° - 66° = 24°$ ($\angle$e van $\triangle$).

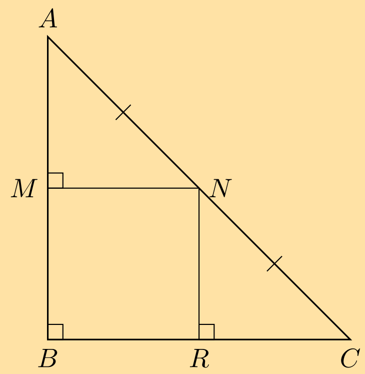
Om y te vind, let ons op dat $PQ + QS = PS$ en $PQ = QS$, dus $PS = 2PQ$. Net so: $PT = 2RT$.

Ons kan die stelling van Pythagoras gebruik om ST te vind:

$$\begin{aligned} ST^2 &= PS^2 + PT^2 \\ &= 2PQ + 2RT \\ &= (2(2{,}5))^2 + (2(6{,}5))^2 \\ &= 25 + 169 \\ &= 194 \\ ST &= 13{,}93 \end{aligned}$$

Dus: $x = 24°$ en $y = 13{,}93$.

12. Toon dat M die middelpunt is van AB en dat $MN = RC$.



Oplossing:

Ons word gegee dat $AN = NC$.

Ons weet ook dat $\hat{B} = \hat{M} = 90°$, dus $MN \parallel BR$ ($\hat{B}$ en $\hat{M}$ is gelyk, ooreenstemmende hoeke)

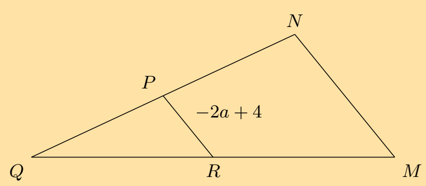
Dus M is die middelpunt van AB (omgekeerde van middelpuntstelling).

Soortgelyk kan ons toon dat R die middelpunt is van BC.

Ons weet ook dat $MN = BR$ ($MB \parallel NR$ en ewewydige lyne is 'n konstante afstand van mekaar af).

Maar $BR = RC$ (R is die middelpunt van BC), dus $MN = RC$.

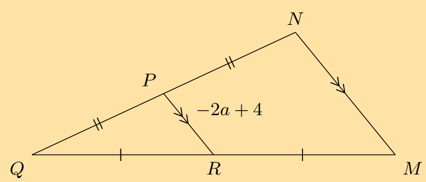
13. In die diagram hieronder is P die middelpunt van NQ en R is die middelpunt van MQ. Die segment binne-in die groot driehoek word aangedui met 'n lengte van $-2a + 4$.



a) Bereken die waardes van MN in terme van a.

Oplossing:

Gebruik die middelpuntstelling om die ontbrekende inligting op die diagram in te vul:



Onthou dat die middelpuntstelling vir ons vertel dat die segmente MN en PR 'n verhouding het van $2:1$ (MN is tweemaal so lank as PR).

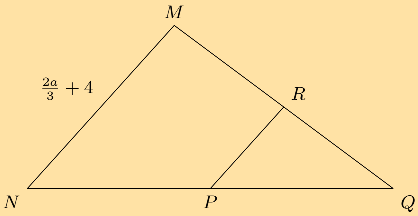
$$\begin{aligned} MN &= 2 \times PR \\ &= 2(-2a+4) \\ &= -4a+8 \end{aligned}$$

Die finale antwoord is $MN = -4a + 8$ (tweemaal so lank as PR).

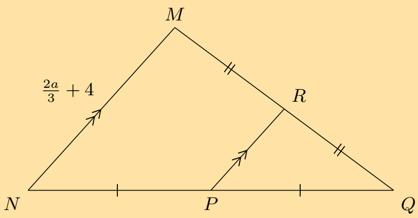
b) Dit word verder gegee dat MN 'n lengte het van 18. Wat is die waarde van a? Gee jou antwoord as 'n breuk.
Oplossing:

$$\begin{aligned} -4a+8 &= 18 \\ -4a &= 10 \\ \left(-\frac{1}{4}\right)(-4a) &= (10)\left(-\frac{1}{4}\right) \\ a &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

14. In die diagram hieronder, is P die middelpunt van NQ en R is die middelpunt van MQ. Een sy van die driehoek het 'n lengte van $\frac{2a}{3} + 4$.



a) Vind die waarde van PR in terme van a.
Oplossing:
Gebruik die middelpuntstelling om die ontbrekende inligting op die diagram in te vul:



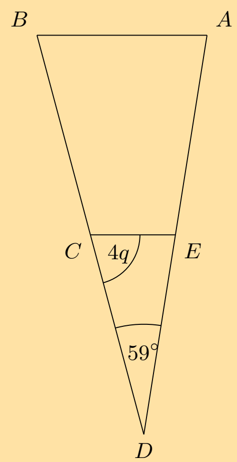
Onthou dat die middelpuntstelling vir ons vertel dat die segmente MN en PR 'n verhouding het van $2:1$ (MN is tweemaal so lank as PR).

$$\begin{aligned} MN &= 2 \times PR \\ \left(\frac{2a}{3}+4\right) &= 2(PR) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3}+4\right) &= PR \\ \frac{a}{3}+2 &= PR \end{aligned}$$

b) Dit word verder gegee dat PR 'n lengte het van 8. Wat is die waarde van a?
Oplossing:

$$\frac{a}{3} + 2 = 8$$
$$\frac{a}{3} = 6$$
$$(3)\left(\frac{a}{3}\right) = (6)(3)$$
$$a = 18$$

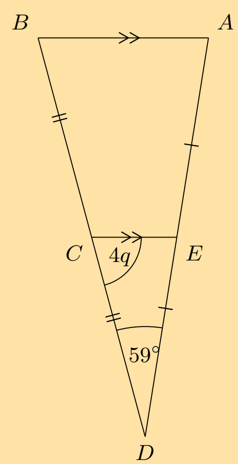
15. Die figuur hieronder toon $\triangle ABD$ wat gesny word deur EC. Punte C en E halveer hulle onderskeie sye van die driehoek.



a) Die hoeke $\hat{D} = 59°$ en $E\hat{C}D = 4q$ word gegee; bepaal die waarde van $\hat{A}$ in terme van q.

Oplossing:

Ons let die volgende op aangaande die middelpuntstelling:



Ook $\hat{A} = D\hat{E}C$

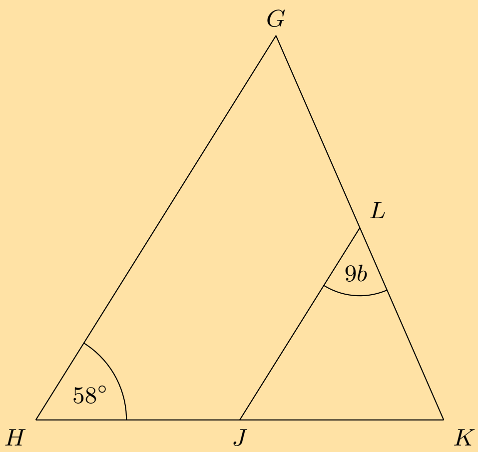
$$\begin{aligned} \hat{A} + 4q + 59° &= 180° \qquad (\angle\text{e van } \triangle) \\ \hat{A} &= 180° - (4q + 59°) \\ &= -4q + 121° \end{aligned}$$

In terme van q, is die antwoord: $\hat{A} = -4q + 121°$.

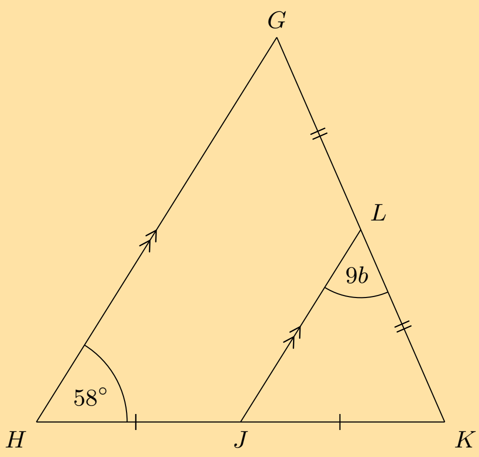
b) Dit word verder gegee dat $E\hat{C}D = 72°$. Bereken die waarde van q.
Oplossing:

$$\begin{aligned} E\hat{C}D &= 72° \\ 4q &= 72° \\ q &= 18° \end{aligned}$$

16. Die figuur hieronder toon $\triangle GHK$ wat gesny word deur LJ. Punte J en L halveer hulle onderskeie sye van die driehoek.



a) Gegee die hoeke $\hat{H} = 58°$ en $K\hat{L}J = 9b$, bepaal die waarde van $\hat{K}$ in terme van b.
Oplossing:
Gebruik die middelpuntstelling om die volgende inligting op die diagram by te voeg:



Ook: $\hat{H} = K\hat{J}L = 58°$

$$\begin{aligned} \hat{K} + 9b + 58° &= 180° \qquad (\angle\text{e van } \triangle) \\ \hat{K} &= 180° - (9b + 58°) \\ &= -9b + 122° \end{aligned}$$

In terme van b, is die antwoord: $\hat{K} = -9b + 122°$.

b) Dit word verder gegee dat $\hat{K} = 74°$. Bepaal die waarde van b. Gee jou antwoord as 'n breuk.
Oplossing:

$$\hat{K} = 74°$$
$$-9b + 122° = 74°$$
$$b = \frac{16}{3}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JV7 2. 2JV8 3. 2JV9 4. 2JVB 5. 2JVC 6. 2JVD 7. 2JVF 8. 2JVG 9. 2JVH 10. 2JVJ 11a. 2JVK 11b. 2JVM 11c. 2JVN 11d. 2JVP 11e. 2JVQ 12. 2JVR 13. 2JVS 14. 2JVT 15. 2JVV 16. 2JVW

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

7.5 Hoofstuk opsomming

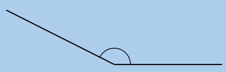
End of chapter Exercise 7 – 8:

1. Identifiseer die tipes hoeke hieronder getoon:

a)

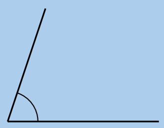
Oplossing:
gestrekte hoek

b)



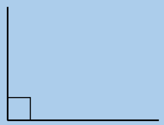
Oplossing:
stomphoek

c)



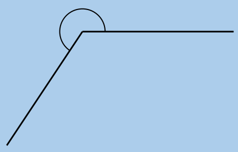
Oplossing:
skerphoek

d)



Oplossing:
regte hoek

e)



Oplossing:
Reflekse hoek

f) 'n Hoek van 91°

Oplossing:
stomphoek

g) 'n Hoek van 180°

Oplossing:
gestrekte hoek

h) 'n Hoek van 210°

Oplossing:
reflekse hoek

2. Besluit of die volgende stellings waar of vals is. As die stelling vals is, verduidelik hoekom:

a) 'n Trapesium is 'n vierhoek met twee pare teenoorstaande sye wat ewewydig is.

Oplossing:
Vals, 'n trapesium het slegs een paar teenoorstaande sye wat ewewydig is.

b) Beide hoeklyne van 'n parallelogram halveer mekaar.

Oplossing:
Waar

c) 'n Reghoek is 'n parallelogram met alle binnehoeke gelyk aan 90°.

Oplossing:
Waar

d) Twee aangrensende sye van 'n ruit het verskillende lengtes.

Oplossing:
Vals, twee aangrensende sye van 'n ruit is ewe lank.

e) Die hoeklyne van 'n vlieër sny reghoekig.

Oplossing:
Waar

f) Alle vierkante is parallelogramme.

Oplossing:
Waar

g) 'n Ruit is 'n vlieër met 'n paar gelyke teenoorstaande sye.

Oplossing:
Waar

h) Die hoeklyne van 'n parallelogram is asse van simmetrie.

Oplossing:
Waar

i) Die hoeklyne van 'n ruit is ewe lank.

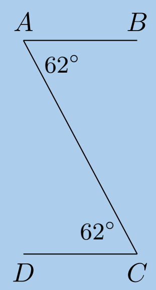
Oplossing:
Vals, die hoeklyne van 'n ruit is nie ewe lank nie.

j) Beide hoeklyne van 'n vlieër halveer die binnehoeke.

Oplossing:
Vals, slegs een hoeklyn van 'n vlieër halveer een paar binnehoeke.

3. Vind alle pare ewewydige lyne in die volgende figure, en gee redes in elke geval.

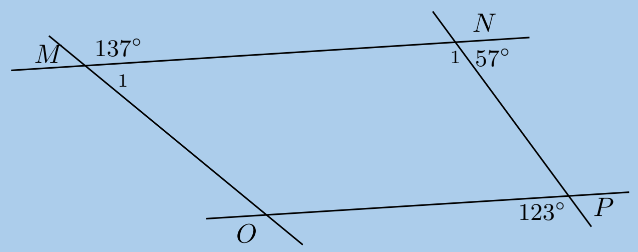
a)



Oplossing:

$AB \parallel CD$ (verw $\angle$e gelyk)

b)



Oplossing:

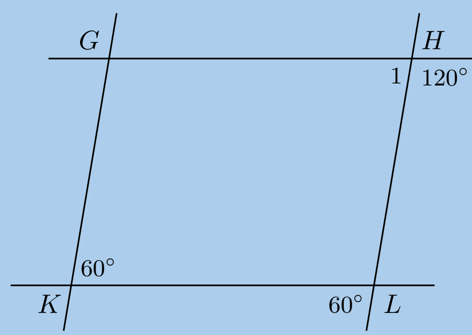
Met die gebruik van die som van die hoeke op 'n reguitlyn, kan ons die volgende sê:

- $\hat{M}_1 = 180° - 137° = 43°$
- $\hat{N}_1 = 180° - 57° = 123°$

NP nie $\parallel$ MO (ooreenk $\angle$e nie gelyk nie).

$MN \parallel OP$ (ooreenk $\angle$e gelyk).

c)



Oplossing:

$\hat{H}_1 = 180° - 120° = 60°$ ($\angle$e op reguitlyn).

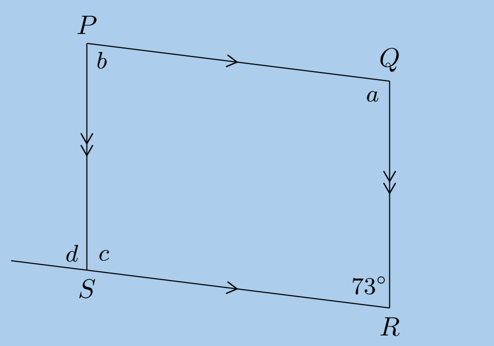
Dus $GH \parallel KL$ (ooreenk $\angle$e gelyk).

En $GK \parallel HL$ (verw $\angle$e gelyk).

Die pare ewewydige lyne is $GH \parallel KL$ en $GK \parallel HL$.

4. Vind hoeke a, b, c en d in elke geval en gee redes:

a)

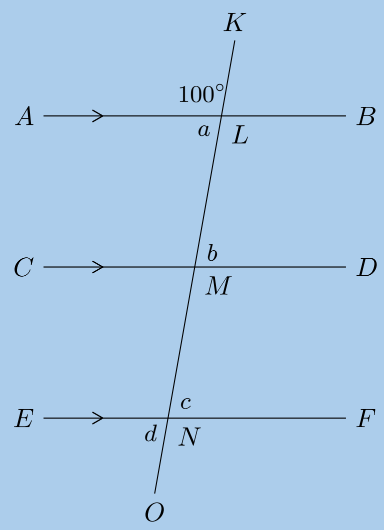


Oplossing:

$$
\begin{aligned}
a &= 180° - 73° = 107° && \text{(ko-binne } \angle\text{e; } PQ \parallel SR) \\
b &= 180° - 107° = 73° && \text{(ko-binne } \angle\text{e; } PS \parallel QR) \\
c &= 180° - 73° = 107° && \text{(ko-binne } \angle\text{e; } PQ \parallel SR) \\
d &= 73° && \text{(ooreenk } \angle\text{e; } PS \parallel QR)
\end{aligned}
$$

Dus $a = 107°, b = 73°, c = 107°, d = 73°$.

b)

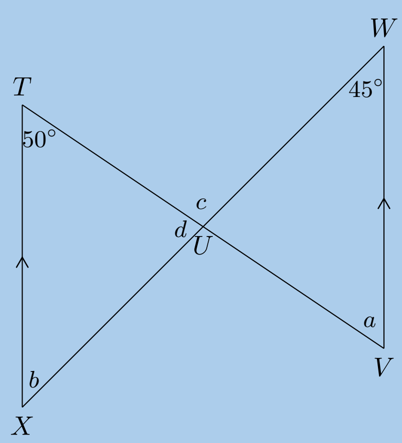


Oplossing:

$$
\begin{aligned}
a &= 80° && (\angle\text{e op reguitlyn}) \\
b &= 80° && (\text{verw } \angle\text{e; } AB \parallel CD) \\
c &= 80° && (\text{ooreenk } \angle\text{e; } CD \parallel EF) \\
d &= 80° && (\text{regoorst } \angle\text{e})
\end{aligned}
$$

Dus $a = b = c = d = 80°$.

c)

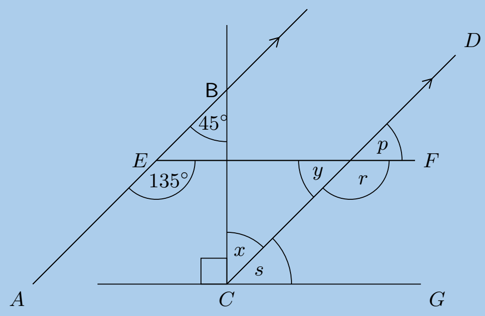


Oplossing:

$$
\begin{aligned}
a &= 50° && (\text{verw } \angle\text{e; } TX \parallel WV) \\
b &= 45° && (\text{verw } \angle\text{e; } TX \parallel WV) \\
c &= 95° && (\text{buite } \angle\text{e van } \triangle) \\
d &= 85° && (\angle\text{e van } \triangle)
\end{aligned}
$$

Dus $a = 50°, b = 45°, c = 95°, d = 85°$.

5. Vind elk van die onbekende hoeke gemerk in die figuur hieronder. Vind 'n rede wat in een enkele stap tot die antwoord sal lei.



a) $\hat{x}$

Oplossing:

$\hat{x}$ en $A\hat{B}C$ is verwisselende binnehoeke op 'n snylyn BC. $AB \parallel CD$ dus hulle moet ewe groot wees. Dus $\hat{x} = 45°$.

b) $\hat{s}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= 90° - 45° \\ &= 45° \end{aligned}$$

c) $\hat{r}$

Oplossing:

$A\hat{E}F$ om $\hat{r}$ is ooreenstemmende hoeke en is ewe groot as $AB \parallel CD$.

Dus: $\hat{r} = 135°$.

d) $\hat{y}$

Oplossing:

$\hat{r} + \hat{y} = 180°$ ($\angle$e op reguitlyn):

$$\begin{aligned} \hat{y} &= 180° - 135° \\ &= 45° \end{aligned}$$

e) $\hat{p}$

Oplossing:

$\hat{p}$ en $\hat{y}$ is regoorstaande hoeke en regoorstaande hoeke het altyd dieselfde grootte.

Dus: $\hat{p} = 45°$.

f) Gebaseer op die resultate vir die hoeke hierbo, is $EF \parallel CG$?

Oplossing:

As EF ewewydig is aan CG, dan moet die volgende alles waar wees:

- $\hat{s} = \hat{p}$ (ooreenstemmende hoeke)
- $\hat{s} = \hat{y}$ (verwisselende binnehoeke)
- $\hat{s} + \hat{r} = 180°$ (ko-binnehoeke)

Al bostaande is waar, dus is die lyne ewewydig.

6. Gegee die volgende diagramme:

Diagram A

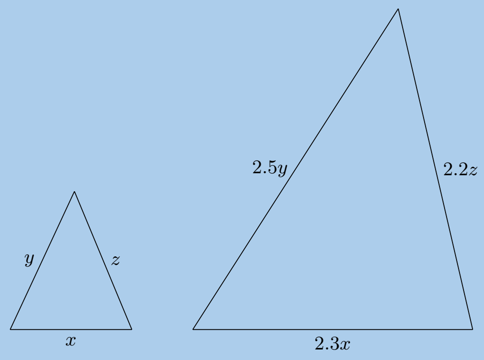
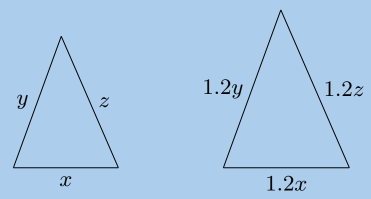


Diagram B



Watter diagram gee 'n paar driehoeke wat gelykvormig is?

Oplossing:

Ons kyk na sy-merkers. In diagram A let ons op dat die drie pare ooreenstemmende sye in verskillende verhoudings is. In diagram B let ons op die drie pare ooreenstemmende sye in dieselfde verhouding is.

Dus gee diagram B 'n paar driehoeke wat gelykvormig is.

7. Gegee die volgende diagramme:

Diagram A

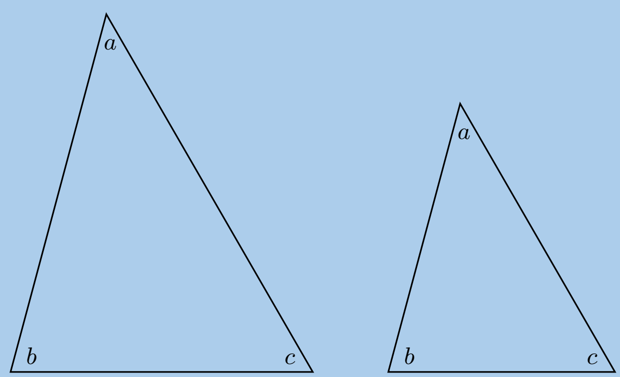
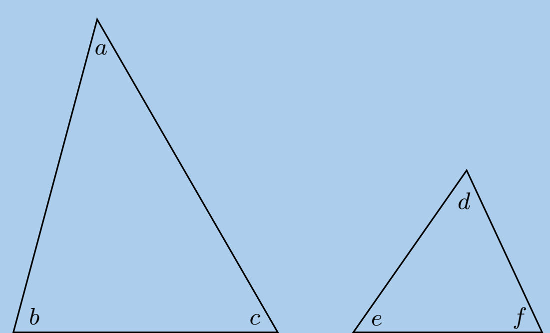


Diagram B



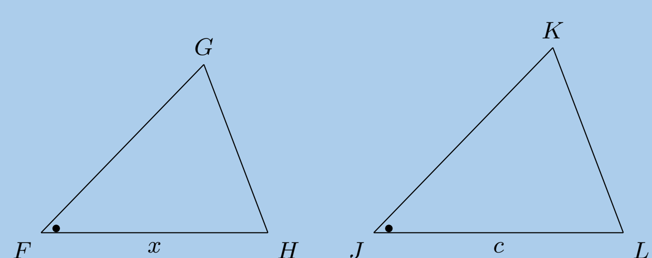
Watter diagram gee 'n paar driehoeke wat gelykvormig is?

Oplossing:

Diagram A toon 'n paar driehoeke met alle pare ooreenstemmende hoeke gelyk (dieselfde drie hoekmerkers is gebruik in beide driehoeke). Diagram B toon 'n paar driehoeke met verskillende hoeke in elke driehoek. Al ses hoeke is verskillend en daar is geen ooreenstemmende pare hoeke wat gelyk is nie.

Dus gee diagram A 'n paar driehoeke wat gelykvormig is.

8. Beskou die volgende driehoeke, wat op skaal geteken is:



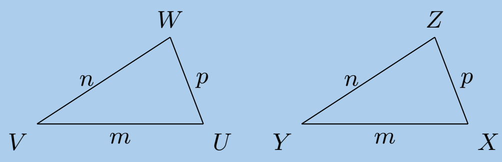
Is die driehoeke kongruent? Indien wel, gee die rede en gebruik die korrekte notasie om aan te toon dat hulle kongruent is.

Oplossing:

Ons het een hoek wat gelyk is. Daar word nie enige gelyke sye gegee nie (ons weet nie of $x = c$). Om te bepaal of enige driehoeke kongruent is, benodig ons drie stukkies inligting (onthou dat die redes vir kongruensie is: SSS, SHS, HHS en $90°$SkS). Dus kan ons nie sê of hierdie driehoeke kongruent is of nie.

Dus, daar is nie genoeg inligting om te bepaal of die twee driehoeke kongruent is nie.

9. Beskou die volgende driehoeke, wat op skaal geteken is:



Is die driehoeke kongruent? Indien wel, gee die rede en gebruik die korrekte notasie om aan te toon dat hulle kongruent is.

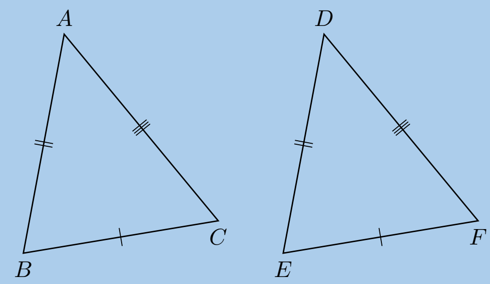
Oplossing:

Die sye van beide driehoeke is benoem met m, n en p. Dit beteken dat daar drie pare ooreenstemmende sye is wat ewe groot is.

Dus, hierdie twee driehoeke is kongruent ($\triangle VWU \equiv \triangle YZX$), rede: SSS.

10. Sê watter van die volgende pare driehoeke is kongruent en gee redes.

a)

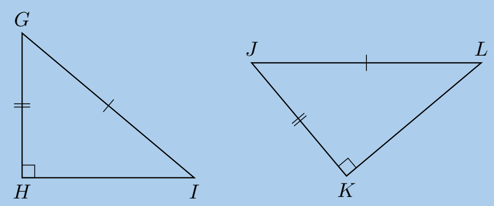


Oplossing:

Ons word gegee $CB = FE$, $AB = DE$ en $AC = DF$.

Dus $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (SSS).

b)

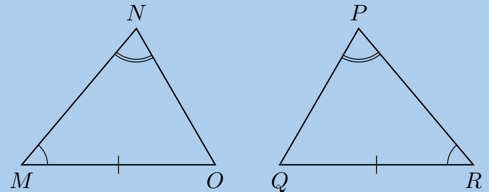


Oplossing:

Ons word gegee $GI = JL$, $GH = JK$ en $G\hat{H}I = J\hat{K}L = 90°$.

Dus $\triangle GHI \equiv \triangle JKL$ ($90°$SkS).

c)

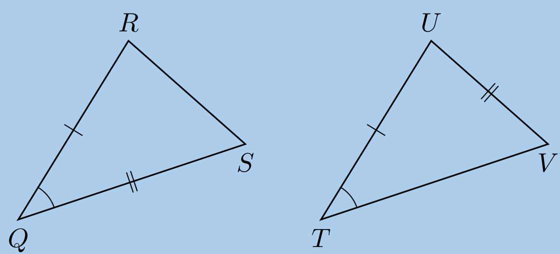


Oplossing:

Ons word gegee $MO = QR$, $O\hat{M}N = P\hat{R}Q$ en $M\hat{N}O = Q\hat{P}R$.

Dus $\triangle MNO \equiv \triangle RPQ$ (HHS).

d)

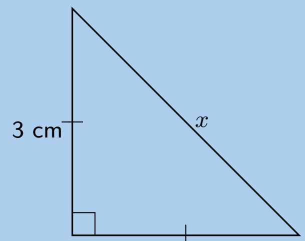


Oplossing:

$QR = TU$, $QS = UV$ en $S\hat{Q}R = V\hat{T}U$. Maar $V\hat{T}U$ is nie ingesluit tussen die sye UV en TU nie. Dus $\triangle QRS$ is nie kongruent aan $\triangle TUV$ nie.

11. Gebruik die stelling van Pythagoras en bereken die lengte x:

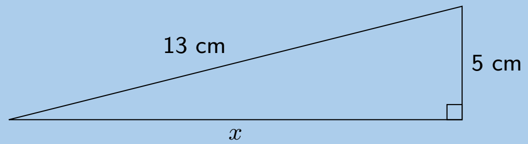
a)



Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 &= (3)^2 + (3)^2 \\ &= 18 \\ x &= \sqrt{18} \\ &= 4{,}24 \text{ cm} \end{aligned}$$

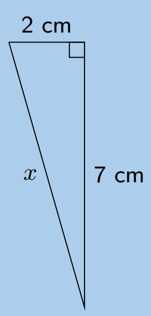
b)



Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 &= (13)^2 - (5)^2 \\ &= 144 \\ x &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

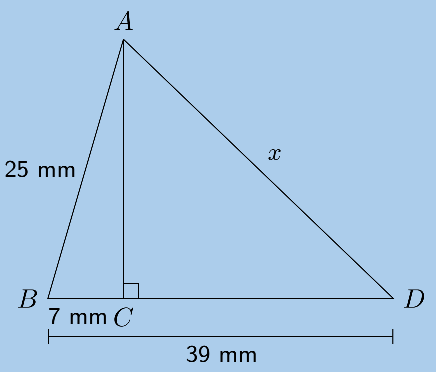
c)



Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 &= (2)^2 + (7)^2 \\ &= 53 \\ x &= \sqrt{53} \\ &= 7{,}28 \text{ cm} \end{aligned}$$

d)



Oplossing:
Kry eers AC:

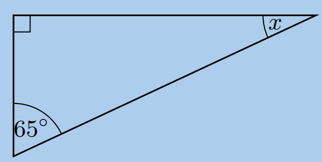
$$\begin{aligned} AC^2 &= (25)^2 - (7)^2 \\ &= 576 \\ AC &= \sqrt{576} \end{aligned}$$

Nou let ons op dat $CD = 39 - 7 = 32$ en dan vind ons x:

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sqrt{576})^2 + (32)^2 \\ x^2 &= 1600 \\ x &= 40 \text{ mm} \end{aligned}$$

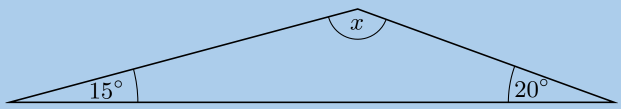
12. Bereken x en y in die diagram hieronder:

a)



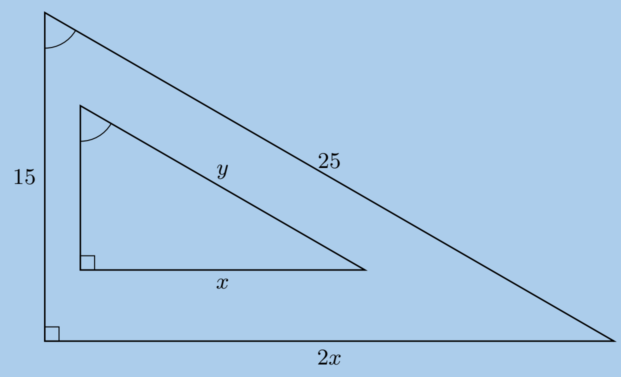
Oplossing:
$x = 180° - 90° - 65° = 25°$ ($\angle$e van $\triangle$).

b)



Oplossing:
$x = 180° - 20° - 15° = 145°$ ($\angle$e van $\triangle$).

c)



Oplossing:
Ons kan x vind met die gebruik van die stelling van Pythagoras:

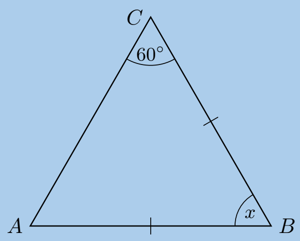
$$\begin{aligned} 25^2 &= 15^2 + (2x)^2 \\ 4x^2 &= 400 \\ x^2 &= 100 \\ \therefore x &= 10 \end{aligned}$$

Ons let op dat die driehoeke gelykvormig is met HHH. Dus moet die sye eweredig wees. Dus is y:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2x} &= \frac{y}{25} \\ \therefore y &= 12{,}5 \end{aligned}$$

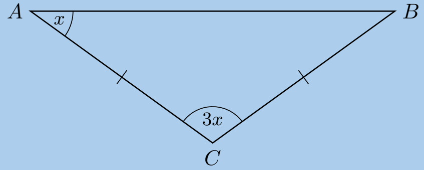
Dus $x = 10$ en $y = 12{,}5$.

d)



Oplossing:
Dit is 'n gelykbenige driehoek, dus $\hat{C} = \hat{A} = 60°$.
Dus $x = 180° - 60° - 60° = 60°$ ($\angle$e van $\triangle$).

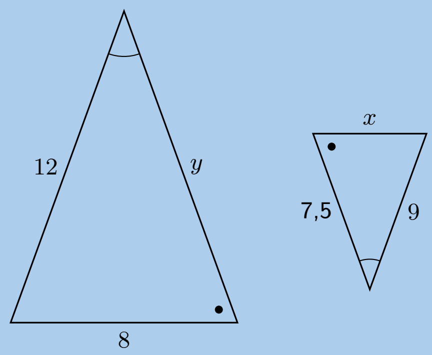
e)



Oplossing:
Dit is 'n gelykbenige driehoek, dus $\hat{A} = \hat{B} = x$.

$$\begin{aligned} x + x + 3x &= 180° \qquad (\angle\text{e van } \triangle) \\ \therefore 5x &= 180° \\ x &= 36° \end{aligned}$$

f)



Oplossing:

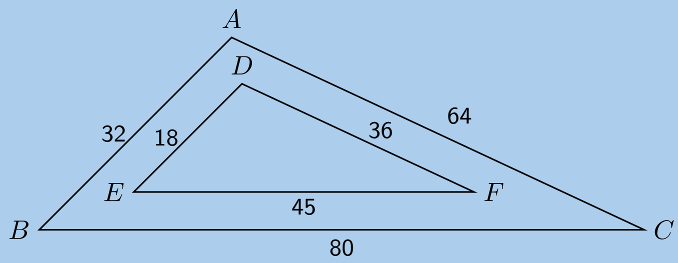
Die twee driehoeke is gelykvormig met HHH. Dus is die sye in verhouding.

$$\frac{x}{9} = \frac{8}{12}$$
$$\therefore x = 6$$

$$\frac{y}{12} = \frac{7{,}5}{9}$$
$$\therefore y = 10$$

Dus $x = 6$ en $y = 10$.

13. Beskou die diagram hieronder. Is $\triangle ABC \quad ||| \quad \triangle DEF$? Gee redes vir jou antwoord.

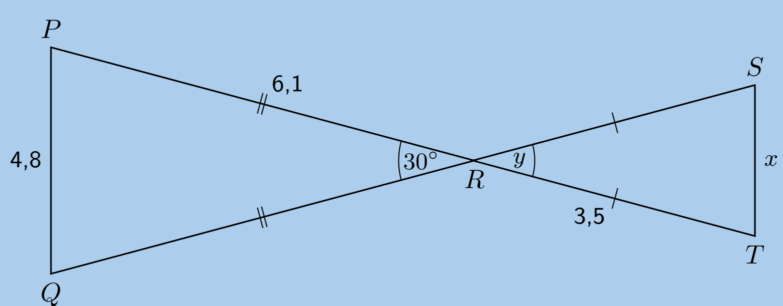


Oplossing:

$$\frac{ED}{BA} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$
$$\frac{DF}{AC} = \frac{32}{64} = \frac{9}{16}$$
$$\frac{EF}{BC} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

Al drie pare sye is in dieselfde verhouding, $\therefore \triangle ABC \quad ||| \quad \triangle DEF$.

14. Verduidelik hoekom is $\triangle PQR$ gelykvormig aan $\triangle TSR$ en bereken die waardes van x en y.



Oplossing:

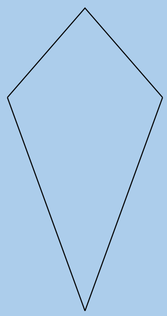
$$
\begin{aligned}
y &= 30° && \text{(regoorst } \angle\text{'e)}\\
\hat{P} &= \hat{Q} && (\angle\text{e tenoor gelyke sye)}\\
\text{and } \hat{S} &= \hat{T} && (\angle\text{e tenoor gelyke sye)}
\end{aligned}
$$

Maar, $\hat{P} + \hat{Q} + 30° = 180°$ ($\angle$e van $\triangle$). Dus $\hat{P} + \hat{Q} = 150°$.
Net so is $\hat{S} + \hat{T} = 150°$.
Maar $\hat{P} = \hat{Q}$, dus $2\hat{P} = 150°$, en $\hat{S} = \hat{T}$, dus $2\hat{S} = 150°$. Gevolglik $\hat{P} = \hat{S}$.
Dus $\triangle PQR \;|||\; \triangle TRS$ (HHH).
Ons kan nou die feit dat die sye eweredig is gebruik, om x te vind:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{4{,}8} &= \frac{3{,}5}{6{,}1}\\
\therefore x &= 2{,}75
\end{aligned}
$$

Dus $x = 2{,}75$ en $y = 30°$.

15. Die volgende vorm is op skaal geteken:



Gee die mees spesifieke naam vir die vorm.

Oplossing:

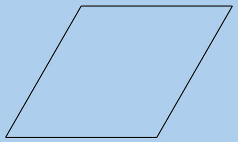
Ons begin deur die aantal sye te tel. Daar is vier sye in hierdie figuur en dit is 'n eenvoudige vierhoek of een van die spesiale tipes vierhoeke.

Vervolgens vra ons onsself af of daar enige ewewydige lyne in die figuur is. Jy kan na die figuur kyk om te sien of daar enige lyne is wat ewewydig lyk of 'n vinnige skets maak om te sien of enige pare teenoorstaande sye by 'n punt ontmoet.

Beide pare teenoorstaande sye is nie ewewydig nie. Dit beteken dat die figuur slegs een van die volgende kan wees: trapesium, vlieër of vierhoek.

Vervolgens vra ons onsself af of een van die pare teenoorstaande sye ewewydig is, terwyl die ander paar nie is nie. Nie een van die twee pare teenoorstaande sye is ewewydig ie, dus moet ons nou kyk of beide pare aangrensende sye ewe lank is. Beide pare aangrensende sye is ewe lank. Dus is dit 'n vlieër.

16. Gebaseer op die vorm wat jy sien, maak 'n lys van al die name van die vorm. Die figuur is op skaal geteken.



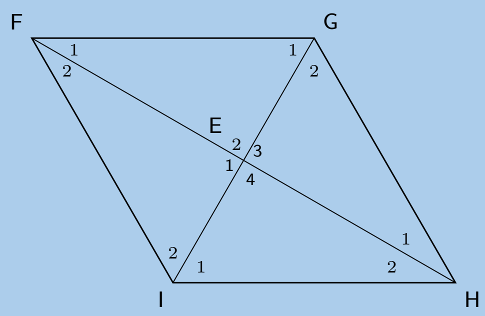
Oplossing:

Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig. Dit beteken die vorm kan aan een of meer van hierdie groepe behoort: vierkant, ruit, reghoek, en parallelogram.

Die vorm staan bekend as 'n ruit. Dit is beslis 'n vierhoek (want dit het vier sye). Dit is ook 'n parallelogram want die teenoorstaande sye is ewewydig aan mekaar. Die ruit is nie 'n reghoek of 'n vierkant nie, want dit het nie regte hoeke nie. Maar, die ruit is 'n vlieër, omdat dit twee pare aangrensende sye het wat ewe lank is. En uiteindelik is dit ook 'n trapesium omdat dit paar teenoorstaande sye het wat ewewydig is.

Dus die korrekte antwoord is: ruit, parallelogram, vlieër, trapesium en vierhoek.

17. $FGHI$ is 'n ruit. $\hat{F}_1 = 3x + 20^\circ$; $\hat{G}_1 = x + 10^\circ$. Bepaal die waarde van x.

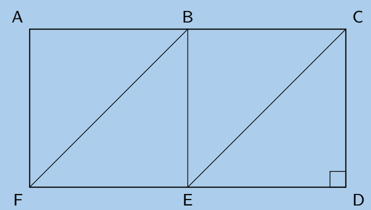


Oplossing:

$\hat{E}_2 = 90^\circ$ (hoeklyne van 'n ruit halveer mekaar reghoekig)

$$\begin{aligned} \hat{F}_1 + \hat{G}_1 + 90^\circ &= 180^\circ \qquad (\angle\text{e van}\triangle) \\ 3x + 20^\circ + x + 10^\circ &= 90^\circ \\ 4x &= 60^\circ \\ \therefore x &= 15^\circ \end{aligned}$$

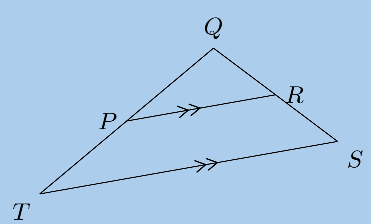
18. In die diagram hieronder, $AB = BC = CD = DE = EF = FA = BE$.



Noem:

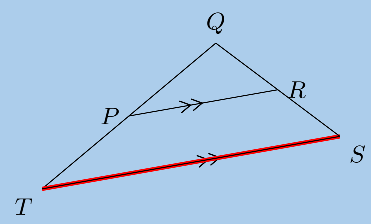
a) 3 reghoeke
   Oplossing:
   $ACDF$, $ABEF$ en $BCDE$
b) 4 parallelogramme
   Oplossing:
   $ACDF$, $ABEF$, $BCDE$ en $BCEF$
c) 2 trapesiums
   Oplossing:
   $ACEF$ en $BCDF$
d) 2 ruite
   Oplossing:
   $ABEF$ en $BCDE$

19. Punte R en P is die middelpunte van lyne QS en QT. Bestudeer $\triangle TSQ$ noukeurig. Identifiseer die derde sy van hierdie driehoek, deur die gegewe inligting te gebruik, tesame met die middelpuntstelling. (Benoem die derde sy volgens sy eindpunte, bv.FG.)



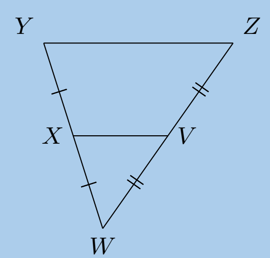
Oplossing:

Die rooi lyn, TS of ST, dui die derde sy van die driehoek aan. Volgens die middelpuntstelling sal die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, ewewydig wees aan die derde sy van die driehoek.



Die derde sy is: TS of ST.

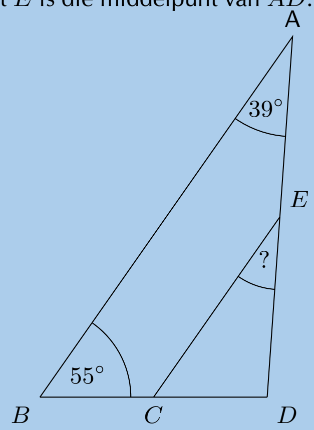
20. Punte X en V op die segmente WY en WZ word gegee. Bestudeer die driehoek noukeurig, en identifiseer en benoem dan die ewewydige lynsegmente.



Oplossing:

Die lynsegmente YZ en VX is ewewydig volgens die middelpuntstelling omdat segment VX lynsegmente WZ en WY halveer.

21. Die figuur toon 'n groot driehoek met hoekpunte A, B en D, en 'n kleiner driehoek met hoekpunte by C, D en E. Punt C is die middelpunt van BD en punt E is die middelpunt van AD.



a) Die hoeke $\hat{A} = 39°$ en $\hat{B} = 55°$ word gegee. Bepaal die waarde van $D\hat{E}C$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} AB \parallel EC & \quad \text{(Midpt.-stelling)} \\ D\hat{E}C = \hat{A} & \quad \text{(ooreenk } \angle\text{e; } AB \parallel EC\text{)} \\ D\hat{E}C = 39° & \end{aligned}$$

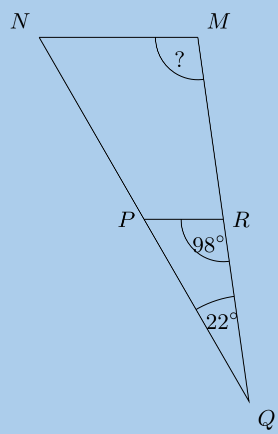
b) Die twee driehoeke in hierdie vraag is gelykvormige driehoeke. Voltooi die volgende stelling korrek deur die drie hoekpunte in die regte volgorde te skryf (daar is slegs een korrekte antwoord).

$\triangle DEC \;|||\; \triangle ?$

Oplossing:

Hoek D is gelyk aan hoek D; hoek E is gelyk aan hoek A ; en hoek C is gelyk aan hoek B. Dus, $\triangle DEC \;|||\; \triangle DAB$.

22. Die figuur toon 'n groot driehoek met hoekpunte M, N en Q, en 'n kleiner driehoek met hoekpunte by P, Q en R. Punt P is die middelpunt van NQ en punt R is die middelpunt van MQ.



a) Met die twee gegewe hoeke, $\hat{Q} = 22°$ en $Q\hat{R}P = 98°$, bepaal die waarde van $\hat{M}$.

Oplossing:

$$MN \parallel RP \quad \text{(Midpt.-stelling)}$$
$$\hat{M} = Q\hat{R}P \quad \text{(ooreenk } \angle\text{e; } MN \parallel PR\text{)}$$
$$\hat{M} = 98°$$

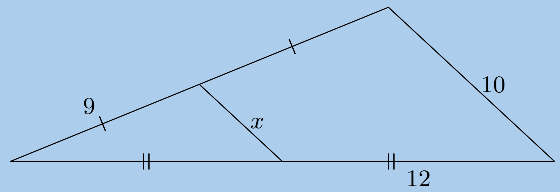
b) Die twee driehoeke in hierdie vraag is gelykvormige driehoeke. Voltooi die volgende stelling korrek deur die drie hoekpunte in die regte volgorde te skryf (daar is slegs een korrekte antwoord).

$\triangle QMN \ ||| \ \triangle ?$

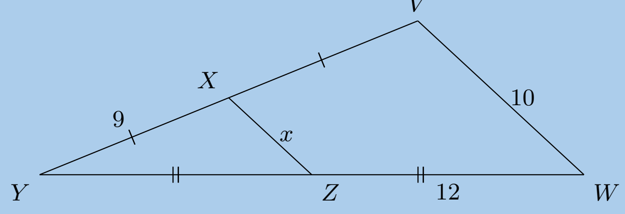
Oplossing:

Hoek Q is gelyk aan hoek Q; hoek M is gelyk aan hoek R ; en hoek N is gelyk aan hoek P. Dus, $\triangle QMN \ ||| \ \triangle QRP$.

23. Beskou die driehoek in die diagram hieronder. Daar is 'n lynsegment wat deur die groot driehoek sny. Let op dat sekere segmente gelyk aan mekaar gemerk is. Een sy van die driehoek is 10 eenhede lank. Bepaal die waarde van x.



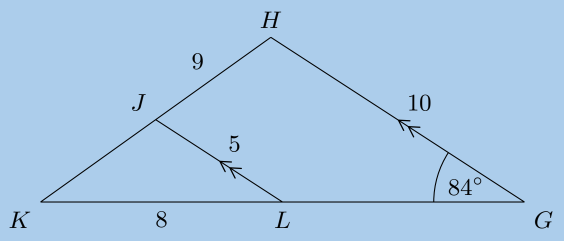
Oplossing:



Van die middelpuntstelling weet ons:

$$
\begin{aligned}
VW &= 2 \times XZ \\
(10) &= 2x \\
\frac{1}{2}(10) &= x \\
5 &= x
\end{aligned}
$$

24. In die figuur hieronder, $GH \parallel LJ$, soos benoem. Verder word die volgende lengtes en hoekgroottes gegee: $GH = 10$; $LJ = 5$; $HJ = 9$; $KL = 8$ en $\hat{G} = 84°$. Die figuur is op skaal geteken.



Bereken die lengte van JK.

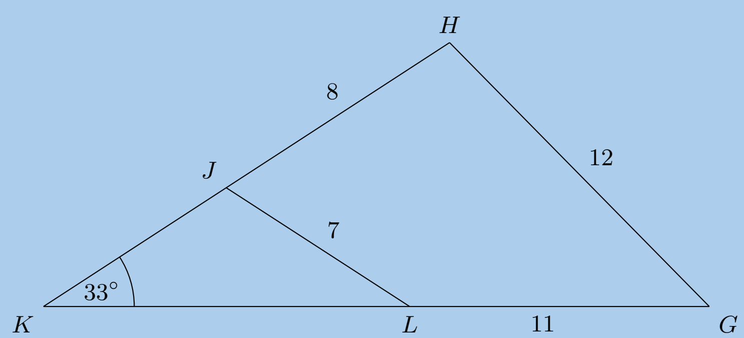
Oplossing:

Ons weet dat $GH \parallel LJ$. Die lengte van JL is 5 en die lengte van GH is 10, dus $JL = \frac{1}{2}GH$.

Dus weet ons van die middelpuntstelling dat L die middelpunt is van GK en J is die middelpunt van HK.

Dus $HJ = JK = 9$.

25. Die figuur toon driehoek GHK met die kleiner driehoek JKL binne in die groter driehoek. Verder word die lengtes en hoeke gegee: $GH = 12; LJ = 7; HJ = 8; LG = 11$; $\hat{K} = 33°$. Die figuur is volgens skaal geteken.

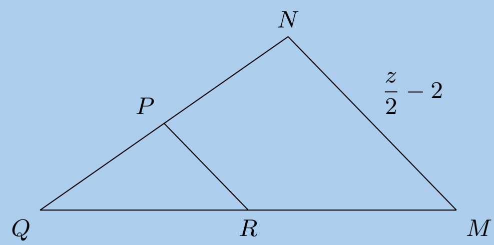


Vind die lengte van KL.

Oplossing:

In die figuur kan jy sien dat segment LJ nie ewewydig is aan GH nie. Dit beteken dat die middelpuntstelling nie toegepas kan word in hierdie driehoek nie. Daar is ook geen ander opsies om te gebruik nie: die probleem kan nie opgelos word nie. Daar is geen oplossing.

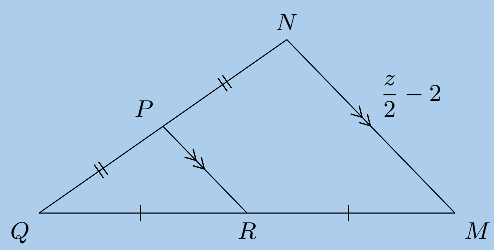
26. In die diagram hieronder, is P die middelpunt van NQ en R is die middelpunt van MQ. Een sy van die driehoek het 'n lengte van $\frac{z}{2} - 2$.



a) Bepaal die waarde van PR in terme van z.

Oplossing:

Vul die inligting in op die diagram met die gebruik van die middelpuntstelling:



Onthou dat die middelpuntstelling vir ons vertel dat die segmente MN en PR 'n verhouding het van $2 : 1$ (MN is tweemaal so lank soos PR).

$$\begin{aligned} MN &= 2 \times PR \\ \left(\frac{z}{2} - 2\right) &= 2\left(PR\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2} - 2\right) &= PR \\ \frac{z}{4} - 1 &= PR \end{aligned}$$

Die finale antwoord is $PR = \frac{z}{4} - 1$ (helfte van die lengte van MN).

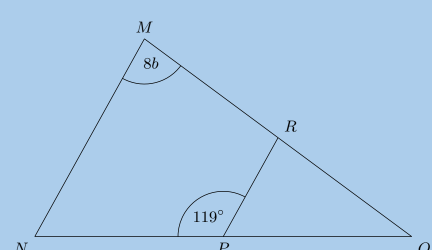
b) Dit word verder gegee PR 'n lengte het van 2. Wat is die waarde van z?

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{z}{4} - 1 &= 2 \\ \frac{z}{4} &= 3 \\ (4)\left(\frac{z}{4}\right) &= (3)(4) \\ z &= 12 \end{aligned}$$

Die finale antwoord is $z = 12$.

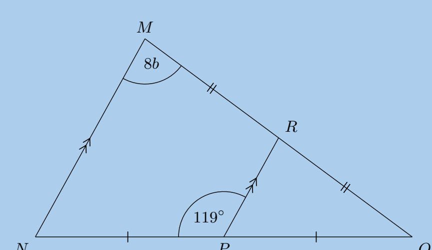
27. Die figuur hieronder toon $\triangle MNQ$ wat gesny word deur RP. Punte P en R halveer hulle onderskeie sye van die driehoek.



a) Met die twee hoeke wat gegee is, $\hat{M} = 8b$ en $\angle NPR = 119°$, bepaal die waarde van $\hat{Q}$ in terme van b.

Oplossing:

Teken die diagram oor en vul die bekende inligting in deur die middelpuntstelling te gebruik:



$Q\hat{P}R = 180° - R\hat{P}N = 180° - 119° = 61°$ ($\angle$e op reguitlyn).

$Q\hat{R}P = 8b$ (ooreenk $\angle$e; $MN \parallel RP$).

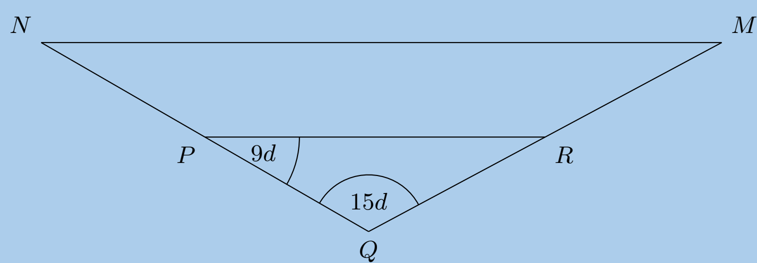
Dus

$$\begin{aligned}\hat{Q} + 8b + 61^\circ &= 180^\circ \qquad (\angle\text{e van } \triangle)\\ \hat{Q} &= 180^\circ - (8b + 61^\circ)\\ &= -8b + 119^\circ\end{aligned}$$

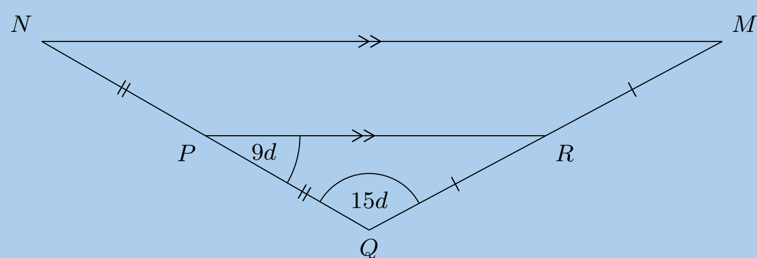
b) Dit word nou gegee dat $\hat{M}$ 'n grotte het van 76°. Bepaal die waarde van b. Gee jou antwoord as 'n presiese breukwaarde.
Oplossing:

$$\begin{aligned}\hat{M} &= 76^\circ\\ 8b &= 76^\circ\\ b &= \frac{19}{2}\end{aligned}$$

28. Die figuur hieronder toon $\triangle MNQ$ wat gesny word deur RP. Punte P en R halveer hulle onderskeie sye van die driehoek.



a) Die hoeke $\hat{Q} = 15d$ en $R\hat{P}Q = 9d$ in die groter driehoek word gegee; bepaal die waarde van $\hat{M}$ in terme van d.
Oplossing:
Teken die diagram oor en vul die bekende inligting oor deur die middelpuntstelling te gebruik:



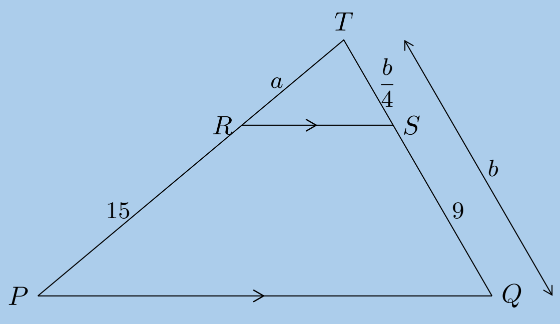
$P\hat{R}Q = \hat{M}$ (ooreenk $\angle$e; $MN \parallel RP$)

$$\begin{aligned}\hat{M} + 9d + 15d &= 180^\circ \qquad (\angle\text{e van } \triangle)\\ \hat{M} &= 180^\circ - (9d + 15d)\\ &= -24d + 180^\circ\end{aligned}$$

b) Dit word verder gegee dat $R\hat{P}Q$ 'n grootte het van 60°. Los op vir die waarde van d. Gee jou antwoord as 'n presiese breukwaarde.
Oplossing:

$$\begin{aligned}R\hat{P}Q &= 60^\circ\\ 9d &= 60^\circ\\ d &= \frac{20}{3}\end{aligned}$$

29. Bereken a en b:



Oplossing:
In $\triangle TRS$ en $\triangle PTQ$:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \hat{T} && \text{(gemene } \angle\text{)} \\ T\hat{R}S &= \hat{P} && \text{(ooreenk } \angle\text{e; } RS \parallel PQ\text{)} \\ T\hat{S}R &= \hat{Q} && \text{(ooreenk } \angle\text{e; } RS \parallel PQ\text{)} \end{aligned}$$

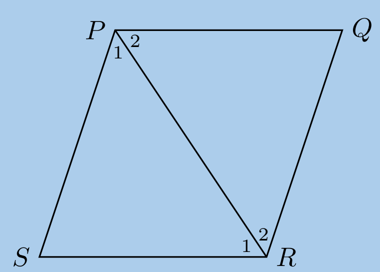
Dus $\triangle TRS \;|||\; \triangle PTQ$ (HHH).
Dus is sye eweredig.

$$\begin{aligned} \frac{TR}{TP} &= \frac{TS}{TQ} \\ \frac{a}{a+15} &= \frac{\frac{b}{4}}{b} \\ \frac{a}{a+15} &= \frac{1}{4} \\ a &= (a+15)\left(\frac{1}{4}\right) \\ 4a &= a + 15 \\ 3a &= 15 \\ \therefore a &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{b}{4} + 9 \\ 4b &= b + 36 \\ 3b &= 36 \\ \therefore b &= 12 \end{aligned}$$

Dus: $a = 5$ en $b = 12$.

30. $\triangle PQR$ en $\triangle PSR$ is gelyksydige driehoeke. Bewys dat $PQRS$ 'n ruit is.



Oplossing:

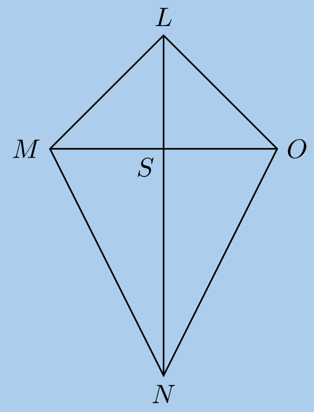
Ons het twee gelyksydige driehoeke, dus in $\triangle PSR$: $PS = SR = PR$ en in $\triangle PQR$: $PQ = QR = PR$.

Maar, PR is 'n gemeenskaplike sy en dus is $PR = PS = SR = PQ = QR$.

Ook, in elke driehoek is al die binnehoeke gelyk aan $60°$. Dus $\hat{P}_1 = \hat{R}_2$ en $\hat{P}_2 = \hat{R}_2$. So, $PQ \parallel SR$ en $PS \parallel QR$ (verw $\angle$e gelyk). In elke driehoek is die binnehoeke gelyk aan $60°$.

$\therefore PQRS$ is 'n ruit (die sye is ewe lank, beide pare teenoorstaande sye is ewewydig).

31. $LMNO$ is 'n vierhoek met $LM = LO$ en hoeklyne wat sny by S sodat $MS = SO$. Bewys dat:



a) $M\hat{L}S = S\hat{L}O$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\text{In } \triangle LMS \text{ en } \triangle LOS\\
&LM = LO \text{ (gegee)}\\
&MS = SO \text{ (gegee)}\\
&LS \text{ is 'n gemene sy}\\
&\therefore \triangle LMS \equiv \triangle LOS \text{ (SSS)}\\
&\therefore M\hat{L}S = S\hat{L}O
\end{aligned}$$

b) $\triangle LON \equiv \triangle LMN$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\text{In } \triangle LON \text{ en } \triangle LMN\\
&LO = LM \text{ (gegee)}\\
&M\hat{L}S = S\hat{L}O \text{ (hierbo bewys)}\\
&LN \text{ is 'n gemene sy}\\
&\therefore \triangle LON \equiv \triangle LMN \text{ (SHS)}
\end{aligned}$$

c) $MO \perp LN$

Oplossing:

Ons moet wys dat een van $L\hat{S}M$ of $L\hat{S}O$ of $M\hat{S}N$ of $O\hat{S}N$ gelyk is aan $90°$.

Ons het alreeds bewys dat $M\hat{L}S = O\hat{L}S$ en dat $L\hat{M}S = L\hat{O}S$ (deur kongruente driehoeke te gebruik).

Ons let ook op dat $M\hat{L}O = M\hat{L}S + O\hat{L}S$.

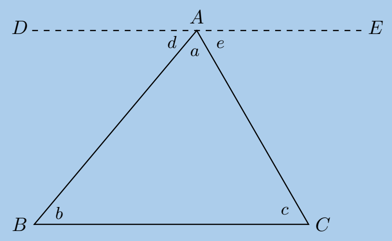
Vervolgens let ons op dat:

$$\begin{aligned}
M\hat{L}S + O\hat{L}S + L\hat{M}S = L\hat{O}S &= 180° \text{ (}\angle\text{e van } \triangle\text{)}\\
\therefore 2(M\hat{L}S) + 2(L\hat{M}S) &= 180°\\
2(M\hat{L}S + L\hat{M}S) &= 180°\\
M\hat{L}S + L\hat{M}S &= 90°
\end{aligned}$$

Nou let ons op dat:

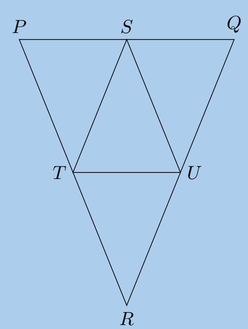
$$L\hat{S}O = M\hat{L}S + L\hat{M}S \text{ (buite } \angle \text{ van } \triangle)$$
$$\therefore L\hat{S}O = 90°$$
$$\therefore MO \perp LN$$

32. Gebruik die figuur hieronder en toon dat die som van die drie hoeke in 'n driehoek 180° is. Lyn DE is ewewydig aan BC.



Oplossing:
$DE \parallel BC$ (gegee).
$e = c$ (verw ∠e; $DE \parallel BD$).
$d = b$ (verw ∠e; $DE \parallel BD$).
$d + a + e = 180°$ (∠e op reguitlyn).
En ons het getoon dat $e = c$ en $d = b$, dus ons kan d vervang met b en e met c om die volgende te kry:
$a + b + c = 180°$.
Dus is die hoeke in 'n driehoek saam gelyk aan 180°.

33. PQR is 'n gelykbenige driehoek met $PR = QR$. S is die middelpunt van PQ, T is die middelpunt van PR en U is die middelpunt van RQ.



a) Bewys $\triangle STU$ is ook gelykbenig.
Oplossing:

$$PT = \frac{1}{2}PR \text{ (gegee)}$$
$$S \text{ middelpunt van } PQ$$
$$U \text{ middelpunt van } RQ$$
$$SU = \frac{1}{2}PR$$
$$\therefore SU = PT$$
$$S \text{ middelpunt of } PQ$$
$$T \text{ middelpunt of } PR$$
$$\therefore ST = \frac{1}{2}QR = QU$$
$$\text{Maar } PR = QR \text{ (gegee)}$$
$$\therefore SU = ST$$
$$\therefore \triangle STU \text{ is gelykbenig.}$$

b) Watter tipe vierhoek is $STRU$? Motiveer jou antwoord.

Oplossing:

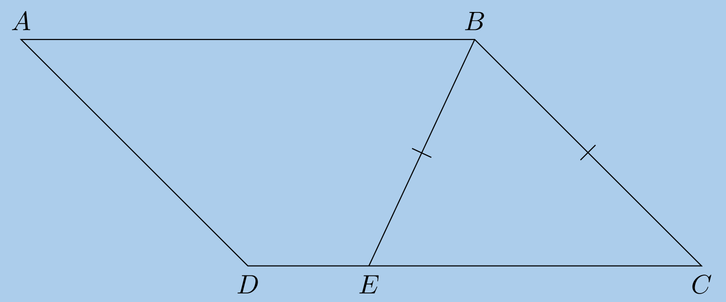
$STRU$ is 'n ruit of rombus. Dit is 'n parallelogram aangesien $SU \parallel TR$ en $ST \parallel UR$ (van die middelpuntstelling) met vier gelyke sye: $US = ST = TR = RU$ (gegee en hierbo bewys).

c) As $R\hat{T}U = 68°$ bereken, met redes, die grootte van $T\hat{S}U$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
R\hat{T}U &= 68° \\
\therefore T\hat{U}S &= 68° \qquad \text{(verw } \angle\text{'e, } TR \parallel SU) \\
\therefore S\hat{T}U &= 68° \qquad (\angle\text{e tenoor gelyke sye}) \\
\therefore T\hat{S}U &= 180° - 2(68)° \qquad (\angle\text{e van } \triangle) \\
\therefore T\hat{S}U &= 180° - 136° \\
&= 44°
\end{aligned}$$

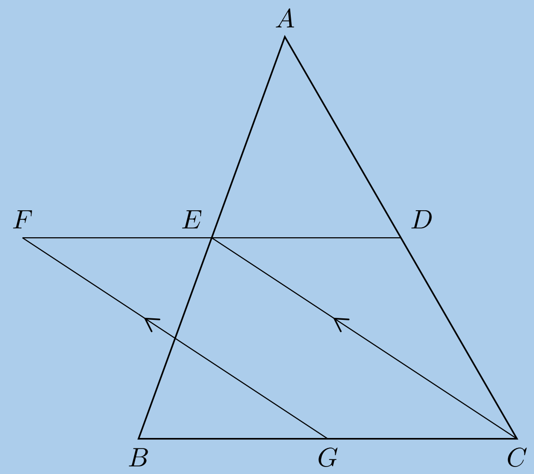
34. $ABCD$ is 'n parallelogram. $BE = BC$. Bewys dat $A\hat{B}E = B\hat{C}D$.



Oplossing:

$$\begin{aligned}
B\hat{C}D &= B\hat{E}C \qquad (\angle\text{e tenoor gelyke sye}) \\
A\hat{B}E &= B\hat{E}C \text{ (verw } \angle\text{e; } AB \parallel DC) \\
\therefore A\hat{B}E &= B\hat{C}D
\end{aligned}$$

35. In die diagram hieronder, is D, E en G die middelpunte van AC, AB en BC onderskeidelik. $EC \parallel FG$.



a) Bewys dat $FECG$ 'n parallelogram is.

Oplossing:

$$AE = EB \text{ (} E \text{ is middelpt)}$$
$$AD = DC \text{ (} D \text{ is middelpt)}$$
$$FD \parallel BC \text{ (Midpt.-stelling)}$$
$$EC \parallel FG \text{ (gegee)}$$
$$\therefore FECG \text{ is 'n parallelogram (beide pare teenoorst. sye ewewydig)}$$

b) Bewys dat $FE = ED$.

Oplossing:

$$ED = \frac{1}{2}BC \text{ (Midpt.-stelling)}$$
$$GC = \frac{1}{2}BC \text{(definisie van middelpt)}$$
$$\therefore ED = GC$$
$$FE = GC \text{ (teenoorst. sye van parm gelyk)}$$
$$\therefore ED = FE$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JVY	1b. 2JVZ	1c. 2JW2	1d. 2JW3	1e. 2JW4	1f. 2JW5
1g. 2JW6	1h. 2JW7	2a. 2JW8	2b. 2JW9	2c. 2JWB	2d. 2JWC
2e. 2JWD	2f. 2JWF	2g. 2JWG	2h. 2JWH	2i. 2JWJ	2j. 2JWK
3a. 2JWM	3b. 2JWN	3c. 2JWP	4a. 2JWQ	4b. 2JWR	4c. 2JWS
5. 2JWT	6. 2JWV	7. 2JWW	8. 2JWX	9. 2JWY	10a. 2JWZ
10b. 2JX2	10c. 2JX3	10d. 2JX4	11a. 2JX5	11b. 2JX6	11c. 2JX7
11d. 2JX8	12a. 2JX9	12b. 2JXB	12c. 2JXC	12d. 2JXD	12e. 2JXF
12f. 2JXG	13. 2JXH	14. 2JXJ	15. 2JXK	16. 2JXM	17. 2JXN
18. 2JXP	19. 2JXQ	20. 2JXR	21. 2JXS	22. 2JXT	23. 2JXV
24. 2JXW	25. 2JXX	26. 2JXY	27. 2JXZ	28. 2JY2	29. 2JY3
30. 2JY4	31. 2JY5	32. 2JY6	33. 2JY7	34. 2JY8	35. 2JY9

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 8

Analitiese meetkunde

- Hierdie hoofstuk stel meetkundige figure voor op die Cartesiese koördinaatstelsel. Die afstandformule, gradiënt van 'n lyn en die middelpunt van 'n lyn word ook behandel.
- Afstandsformules, die gradiënt van 'n lyn en die middelpunt van 'n lyn behoort eers afgelei te word en dan toegepas word op die oplos van probleme.
- Integreer Euklidiese meetkundige kennis met analitiese meetkunde. Dit mag help as leerders die eienskappe van spesiale vierhoeke neerskryf en dit byderhand hou terwyl hulle deur analitiese meetkunde werk.
- Beklemtoon die waarde en belangrikheid van sketse.
- Beklemtoon die belangrikheid daarvan om die koördinate altyd in dieselfde formaat te skryf vir die afstandformule en die gradiënt.
- Hierdie hoofstuk werk ook sterk met die vergelyking van 'n reguitlyn. Maak seker die leerders is gemaklik met die vergelyking van 'n reguitlyn.

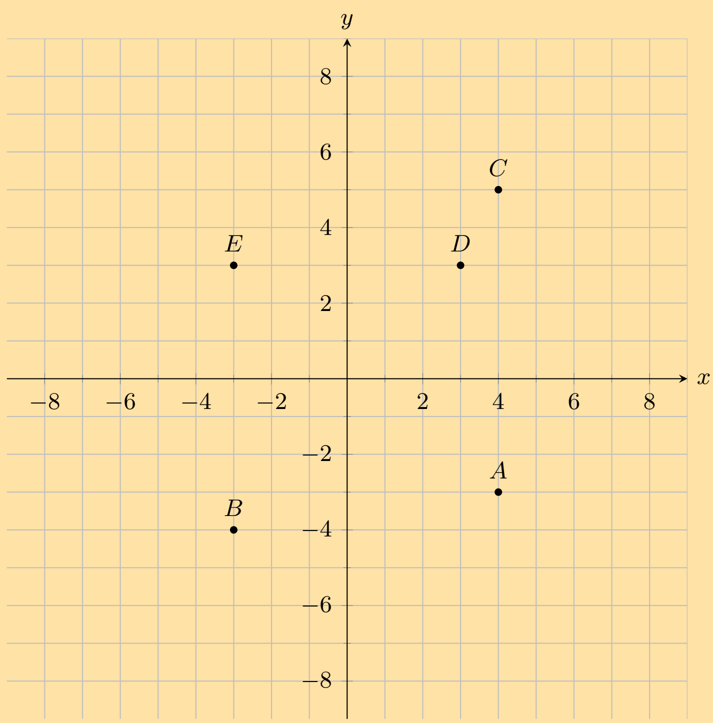
mathopenref.com het baie interaktiewe elemente wat jy kan gebruik terwyl jy analitiese meetkunde onderrig.

8.1 Trek van figure op die Cartesiese vlak

Ons gebruik 'n komma-punt (;) om die x en y waardes te skei, maar die internasionaal aanvaarde metode is om 'n komma te gebruik (,). As 'n komma gebruik word, dan word dit onduidelik of die komma die x en y waardes skei en of een van die waardes 'n desimaal is. Byvoorbeeld, die punt $(5{,}5, 5)$ is dubbelsinnig. Is die x waarde 5,5 of is die y waarde 5,5?

Exercise 8 – 1:

1. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:



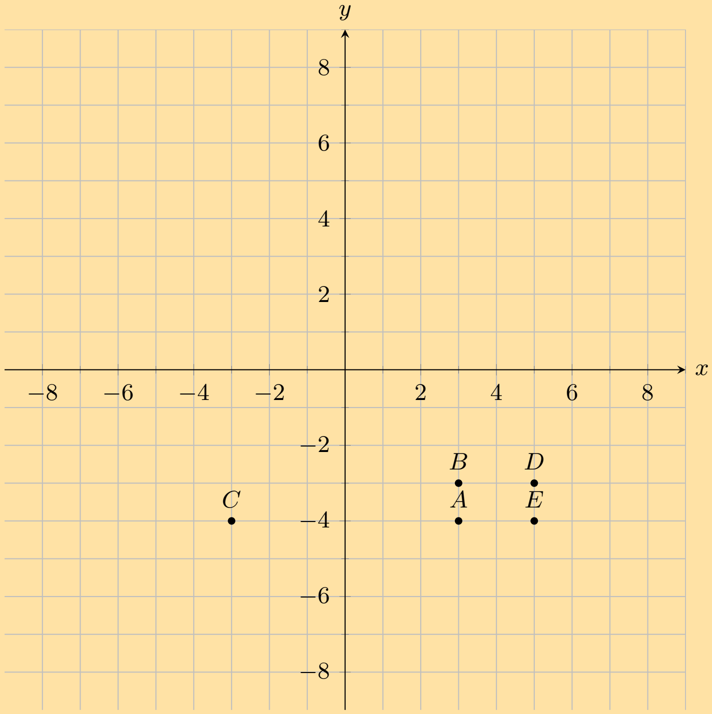
   Vind die koördinate van punt D.

   Oplossing:

   Vir hierdie vraag stel ons slegs belang in punt D. Van die grafiek kan ons die x en y waardes aflees.

   Punt D het die volgende koördinate: $(3;3)$.

2. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:



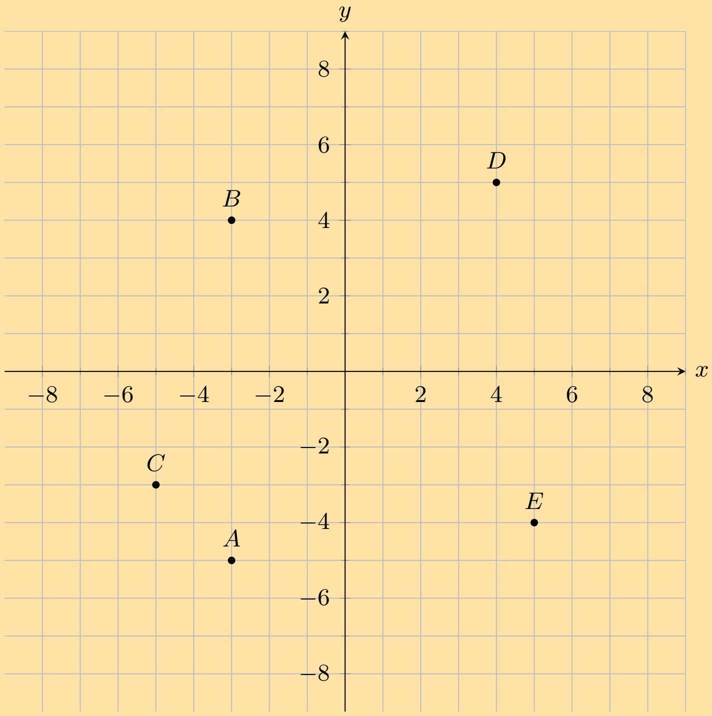
Vind die koördinate van al die benoemde punte.

Oplossing:

Van die grafiek kan ons die x en y waardes aflees vir elke punt.

$A(3;-4)$, $B(3;-3)$, $C(-3;-4)$, $D(5;-3)$ en $E(5;-4)$.

3. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:



Watter punt lê by die koördinate $(5;-4)$?

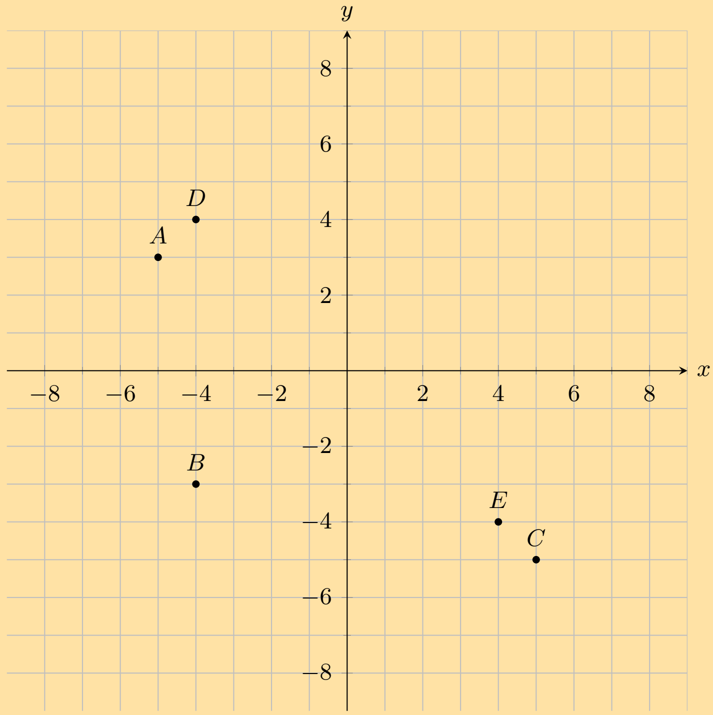
Oplossing:

Vir hierdie vraag moet ons die punt $(5;-4)$ vind.

Op die grafiek kan ons die x en y waardes aflees om uit te vind watter punt lê by die koördinate $(5;-4)$.

As ons dit doen, vind ons E lê by die koördinate $(5; -4)$.

4. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:



Watter punt lê by die koördinate $(-4; -3)$?

Oplossing:

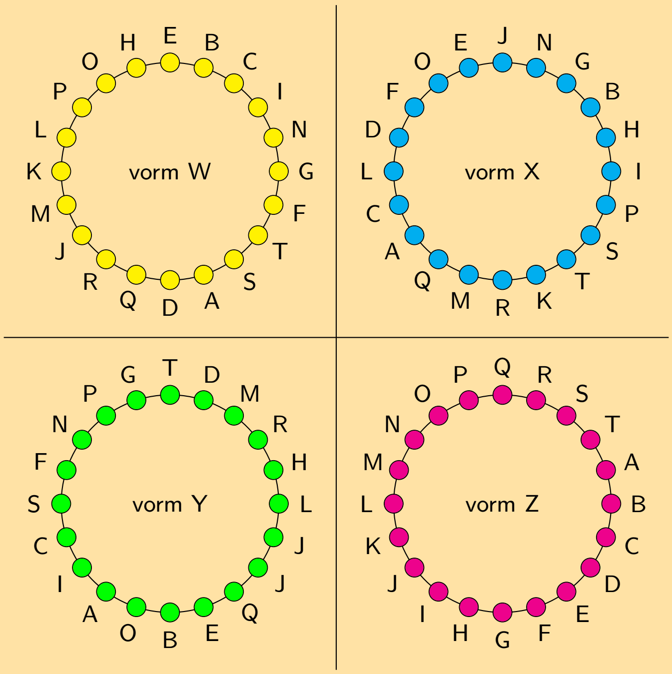
Vir hierdie vraag moet ons die punt $(-4; -3)$ vind.

Op die grafiek kan ons die x en y waardes aflees om uit te vind watter punt lê by die koördinate $(-4; -3)$.

As ons dit doen, vind ons B lê by die koördinate $(-4; -3)$.

5. Die volgende diagram word gegee, met 4 vorme geteken.

Al die vorme is identies, maar gebruik verskillende benoemings konvensies:

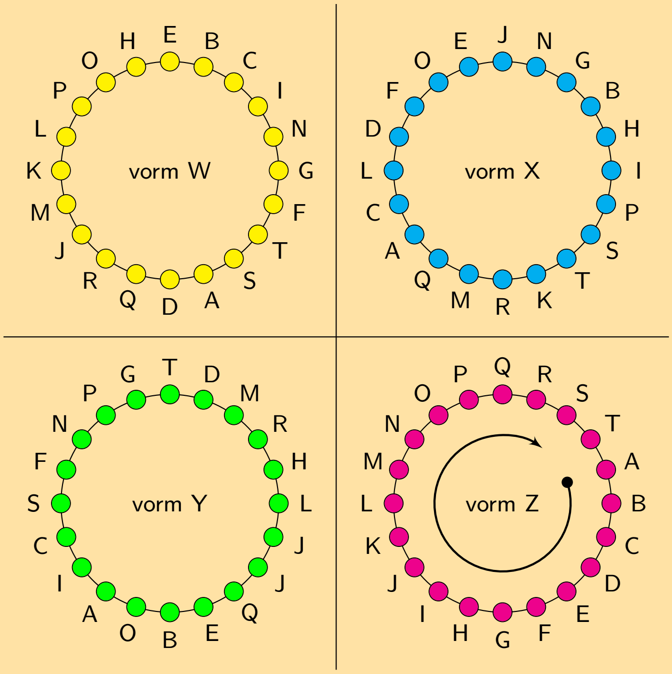


Watter vorm gebruik die korrekte benoeming?

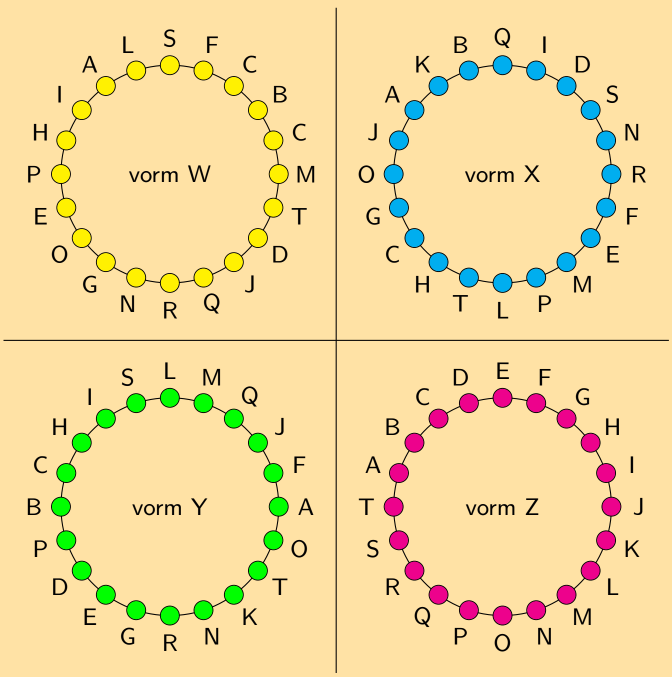
Oplossing:

Ons onthou dat die korrekte benoemingskonvensie vir 'n vorm in **alfabetiese volgorde** is, kloksgewyse of antikloksgewyse rondom die vorm.

Van die diagram kan ons sien dat slegs **vorm Z** hou by die benoemingskonvensie.



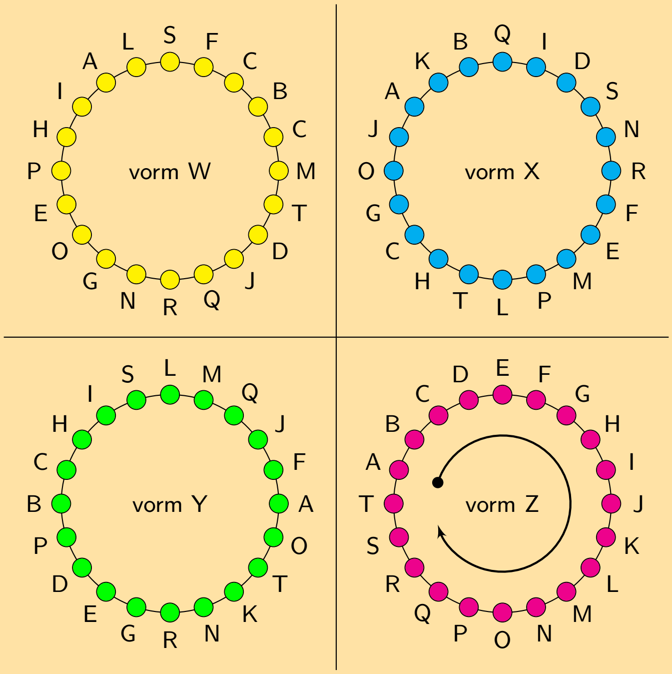
6. Die volgende diagram word gegee, met 4 vorme geteken.
   Al die vorme is identies, maar gebruik verskillende benoemings konvensies:
   Watter vorm gebruik die korrekte benoeming?



Oplossing:

Ons onthou dat die korrekte benoemingskonvensie vir 'n vorm in **alfabetiese volgorde** is, kloksgewyse of antikloksgewyse rondom die vorm.

Van die diagram kan ons sien dat slegs **vorm Z** hou by die benoemingskonvensie.



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

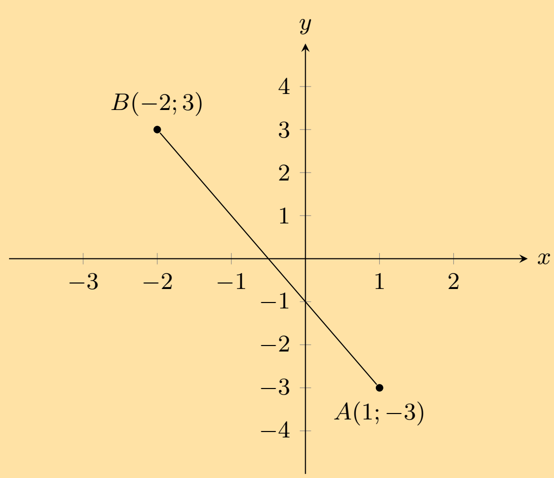
1. 2JYB 2. 2JYC 3. 2JYD 4. 2JYF 5. 2JYG 6. 2JYH

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

8.2 Afstand tussen twee punte

Exercise 8 – 2:

1. Jy word die volgende diagram gegee:



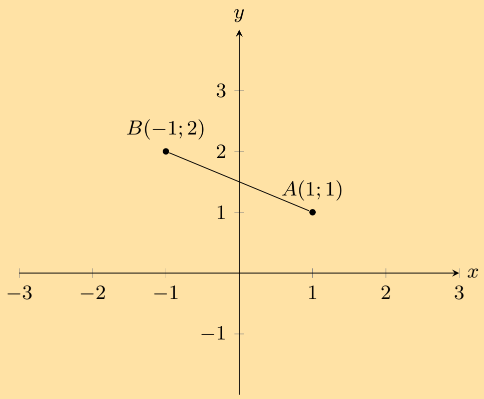
Bereken die lengte van lyn AB, korrek tot 2 desimale plekke.

Oplossing:

Eers herroep ons die vergelyking vir afstand:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-3 - (3))^2} \\ &= \sqrt{(1+2)^2 + (-3 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(3)^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{9 + 36} \\ &= \sqrt{45} \\ &\approx 6{,}71 \end{aligned}$$

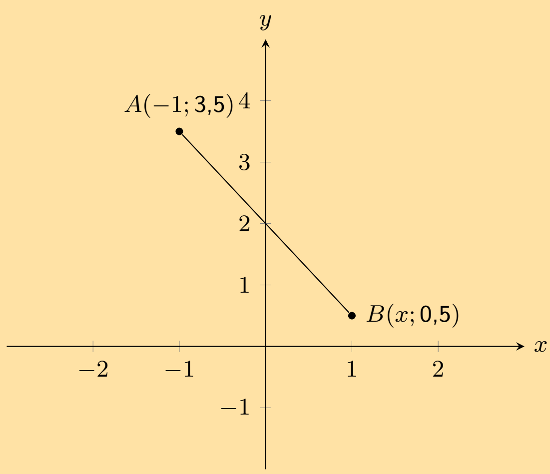
2. Jy word die volgende diagram gegee:



Bereken die lengte van lyn AB, korrek tot 2 desimale plekke.
Oplossing:
Eers herroep ons die vergelyking vir afstand:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - (2))^2} \\ &= \sqrt{(1+1)^2 + (1 - 2)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4 + 1} \\ &= \sqrt{5} \\ &\approx 2{,}24 \end{aligned}$$

3. Die volgende skets toon twee punte op die Cartesiese vlak, A en B.



Die afstand tussen die punte is 3,6056. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

Oplossing:

Eers herroep ons die vergelyking vir afstand:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ 3{,}6056 &= \sqrt{(x - (-1))^2 + (0{,}5 - (3{,}5))^2} \\ 3{,}6056 &= \sqrt{(x+1)^2 + (0{,}5 - 3{,}5)^2} \end{aligned}$$

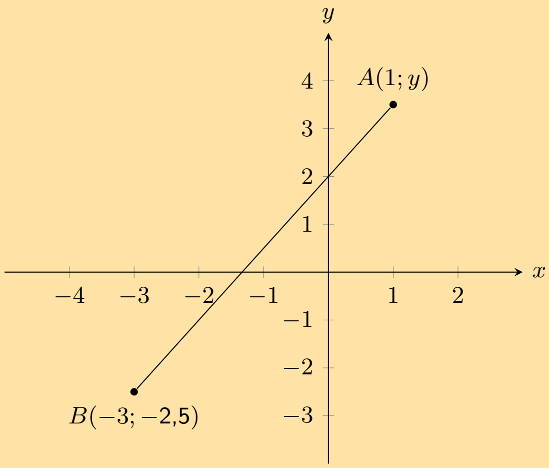
Nou herrangskik ons, en los vir x op:

$$\begin{aligned} (3{,}6056)^2 &= (x+1)^2 + (0{,}5 - 3{,}5)^2 \\ 13 &= (x+1)^2 + (0{,}5 - 3{,}5)^2 \\ 13 &= (x+1)^2 + 9 \\ (x+1)^2 &= 4 \\ x + 1 &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2 - 1 \\ x &= 1 \text{ of } -3 \end{aligned}$$

Ons het nou 'n keuse tussen 2 waardes vir x. Van die diagram kan ons sien dat die toepaslike waarde vir hierdie vraag $x = 1$ is.

Let op dat in hierdie geval kan ons die diagram gebruik om te kontroleer dat ons antwoord geldig is, maar ons kan ook die afstand van AB bereken deur gebruik te maak van ons antwoord.

4. Die volgende skets toon twee punte op die Cartesiese vlak, A en B.



Die lyn AB het 'n lengte van 7,2111. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B. Rond jou antwoord af tot een desimale plek.

Oplossing:

Eers herroep ons die vergelyking vir afstand:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ 7{,}2111 &= \sqrt{(1 - (-3))^2 + (y - (-2{,}5))^2} \\ 7{,}2111 &= \sqrt{(1+3)^2 + (y + 2{,}5)^2} \end{aligned}$$

Nou herrangskik ons, en los vir y op:

$$\begin{aligned} (7{,}2111)^2 &= (1+3)^2 + (y+2{,}5)^2 \\ 52 &= (1+3)^2 + (y+2{,}5)^2 \\ 52 &= (y+2{,}5)^2 + 16 \\ (y+2{,}5)^2 &= 36 \\ y + 2{,}5 &= \pm\sqrt{36} \\ y &= \pm 6 - 2{,}5 \\ y &= 3{,}5 \text{ of } -8{,}5 \end{aligned}$$

Ons het nou 'n keuse tussen 2 waardes vir y. Van die diagram kan ons sien dat die toepaslike waarde vir hierdie vraag $y = 3{,}5$ is.

Let op dat in hierdie geval kan ons die diagram gebruik om te kontroleer dat ons antwoord geldig is, maar ons kan ook die afstand van AB bereken deur gebruik te maak van ons antwoord.

5. Vind die lengte van AB vir elk van die volgende. Laat jou antwoord in wortelvorm.

a) $A(2;7)$ en $B(-3;5)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(2 - (-3))^2 + (7 - 5)^2} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

b) $A(-3;5)$ en $B(-9;1)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(-3 - (-9))^2 + (5 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(6)^2 + (4)^2} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

c) $A(x;y)$ en $B(x+4;y-1)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x - (x+4))^2 + (y - (y-1))^2} \\ &= \sqrt{(x - x - 4)^2 + (y - y + 1)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

6. Die lengte van $CD = 5$. Vind die ontbrekende koördinaat as:

a) $C(6;-2)$ en $D(x;2)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} d_{CD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ 5 &= \sqrt{(6 - x)^2 + (-2 - 2)^2} \\ 5^2 &= 36 - 12x + x^2 + 16 \\ 0 &= x^2 - 12x + 36 - 25 + 16 \\ &= x^2 - 12x + 27 \\ &= (x-3)(x-9) \end{aligned}$$

Dus $x = 3$ of $x = 9$.

Kontroleer oplossing vir $x = 3$:

$$\begin{aligned} d_{CD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(6 - 3)^2 + (-2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Oplossing geldig
Kontroleer oplossing vir $x = 9$:

$$\begin{aligned}
d_{CD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(6 - 9)^2 + (-2 - 2)^2} \\
&= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}$$

Oplossing geldig

b) $C(4; y)$ en $D(1; -1)$.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
d_{CD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
5 &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (y + 1)^2} \\
5^2 &= 9 + y^2 + 2y + 1 \\
0 &= y^2 + 2y + 1 + 9 - 25 \\
&= y^2 + 2y - 15 \\
&= (y - 3)(y + 5)
\end{aligned}$$

Dus $y = 3$ of $y = -5$.
Kontroleer oplossing vir $y = 3$:

$$\begin{aligned}
d_{CD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 + 1)^2} \\
&= \sqrt{3^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}$$

Oplossing geldig
Kontroleer oplossing vir $y = -5$:

$$\begin{aligned}
d_{CD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(4 - 1)^2 + (-5 + 1)^2} \\
&= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}$$

Oplossing geldig

7. As die afstand tussen $C(0; -3)$ en $F(8; p)$ 10 eenhede is, vind die moontlike waardes van p.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
10 &= \sqrt{(8 - 0)^2 + (p + 3)^2} \\
&= \sqrt{8^2 + (p + 3)^2} \\
100 &= 8^2 + (p + 3)^2 \\
36 &= p^2 + 6p + 9 \\
0 &= p^2 + 6p - 27 \\
&= (p - 3)(p + 9) \\
\therefore p &= 3 \text{ of } p = -9
\end{aligned}$$

Kontroleer $p = 3$:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(8 - 0)^2 + (3 + 3)^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Oplossing geldig
Kontroleer $p = -9$:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(8 - 0)^2 + (-9 + 3)^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Oplossing geldig
Dus $p = 3$ of $p = -9$.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2JYK 2. 2JYM 3. 2JYN 4. 2JYP 5a. 2JYQ 5b. 2JYR
5c. 2JYS 6a. 2JYT 6b. 2JYV 7. 2JYW

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

8.3 Gradiënt van 'n lyn

Exercise 8 – 3:

1. Vind die gradiënt van AB as:

   a) $A(7; 10)$ en $B(-4; 1)$
   Oplossing:
   Gestel die koördinate van A is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van B is $(x_2; y_2)$

   $$x_1 = 7 \quad y_1 = 10 \quad x_2 = -4 \quad y_2 = 1$$

   $$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1 - 10}{-4 - 7} \\ &= \frac{9}{11} \end{aligned}$$

   b) $A(-5; -9)$ en $B(3; 2)$
   Oplossing:
   Gestel die koördinate van A is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van B is $(x_2; y_2)$

$$x_1 = -5 \quad y_1 = -9 \quad x_2 = 3 \quad y_2 = 2$$

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{2 - (-9)}{3 - (-5)} \\ &= \frac{11}{8} \end{aligned}$$

c) $A(x-3;y)$ en $B(x;y+4)$

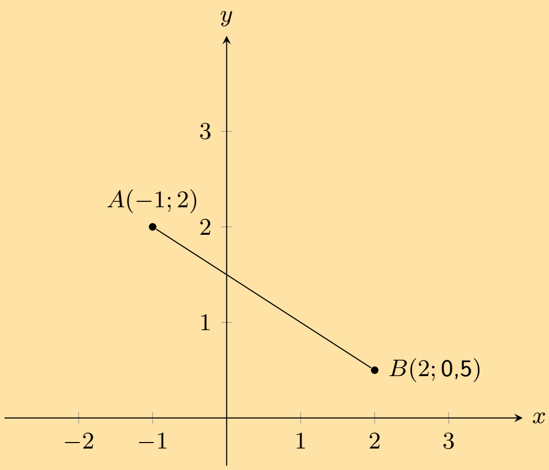
Oplossing:

Gestel die koördinate van A is $(x_1;y_1)$ en die koördinate van B is $(x_2;y_2)$

$$x_1 = x - 3 \quad y_1 = y \quad x_2 = x \quad y_2 = y + 4$$

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{y + 4 - y}{x - (x - 3)} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2. Jy word die volgende diagram gegee:



Bereken die gradiënt (m) van lyn AB.

Oplossing:

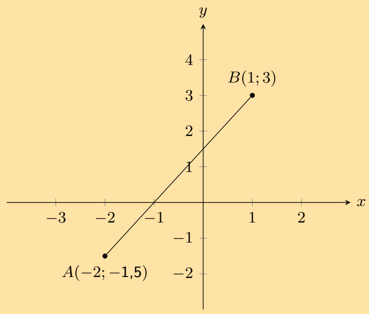
Gestel die koördinate van A is $(x_1;y_1)$ en die koördinate van B is $(x_2;y_2)$

$$x_1 = -1 \quad y_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad y_2 = 0{,}5$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{(0{,}5) - (2)}{(2) - (-1)} \\ &= \frac{-1{,}5}{3} \\ &= -0{,}5 \end{aligned}$$

Dus is die gradiënt m van die lyn AB $-0{,}5$.

3. Bereken die gradiënt (m) van lyn AB in die volgende diagram:



Oplossing:
Gestel die koördinate van A is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van B is $(x_2; y_2)$
$x_1 = -2 \quad y_1 = -1{,}5 \quad x_2 = 1 \quad y_2 = 3$

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{(3) - (-1{,}5)}{(1) - (-2)} \\ &= \frac{4{,}5}{3} \\ &= 1{,}5 \end{aligned}$$

Dus is die gradiënt m van die lyn AB 1,5.

4. As die gradiënt van $CD = \frac{2}{3}$, vind p, gegewe:

   a) $C(16; 2)$ en $D(8; p)$.

   Oplossing:
   Gestel die koördinate van C is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van D is $(x_2; y_2)$
   $x_1 = 16 \quad y_1 = 2 \quad x_2 = 8 \quad y_2 = p$

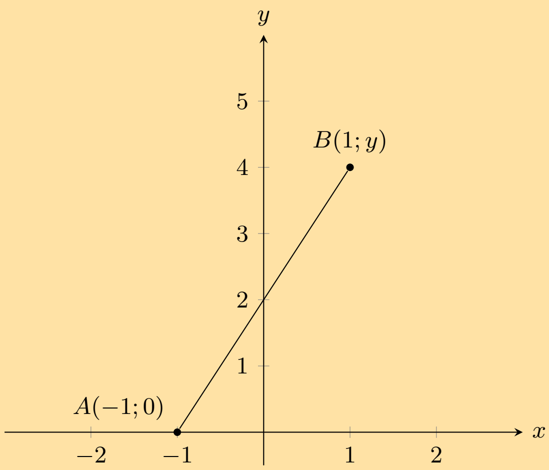
$$\begin{aligned} m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{2}{3} &= \frac{p - 2}{8 - 16} \\ \frac{2}{3} \times (-8) &= p - 2 \\ \frac{-16}{3} + 2 &= p \\ \frac{-16 + 6}{3} &= p \\ \frac{-10}{3} &= p \end{aligned}$$

   b) $C(3; 2p)$ en $D(9; 14)$.

   Oplossing:
   Gestel die koördinate van C is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van D is $(x_2; y_2)$
   $x_1 = 3 \quad y_1 = 2p \quad x_2 = 9 \quad y_2 = 14$

$$\begin{aligned} m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{2}{3} &= \frac{14 - 2p}{9 - 3} \\ \frac{2}{3} \times (6) &= 14 - 2p \\ 4 &= 14 - 2p \\ 2p &= 14 - 4 \\ p &= \frac{10}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

5. In die volgende diagram lyn AB 'n gradiënt (m) het van 2.
Bereken die ontbrekende koördinaat van die punt B.

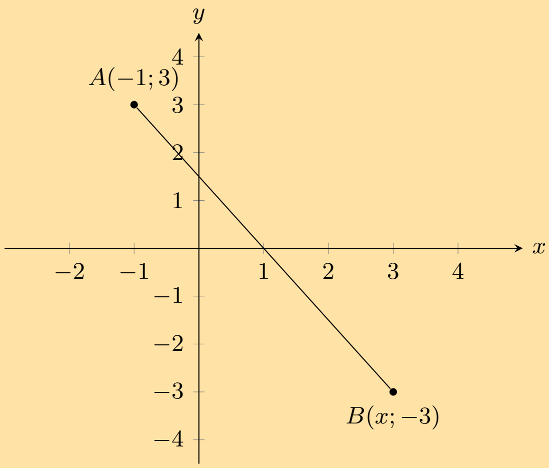


Oplossing:
Gestel die koördinate van A is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van B is $(x_2; y_2)$

$$x_1 = -1 \quad y_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad y_2 = y$$

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ 2 &= \frac{y - 0}{1 - (-1)} \\ 2 &= \frac{y}{2} \\ 4 &= y \end{aligned}$$

6. Jy word die volgende diagram gegee:



Dit word ook gegee dat lyn AB 'n gradiënt (m) het van van $-1{,}5$.
Bereken die ontbrekende koördinaat van die punt$B$.
Oplossing:
Gestel die koördinate van A is $(x_1; y_1)$ en die koördinate van B is $(x_2; y_2)$

$$x_1 = -1 \quad y_1 = 3 \quad x_2 = x \quad y_2 = -3$$

$$
\begin{aligned}
m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
-1{,}5 &= \frac{-3 - 3}{x - (-1)} \\
-1{,}5 &= \frac{-6}{x + 1} \\
-1{,}5(x + 1) &= -6 \\
-1{,}5x - 1{,}5 &= -6 \\
1{,}5x &= 4{,}5 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JYY 1b. 2JYZ 1c. 2JZ2 2. 2JZ3 3. 2JZ4 4a. 2JZ5
4b. 2JZ6 5. 2JZ7 6. 2JZ8

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Reguitlyne

Die uitgewerkte voorbeeld hieronder toon een metode om die vergelyking van 'n reguitlyn te bepaal. Die vergelyking van 'n reguitlyn kan ook bepaal word deur eers die gradiënt te kry en dan een van die punte te substitueer in $y = mx + c$.

Ewewydige en loodregte lyne

Horisontale en vertikale lyne

Punte op 'n lyn

Exercise 8 – 4:

1. Bepaal of AB en CD ewewydig is, of loodreg of nie een van die twee nie:

   a) $A(3;-4)$, $B(5;2)$, $C(-1;-1)$, $D(7;23)$

   Oplossing:

   Ons moet die gradiënte van lyne AB en CD bereken. Dan kan ons die gradiënte vergelyk om te bepaal of die lyne ewewydig is (die gradiënte is dieselfde), loodreg (die gradiënte is die negatiewe inverses van mekaar) of nie een van die twee nie.

$$
\begin{aligned}
m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{2 - (-4)}{5 - 3} \\
&= \frac{6}{2} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

   En:

$$
\begin{aligned}
m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{23 - (-1)}{7 - (-1)} \\
&= \frac{24}{8} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Dus:

$$
\begin{aligned}
m_{AB} &= m_{CD} \\
\therefore AB &\parallel CD
\end{aligned}
$$

Lyne AB en CD is ewewydig of parallel.

b) $A(3;-4)$, $B(5;2)$, $C(-1;-1)$, $D(0;-4)$

Oplossing:

Ons moet die gradiënte van lyne AB en CD bereken. Dan kan ons die gradiënte vergelyk om te bepaal of die lyne ewewydig is (die gradiënte is dieselfde), loodreg (die gradiënte is die negatiewe inverses van mekaar) of nie een van die twee nie.

$$
\begin{aligned}
m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{2 - (-4)}{5 - 3} \\
&= \frac{6}{2} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

En:

$$
\begin{aligned}
m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-4 - (-1)}{0 - (-1)} \\
&= \frac{-3}{1} \\
&= -3
\end{aligned}
$$

Dus $m_{AB} \neq m_{CD}$. Gevolglik is AB nie ewewydig aan CD nie.

En $m_{AB} \times \frac{1}{m_{CD}} \neq -1$. Dus AB en CD is nie loodreg op mekaar nie.

Lyne AB en CD is nie een van die twee nie: nie ewewydig of loodreg nie.

c) $A(3;-4)$, $B(5;2)$, $C(-1;3)$, $D(-2;2)$

Oplossing:

Ons moet die gradiënte van lyne AB en CD bereken. Dan kan ons die gradiënte vergelyk om te bepaal of die lyne ewewydig is (die gradiënte is dieselfde), loodreg (die gradiënte is die negatiewe inverses van mekaar) of nie een van die twee nie.

$$
\begin{aligned}
m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{2 - (-4)}{5 - 3} \\
&= \frac{6}{2} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

En:

$$\begin{aligned} m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{2-3}{1-(-2)} \\ &= \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

Dus $m_{AB} \neq m_{CD}$. Gevolglik is AB nie ewewydig aan CD nie.
En $m_{AB} \times \frac{1}{m_{CD}} = -1$. Dus AB en CD is loodreg.

2. Bepaal of die volgende punte op dieselfde reguitlyn lê:

a) $E(0;3)$, $F(-2;5)$, $G(2;1)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{EF} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{5-3}{-2-0} \\ &= \frac{2}{-2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

En,

$$\begin{aligned} m_{FG} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1-5}{2-(-2)} \\ &= \frac{-4}{4} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Dus $m_{EF} = m_{FG}$ en F is 'n gemeenskaplike punt. Gevolglik is E, F en G saamlynig (hulle lê op dieselfde lyn).

b) $H(-3;-5)$, $I(0;0)$, $J(6;10)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{HI} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0-(-5)}{0-(-3)} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

En,

$$\begin{aligned} m_{IJ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{10-0}{6-0} \\ &= \frac{10}{6} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Dus $m_{HI} = m_{IJ}$ en I is 'n gemeenskaplike punt. Gevolglik is H, I en J saamlynig (hulle lê op dieselfde lyn).

c) $K(-6;2)$, $L(-3;1)$, $M(1;-1)$

Oplossing:

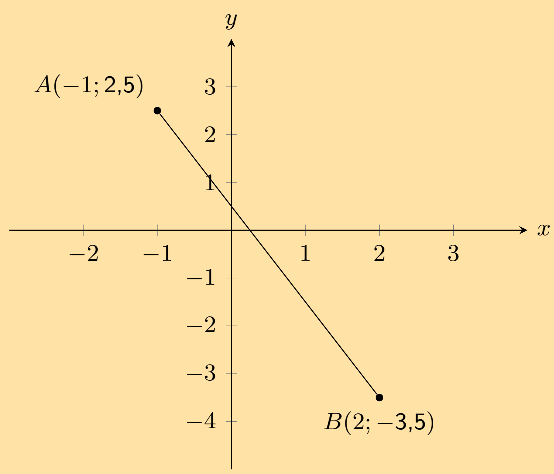
$$\begin{aligned} m_{KL} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1 - 2)}{-3 - (-6)} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

En,

$$\begin{aligned} m_{LM} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-1 - 1}{1 - (-3)} \\ &= \frac{-2}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $m_{KL} \neq m_{LM}$.Gevolglik is K, L en M nie ko-lineêr nie (hulle lê nie op dieselfde lyn nie).

3. Bereken die vergelyking van die lyn AB in die volgende diagram:



Oplossing:
Om die vergelyking van die reguitlyn te bepaal, bereken ons eers die gradiënt (m) van die lyn AB:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ m &= \frac{(-3{,}5) - (2{,}5)}{(2) - (-1)} \\ m &= -2 \end{aligned}$$

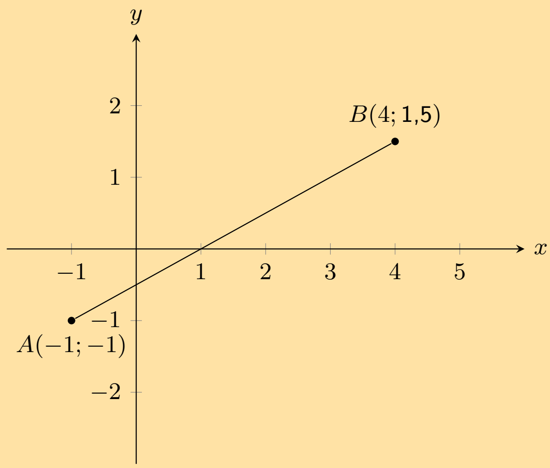
Tweedens bereken ons die waarde van die y-afsnit (c) van die lyn AB. Ons doen dit deur substitusie van enige van die twee punte, A of B, in die algemene vorm van die reguitlyn in. Ons sal die punt A gebruik.

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ (2{,}5) &= (-2) \times (-1) + c \\ c &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking van die lyn AB die volgende:

$$y = -2x + 0{,}5$$

4. Bereken die vergelyking van die lyn AB in die volgende diagram:



Oplossing:
Om die vergelyking van die reguitlyn te bepaal, bereken ons eers die gradiënt (m) van die lyn AB:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\
m &= \frac{(1{,}5) - (-1)}{(4) - (-1)} \\
m &= 0{,}5
\end{aligned}
$$

Tweedens bereken ons die waarde van die y-afsnit (c) van die lyn AB. Ons doen dit deur substitusie van enige van die twee punte, A of B, in die algemene vorm van die reguitlyn in. Ons sal die punt A gebruik.

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
(-1) &= (0{,}5) \times (-1) + c \\
c &= -0{,}5
\end{aligned}
$$

Dus is die vergelyking van die lyn AB die volgende:

$$y = 0{,}5x - 0{,}5$$

5. Punte $P(-6; 2)$, $Q(2; -2)$ en $R(-3; r)$ lê op 'n reguitlyn. Vind die waarde van r.

Oplossing:
Aangesien die drie punte op 'n reguitlyn lê, kan ons die feit gebruik dat die gradiënt van PQ gelyk is aan die gradiënt van QR om r te vind.
Die gradiënt van PQ is:

$$
\begin{aligned}
m_{PQ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-2 - 2}{2 - (-6)} \\
&= \frac{-4}{8} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

En die gradiënt van QR in terme van r is:

$$
\begin{aligned}
m_{QR} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{r - (-2)}{-3 - 2} \\
&= \frac{r + 2}{-5}
\end{aligned}
$$

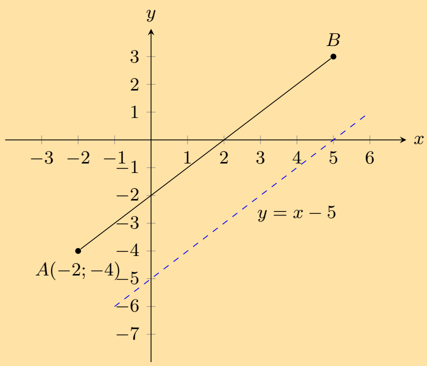
Nou stel ons $m_{PR} = m_{QR} = -\frac{1}{2}$ en los vir r op:

$$-\frac{1}{2} = \frac{r+2}{-5}$$
$$(-1) \times (-5) = 2(r+2)$$
$$5 = 2r + 4$$
$$5 - 4 = 2r$$
$$1 = 2r$$
$$r = \frac{1}{2}$$

6. Lyn PQ met $P(-1;-7)$ en $Q(q;0)$ het 'n gradiënt van 1. Vind q.
   Oplossing:

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$1 = \frac{0-(-7)}{q-(-1)}$$
$$q + 1 = 7$$
$$q = 6$$

7. Jy word die volgende diagram gegee:

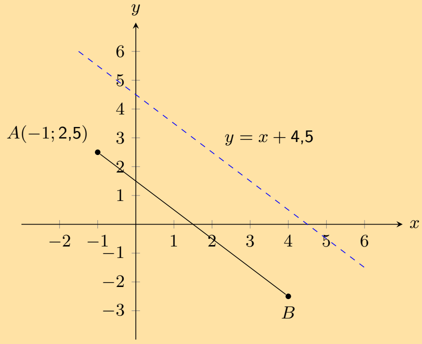


   Jy weet ook dat die lyn AB ewewydig loop aan die volgende lyn: $y = x - 5$. Punt A is by $(-2;-4)$.
   Vind die vergelyking van die lyn AB.
   Oplossing:
   Ons weet dat lyn AB ewewydig is aan $y = x-5$, dus is die gradiënt van lyn AB gelyk aan die gradiënt van $y = x-5$.
   Die gradiënt van $y = x - 5$ is 1.
   Nou kan ons punt A en die gradiënt van die lyn gebruik om die y-afsnit van die lyn te vind:

$$y = mx + c$$
$$(-4) = (1)(-2) + c$$
$$c = -2$$

   Dus is die vergelyking van die lyn AB: $y = x - 2$.

8. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy weet ook dat die lyn AB ewewydig loop aan die volgende lyn: $y = -x + 4{,}5$. Punt A is by $(-1; 2{,}5)$. Vind die vergelyking van die lyn AB.

Oplossing:

Ons weet dat lyn AB ewewydig is aan $y = -x + 4{,}5$, dus is die gradiënt van lyn AB gelyk aan die gradiënt van $y = -x + 4{,}5$. Die gradiënt van $y = -x + 4{,}5$ is -1.

Nou kan ons punt A en die gradiënt van die lyn gebruik om die y-afsnit van die lyn te vind:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ (2{,}5) &= (-1) \times (-1) + c \\ c &= 1{,}5 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking van die lyn AB: $y = -x + 1{,}5$.

9. Gegewe lyn AB wat ewewydig loop aan $y = 0{,}5x - 6$. Punte $A(-1; -2{,}5)$ en $B(x; 0)$ word ook gegee. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

Oplossing:

Ons weet dat lyn AB ewewydig is aan $y = 0{,}5x - 6$, dus is die gradiënt van lyn AB gelyk aan die gradiënt van $y = 0{,}5x - 6$. Die gradiënt van $y = 0{,}5x - 6$ is $0{,}5$.

Nou kan ons punt A en die gradiënt van die lyn gebruik om die y-afsnit van die lyn te vind:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ (-2{,}5) &= (0{,}5)(-1) + c \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking van lyn AB: $y = 0{,}5x - 2$.

Nou kan ons punt B substitueer in die vergelyking van lyn AB om vir x op te los:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}5x - 2 \\ 0 &= 0{,}5x - 2 \\ 4 &= x \end{aligned}$$

Dus is die koördinate van punt B $(0; 4)$.

10. Gegewe lyn AB wat ewewydig loop aan $y = -1{,}5x + 4$. Punte $A(-2; 4)$ en $B(2; y)$ word ook gegee. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt $B(2; y)$.

Oplossing:

Ons weet dat lyn AB ewewydig is aan $y = -1{,}5x + 4$, dus is die gradiënt van lyn AB gelyk aan die gradiënt van $y = -1{,}5x + 4$. Die gradiënt van $y = -1{,}5x + 4$ is $-1{,}5$.

Nou kan ons punt A en die gradiënt van die lyn gebruik om die y-afsnit van die lyn te vind:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ (4) &= (-1{,}5)(-2) + c \\ c &= 1 \end{aligned}$$

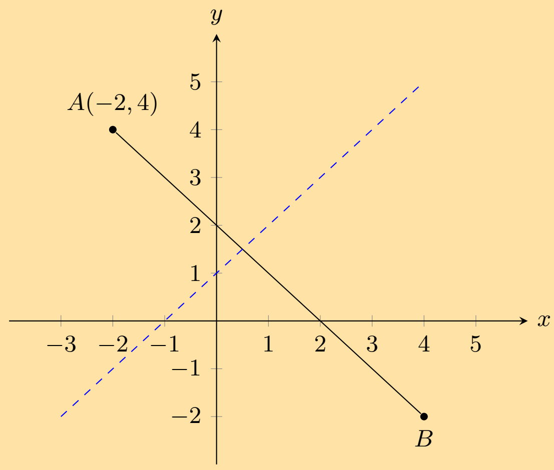
Dus is die vergelyking van lyn AB: $y = -1{,}5x + 1$.

Nou kan ons punt B substitueer in die vergelyking van lyn AB om vir x op te los:

$$\begin{aligned} y &= -1{,}5x + 1 \\ y &= -1{,}5(2) + 1 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Dus is die koördinate van punt B $(2; -2)$.

11. Die grafiek toon die lyn AB. Die blou stippellyn is loodreg op AB.



Die vergelyking van die blou stippellyn is $y = x + 1$. Punt A is by $(-2; 4)$.
Bepaal die vergelyking van lyn AB.

Oplossing:

Die algemene vorm van die reguitlyn is: $y = mx + c$.

Lyn AB is loodreg op die blou stippellyn en dus $m_{AB} = \frac{-1}{m_{\text{blou lyn}}}$.

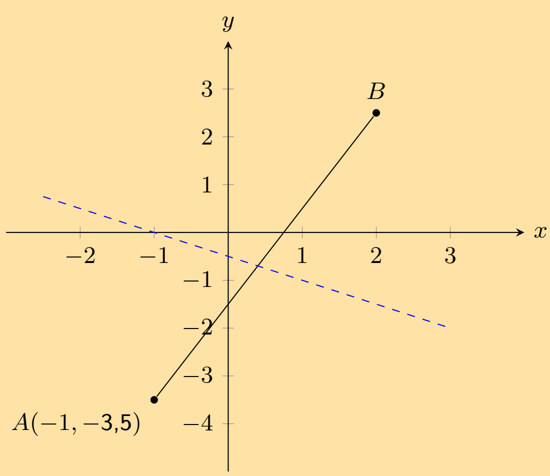
$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ y &= \left(\frac{-1}{m_{\text{blou lyn}}}\right)x + c \\ y &= \left(\frac{-1}{1}\right)x + c \\ y &= -x + c \end{aligned}$$

Nou kan ons die koördinate van punt A substitueer om die y-afsnit te vind:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ (4) &= (-1)(-2) + c \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking van die lyn AB: $y = -x + 2$.

12. Die grafiek toon die lyn AB. Die blou stippellyn is loodreg op AB.



Die vergelyking van die blou stippellyn is $y = -0{,}5x - 0{,}5$. Punt A is by $(-1; -3{,}5)$.
Bepaal die vergelyking van lyn AB.

Oplossing:

Die algemene vorm van die reguitlyn is: $y = mx + c$.

Lyn AB is loodreg op die blou stippellyn en dus $m_{AB} = \frac{-1}{m_{\text{blou lyn}}}$.

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
y &= \left(\frac{-1}{m_{\text{blou lyn}}}\right) x + c \\
y &= \left(\frac{-1}{-0{,}5}\right) x + c \\
y &= 2x + c
\end{aligned}
$$

Nou kan ons die koördinate van punt A substitueer om die y-afsnit te vind:

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
(-3{,}5) &= (2)(-1) + c \\
c &= -1{,}5
\end{aligned}
$$

Dus is die vergelyking van die lyn AB: $y = 2x - 1{,}5$.

13. Gegewe lyn AB wat loodreg is op die lyn CD met vergelyking $y = -2x + 1$. Punte $A(-5; -1)$ en $B(3; a)$ is ook gegee.
    Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.
    Oplossing:
    Die algemene vorm van die reguitlyn is: $y = mx + c$.
    Lyn AB is loodreg op lyn CD en dus $m_{AB} = \frac{-1}{m_{CD}}$.

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
y &= \left(\frac{-1}{m_{CD}}\right) x + c \\
y &= \left(\frac{-1}{-2}\right) x + c \\
y &= 0{,}5x + c
\end{aligned}
$$

Nou kan ons punt A vervang in die vergelyking om die y-afsnit te vind:

$$
\begin{aligned}
y &= 0{,}5x + c \\
-1 &= (0{,}5)(-5) + c \\
c &= 1{,}5
\end{aligned}
$$

Vervolgens kan ons punt B vervang om die ontbrekende koördinaat te vind:

$$
\begin{aligned}
y &= 0{,}5x + 1{,}5 \\
a &= (0{,}5)(3) + 1{,}5 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Dus is die ontbrekende koördinaat $B(3; 3)$.

14. Gegewe lyn AB wat loodreg is op die lyn CD met vergelyking $y = 2x - 0{,}75$. Punte $A(-5; 1)$ en $B(a; -2{,}5)$ is ook gegee.
    Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.
    Oplossing:
    Die algemene vorm van die reguitlyn is: $y = mx + c$.
    Lyn AB is loodreg op lyn CD en dus $m_{AB} = \frac{-1}{m_{CD}}$.

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
y &= \left(\frac{-1}{m_{CD}}\right) x + c \\
y &= \left(\frac{-1}{2}\right) x + c \\
y &= -0{,}5x + c
\end{aligned}
$$

Nou kan ons punt A vervang in die vergelyking om die y-afsnit te vind:

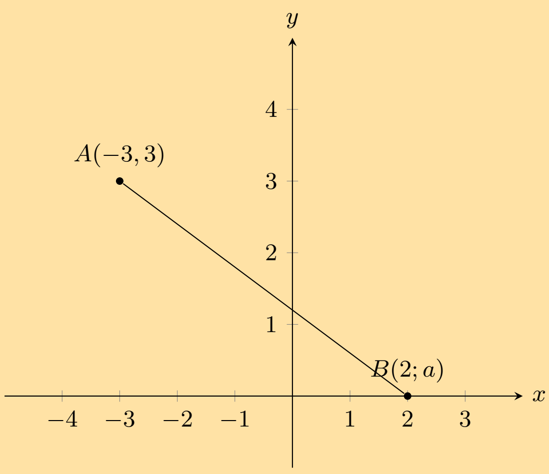
$$
\begin{aligned}
y &= -0{,}5x + c \\
1 &= (0{,}5)(-5) + c \\
c &= -1{,}5
\end{aligned}
$$

Vervolgens kan ons punt B vervang om die ontbrekende koördinaat te vind:

$$
\begin{aligned}
y &= 0{,}5x - 1{,}5 \\
-2{,}5 &= 0{,}5a - 1{,}5 \\
a &= -2
\end{aligned}
$$

Dus is die ontbrekende koördinaat $B(-2; -2{,}5)$.

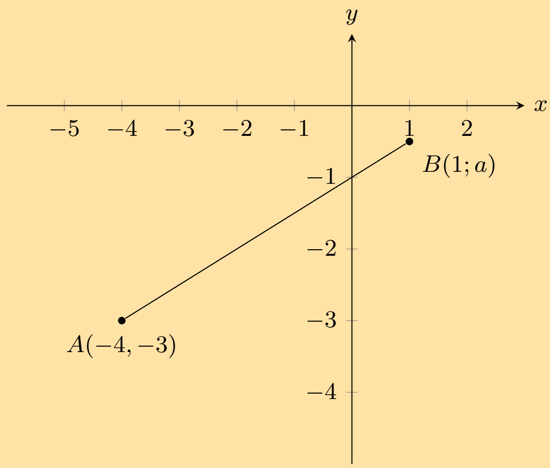
15. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy weet ook lyn AB het die volgende vergelyking: $y = -0{,}5x + 1{,}5$.
Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.
Oplossing:
Ons substitueer die bekende waarde vir punt B in die vergelyking en los die onbekende waarde op:

$$
\begin{aligned}
y &= (-0{,}5)x + 1{,}5 \\
a &= (-0{,}5)(2) + 1{,}5 \\
&= 0{,}5
\end{aligned}
$$

16. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy weet ook lyn AB het die volgende vergelyking: $y = 0{,}5x - 1$.
Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.
Oplossing:
Ons substitueer die bekende waarde vir punt B in die vergelyking en los die onbekende waarde op:

$$\begin{aligned} y &= (0{,}5)x - 1 \\ a &= (0{,}5)(1) - 1 \\ &= -0{,}5 \end{aligned}$$

17. A is die punt $(-3;-5)$ en B is die punt $(n;-11)$. AB is loodreg op lyn CD met vergelyking $y = \frac{3}{2}x - 5$. Vind die waarde van n.
Oplossing:
Lyn AB is loodreg op lyn CD en dus $m_{AB} = \dfrac{-1}{m_{CD}}$.

$$\begin{aligned} m_{AB} &= -1 \div \frac{3}{2} \\ &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

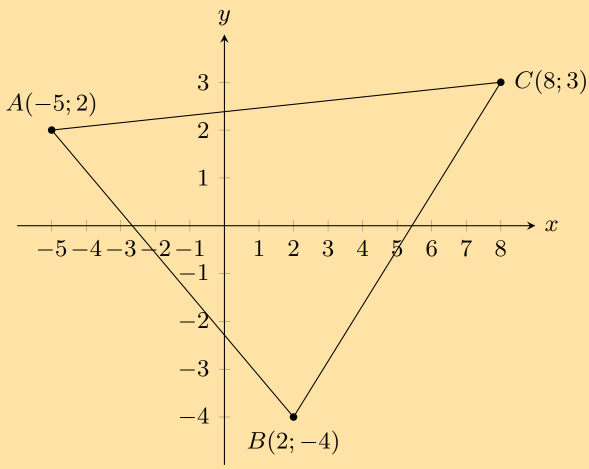
Dus:

$$\begin{aligned} \frac{-2}{3} &= \frac{-11-(-5)}{n-(-3)} \\ \frac{-2}{3} &= \frac{-6}{n+3} \\ \frac{-2}{3}(n+3) &= -6 \\ -2(n+3) &= -18 \\ n+3 &= 9 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

18. Die punte $A(4;-3)$, $B(-5;0)$ en $C(-3;p)$ word gegee. Bepaal die waarde van p as A, B en C saamlynig is.
Oplossing:
Ons weet dat A, B en C ko-lineêr is, dus $m_{AB} = m_{BC}$.

$$\begin{aligned} \frac{0+3}{-5-4} &= \frac{p}{-3+5} \\ \frac{3}{-9} &= \frac{p}{2} \\ \therefore p &= \frac{6}{-9} \\ &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

19. Verwys na die diagram hieronder:



a) Toon dat $\triangle ABC$ reghoekig is. Toon jou bewerkings.

Oplossing:

Om te wys dat $\triangle ABC$ reghoekig is, moet ons toon dat $AB \perp AC$ of dat $AC \perp BC$ of $AB \perp BC$. Ons kan dit doen deur die berekening van die gradiënte van AB, AC en BC en deur dan te kyk of hierdie gradiënte die negatiewe inverse is van enige van die ander twee gradiënte.

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{-4-2}{2-(-5)} \\ &= \frac{-6}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{-4-3}{2-8} \\ &= \frac{-7}{-6} \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{AC} &= \frac{3-2}{8-(-5)} \\ &= \frac{1}{13} \end{aligned}$$

Nou let ons op dat:

$$m_{AB} \times m_{BC} = \frac{-6}{7} \times \frac{7}{6} = -1$$
$$\therefore AB \perp BC$$
$$\therefore \triangle ABC \text{ is reghoekig}$$

b) Vind die area van $\triangle ABC$.

Oplossing:

Hierdie is 'n reghoekige driehoek (met regte hoek $A\hat{B}C$) en dus is die loodregte hoogte die lengte van een van die sye. Ons gebruik sy BC as die loodregte hoogte en sy AB as die basis.

Let daarop dat ons nie sy AC kan gebruik vir die basis of die hoogte nie omdat ons dan 'n nuwe loodregte hoogte moet konstrueer vanaf A na B en dan die lengte van daardie lyn moet bereken.

Die lengte van BC is:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-5-2)^2 + (2+4)^2} \\ &= \sqrt{49+36} \\ &= \sqrt{85} \end{aligned}$$

Die lengte van AB is:

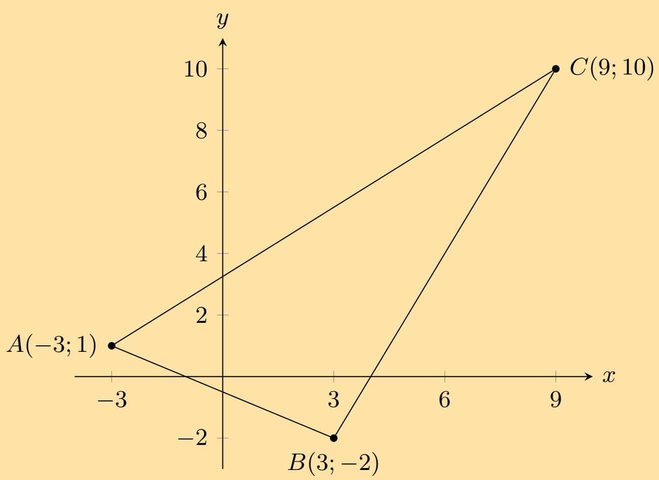
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(8-2)^2 + (3+4)^2} \\ &= \sqrt{36+49} \\ &= \sqrt{85} \end{aligned}$$

Dus die area van $\triangle ABC$ is:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}(AB)(BC) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{85}\right)\left(\sqrt{85}\right) \\ &= \frac{1}{2}(85) \\ &= 42{,}5 \end{aligned}$$

20. Die punte $A(-3;1)$, $B(3;-2)$ en $C(9;10)$ is gegee.

    a) Bewys driehoek ABC is 'n reghoekige driehoek.
    Oplossing:
    Ons teken eers 'n skets:



Om te wys dat $\triangle ABC$ reghoekig is, moet ons toon dat $AB \perp AC$ of dat $AC \perp BC$ of $AB \perp BC$. Ons kan dit doen deur die berekening van die gradiënte van AB, AC en BC en deur dan te kyk of hierdie gradiënte die negatiewe inverse is van enige van die ander twee gradiënte.

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{-2-1}{3-(-3)} \\ &= \frac{-3}{6} \\ &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{10-(-2)}{9-3} \\ &= \frac{12}{6} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{AC} &= \frac{10-1}{9-(-3)} \\ &= \frac{9}{12} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Nou let ons op dat:

$$\begin{aligned} m_{AB} \times m_{BC} &= \frac{-1}{2} \times 2 = -1 \\ \therefore AB &\perp BC \\ \therefore \triangle ABC &\text{ is reghoekig} \end{aligned}$$

b) Vind die koördinate van D, as $ABCD$ 'n parallelogram is.

Oplossing:

'n Parallelogram het twee pare teenoorstaande sye gelyk en ewewydig. Dus $CD \parallel AB$ en $AD \parallel BC$. Ook $CD = AB$ en $AD = BC$.

Laat die koördinate van D, $(x; y)$ wees.

Aangesien $AD \parallel BC$, $m_{AD} = m_{BC}$.

Van die vorige vraag weet ons dat $m_{BC} = 2$. Dus is die gradiënt van AD:

$$\begin{aligned} m_{AD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ 2 &= \frac{y-1}{x-(-3)} \\ 2(x+3) &= y-1 \\ 2x+6 &= y-1 \\ 2x+7 &= y \end{aligned}$$

Aangesien $CD \parallel AB$, $m_{CD} = m_{AB}$.

Van die vorige vraag weet ons dat $m_{AB} = \frac{-1}{2}$. Dus is die gradiënt van CD:

$$\begin{aligned} m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{-1}{2} &= \frac{y-10}{x-9} \\ \frac{-1}{2}(x-9) &= y-10 \\ -x+9 &= 2y-20 \\ -x+29 &= 2y \end{aligned}$$

Nou het ons twee vergelykings met twee onbekendes. Ons kan die twee vergelykings gelykstel en vir x oplos:

$$\begin{aligned} 4x+14 &= -x+29 \\ 5x &= 15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Nou kan ons vir y oplos:

$$\begin{aligned} 2x+7 &= y \\ 2(3)+7 &= y \\ 13 &= y \end{aligned}$$

Dus is die koördinate van D $(3; 13)$.

c) Vind die vergelyking van die lyn ewewydig aan die lyn BC, en wat deur die punt A gaan.

Oplossing:

Van die eerste vraag weet ons die gradiënt van die lyn BC is 2. Ons weet ook dat punt A by $(-3; 1)$ is.
Die lyn ewewydig aan BC sal dieselfde gradiënt hê as BC en dus kan ons die vergelyking van hierdie lyn skryf as: $y = 2x + c$.
Nou kan ons punt A gebruik om die y-afsnit van die lyn te bereken:

$$\begin{aligned} 2 &= 2(-5) + c \\ 2 &= -10 + c \\ 12 &= c \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking van die lyn ewewydig aan BC en wat deur A gaan $y = 2x + 12$.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2JZB	1b. 2JZC	1c. 2JZD	2a. 2JZF	2b. 2JZG	2c. 2JZH
3. 2JZJ	4. 2JZK	5. 2JZM	6. 2JZN	7. 2JZP	8. 2JZQ
9. 2JZR	10. 2JZS	11. 2JZT	12. 2JZV	13. 2JZW	14. 2JZX
15. 2JZY	16. 2JZZ	17. 2K22	18. 2K23	19. 2K24	20. 2K25

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

8.4 Middelpunt van 'n lyn

Vir uitgewerkte voorbeeld 10 (berekening van die middelpunt) kan leerders hulle antwoord kontroleer met gebruik van die afstandformule.

Met gebruik van die afstandformule, kan ons bevestig dat die afstande vanaf die middelpunt na elke eindpunt dieselfde is:

$$\begin{aligned} PS &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(0 - 2)^2 + (-0{,}5 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-1{,}5)^2} \\ &= \sqrt{4 + 2{,}25} \\ &= \sqrt{6{,}25} \end{aligned}$$

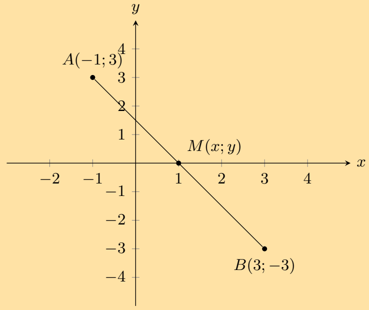
en

$$\begin{aligned} QS &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(0 - (-2))^2 + (-0{,}5 - (-2))^2} \\ &= \sqrt{(0 + 2)^2 + (-0{,}5 + 2)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (-1{,}5)^2} \\ &= \sqrt{4 + 2{,}25} \\ &= \sqrt{6{,}25} \end{aligned}$$

Soos verwag, $PS = QS$, dus is F die middelpunt.

Exercise 8 – 5:

1. Jy word die volgende diagram gegee:



Bereken die koördinate van die middelpunt (M) tussen punt $A(-1;3)$ en punt $B(3;-3)$.

Oplossing:

Gestel die koördinate van A is $(x_1;y_1)$ en die koördinate van B is $(x_2;y_2)$.

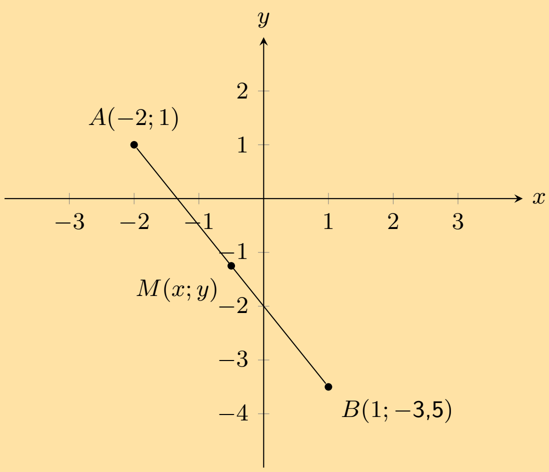
$$x_1 = -1 \quad y_1 = 3 \quad x_2 = 3 \quad y_2 = -3$$

Substitueer waardes in die middelpuntformule:

$$\begin{aligned} M\,(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ x &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ &= \frac{-1+3}{2} \\ &= 1 \\ y &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ &= \frac{3+(-3)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die middelpunt is by $M\,(1;0)$.

2. Jy word die volgende diagram gegee:



Bereken die koördinate van die middelpunt (M) tussen punt $A(-2;1)$ en punt $B(1;-3{,}5)$.

Oplossing:

Gestel die koördinate van A is $(x_1;y_1)$ en die koördinate van B is $(x_2;y_2)$.

$$x_1 = -2 \quad y_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad y_2 = -3{,}5$$

Substitueer waardes in die middelpuntformule:

$$\begin{aligned} M\,(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ x &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ &= \frac{-2+1}{2} \\ &= -0{,}5 \\ y &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ &= \frac{1+(-3{,}5)}{2} \\ &= -1{,}25 \end{aligned}$$

Die middelpunt is by $M\,(-0{,}5;-1{,}25)$.

3. Vind die middelpunte van die volgende lyne:

   a) $A(2;5)$, $B(-4;7)$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2-4}{2};\frac{5+7}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-2}{2};\frac{12}{2}\right) \\ &= (-1;6) \end{aligned}$$

   b) $C(5;9)$, $D(23;55)$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} M_{CD} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{5+23}{2};\frac{9+55}{2}\right) \\ &= \left(\frac{28}{2};\frac{64}{2}\right) \\ &= (14;32) \end{aligned}$$

   c) $E(x+2;y-1)$, $F(x-5;y-4)$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} M_{EF} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{x+2+x-5}{2};\frac{y-1+y-4}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2x-3}{2};\frac{2y-5}{2}\right) \end{aligned}$$

4. Die middelpunt M van PQ is $(3;9)$. Vind P as Q $(-2;5)$ is.
   Oplossing:
   Die middelpuntformule is:

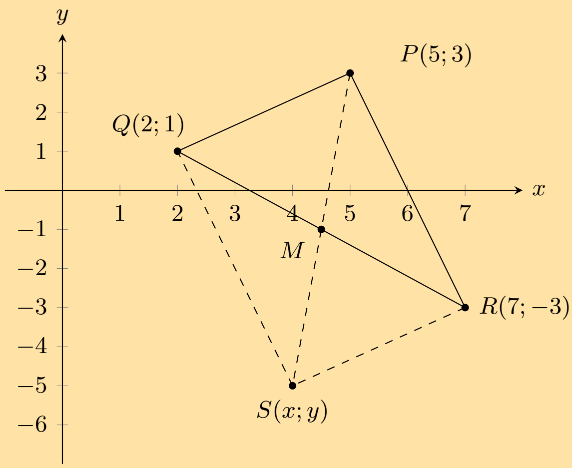
$$M\,(x;y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

   Substitueer waardes en los op vir x_2 en y_2:

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{-2+x_2}{2} & 9 &= \frac{5+y_2}{2} \\ 6 &= -2+x_2 & 18 &= 5+y_2 \\ x_2 &= 6+2 & y_2 &= 18-5 \\ x_2 &= 8 & y_2 &= 13 \end{aligned}$$

   Die koördinate van punt P is $(8;13)$.

5. $PQRS$ is 'n parallelogram met die punte $P(5;3)$, $Q(2;1)$ en $R(7;-3)$. Vind punt S.
   Oplossing:
   Teken 'n skets:



Die hoeklyne van 'n parallelogram halveer mekaar, dus sal die middelpunt van QR dieselfde wees as die middelpunt van PS. Ons moet eers die middelpunt vind van QR. Ons kan dit dan gebruik om die koördinate te bepaal van die punt H.

$$\begin{aligned} M_{QR} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2+7}{2}; \frac{1-3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{9}{2}; \frac{-2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{9}{2}; -1\right) \end{aligned}$$

Gebruik middelpunt M om die koördinate te vind van S:

$$\begin{aligned} M_{QR} &= (\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}) \\ \left(\frac{9}{2}; -1\right) &= \left(\frac{x+5}{2}; \frac{y+3}{2}\right) \end{aligned}$$

Los op vir x:

$$\begin{aligned} \frac{9}{2} &= \frac{x+5}{2} \\ 9 &= x+5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Los op vir y:

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{y+3}{2} \\ -2 &= y+3 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

Dus $S(4; -5)$.

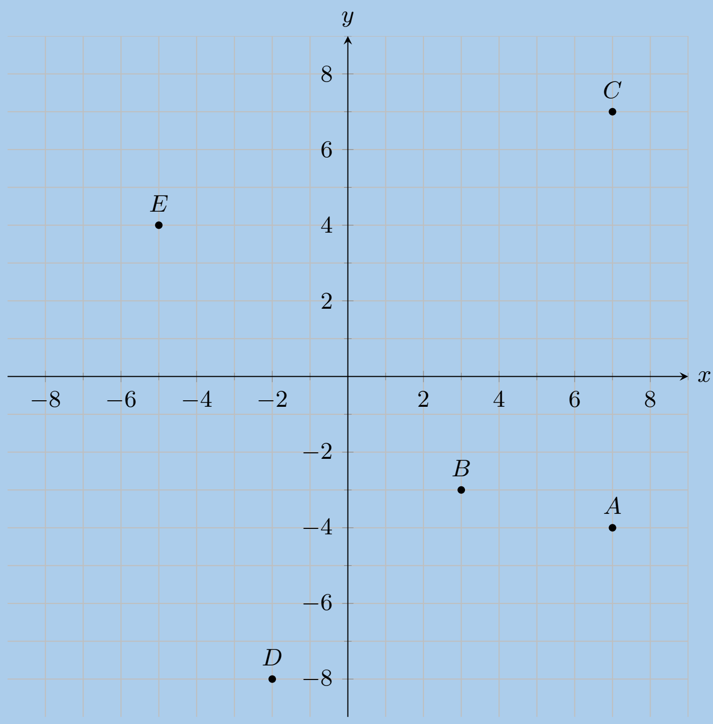
Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K27 2. 2K28 3a. 2K29 3b. 2K2B 3c. 2K2C 4. 2K2D
5. 2K2F

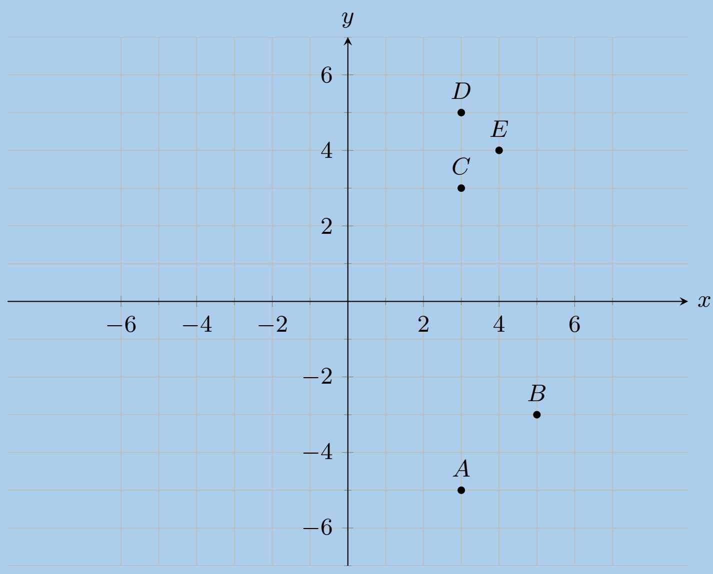
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

End of chapter Exercise 8 – 6:

1. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:



   Vind die koördinate van punte A, B, C, D en E.
   Oplossing:
   Van die grafiek kan ons die x en y waardes aflees vir elke punt.
   $A(7;-4)$, $B(3;-3)$, $C(7;7)$, $D(-2;-8)$ en $E(-5;4)$
2. Jy word die volgende diagram gegee, met verskeie punte getoon:



Watter punt lê by die koördinate $(3; -5)$?

Oplossing:

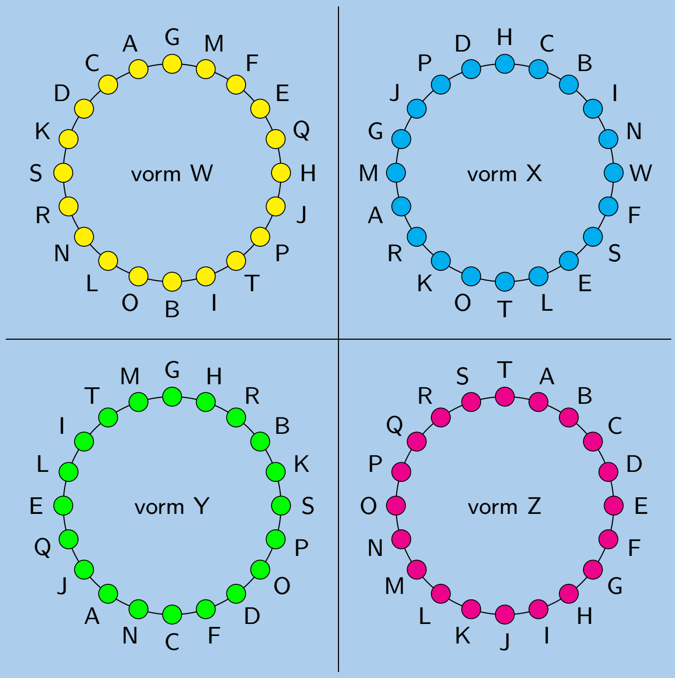
Vir hierdie vraag moet ons die punt $(3; -5)$ vind.

Ons kan die x en y waardes van die grafiek aflees.

Dus lê punt A by die koördinate: $(3; -5)$

3. Die volgende diagram word gegee, met 4 vorme getrek.

   Al die vorme is identies, maar gebruik verskillende benoemingskonvensies:

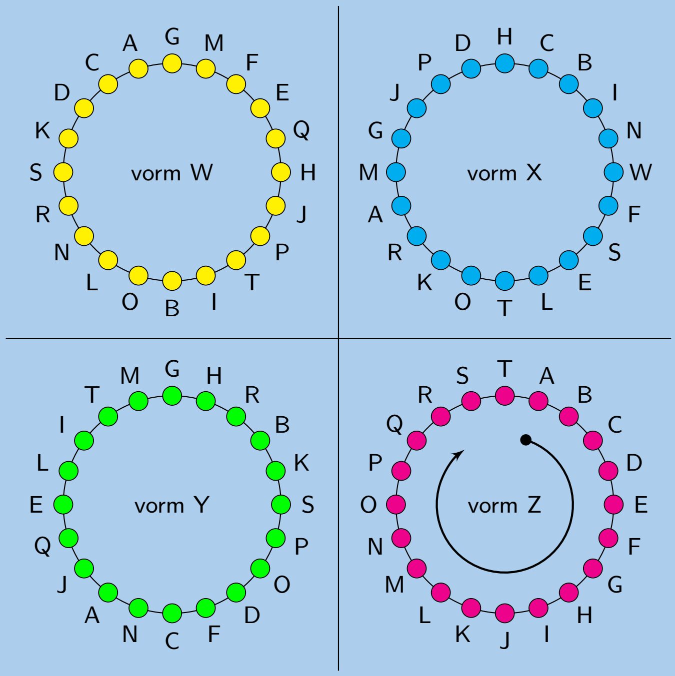


Watter vorm gebruik die korrekte benoeming?

Oplossing:

Ons onthou dat die korrekte benoemingskonvensie vir 'n vorm in **alfabetiese volgorde** is, kloksgewyse of antikloksgewyse rondom die vorm.

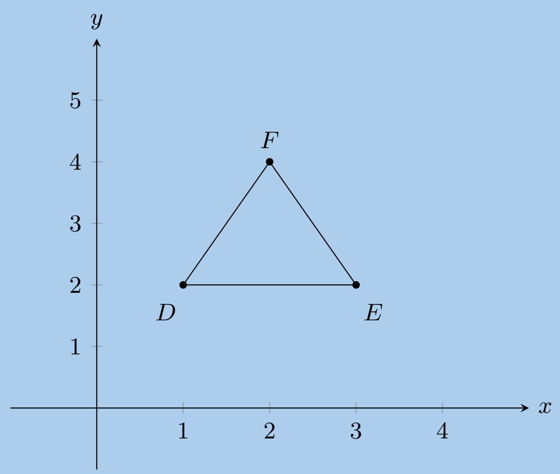
Van die diagram kan ons sien dat slegs **Vorm Z** hou by die benoemingskonvensie.



4. Stel die volgende figure voor in die Cartesiese vlak:

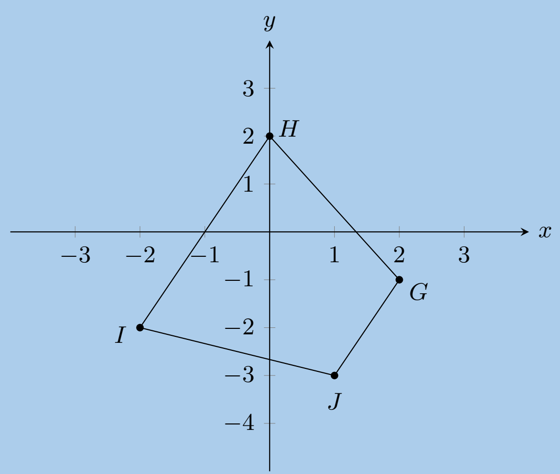
   a) Driehoek DEF met $D(1;2)$, $E(3;2)$ en $F(2;4)$.

   Oplossing:



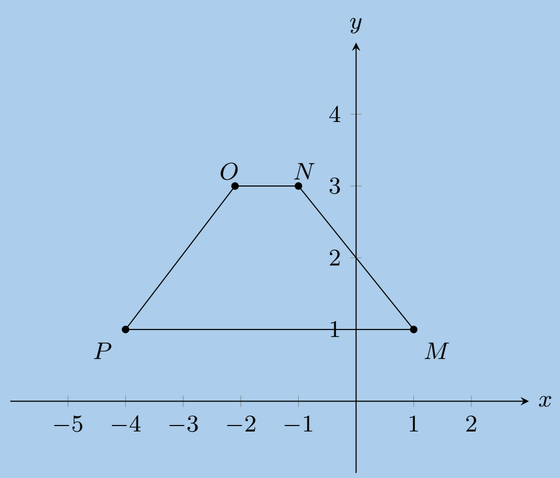
   b) Vierhoek $GHIJ$ met $G(2;-1)$, $H(0;2)$, $I(-2;-2)$ en $J(1;-3)$.

   Oplossing:



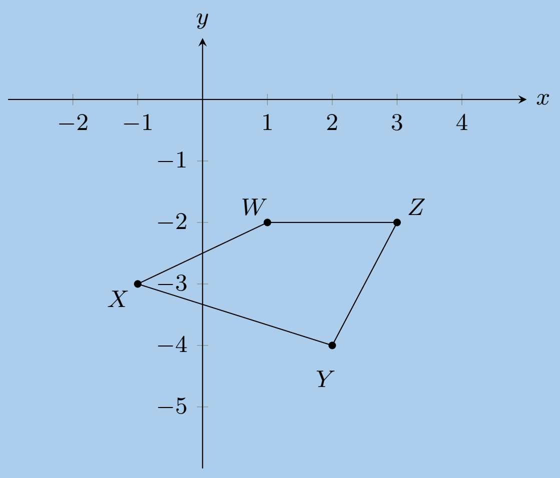
   c) Vierhoek $MNOP$ met $M(1;1)$, $N(-1;3)$, $O(-2;3)$ en $P(-4;1)$.

   Oplossing:

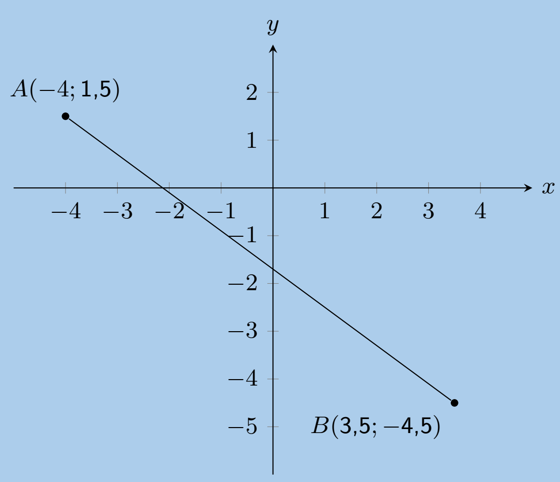


   d) Vierhoek $WXYZ$ met $W(1;-2)$, $X(-1;-3)$, $Y(2;-4)$ en $Z(3;-2)$.

   Oplossing:



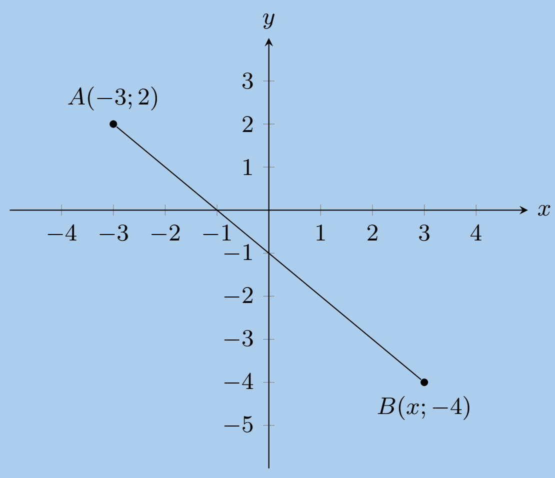
5. Jy word die volgende diagram gegee:



Bereken die lengte van lyn AB, korrek tot 2 desimale plekke.
Oplossing:
Die vergelyking vir afstand is $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Ons vervang $A(-4; 1{,}5)$ en $B(3{,}5; -4{,}5)$ en los op:

$$
\begin{aligned}
d_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
&= \sqrt{(3{,}5 - (-4))^2 + (-4{,}5 - (1{,}5))^2} \\
&= \sqrt{(3{,}5 + 4)^2 + (-4{,}5 - 1{,}5)^2} \\
&= \sqrt{(7{,}5)^2 + (-6)^2} \\
&= \sqrt{(56{,}25) + (36)} \\
&= \sqrt{(92{,}25)} \\
&= 9{,}81
\end{aligned}
$$

6. Die volgende skets toon twee punte op die Cartesiese vlak, A en B.



Die afstand tussen die punte is 8,4853. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

Oplossing:

Die vergelyking vir afstand is $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Ons substitueer $A(-3;2)$ en $B(x;-4)$:

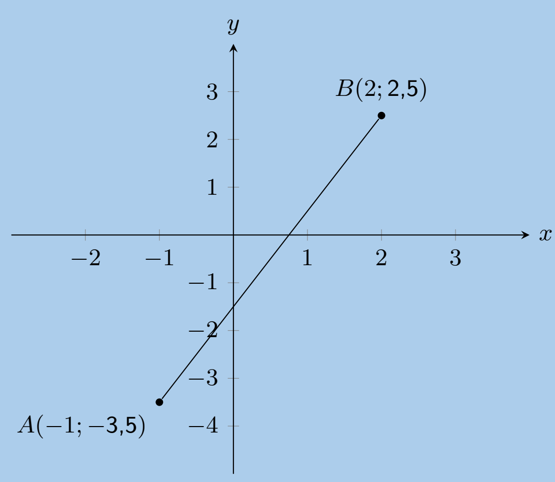
$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ 8{,}4853 &= \sqrt{(x - (-3))^2 + (-4 - (2))^2} \\ 8{,}4853 &= \sqrt{(x+3)^2 + (-4 - 2)^2} \end{aligned}$$

Nou herrangskik ons, en los vir x op:

$$\begin{aligned} (8{,}4853)^2 &= (x+3)^2 + (-4-2)^2 \\ 72 &= (x+3)^2 + (-4-2)^2 \\ 72 &= (x+3)^2 + 36 \\ (x+3)^2 &= 36 \\ x+3 &= \pm\sqrt{36} \\ x &= \pm 6 - 3 \\ x &= (3) \text{ of } (-9) \end{aligned}$$

Ons het nou 'n keuse tussen 2 waardes vir x. Van die diagram kan ons sien dat die toepaslike waarde vir hierdie vraag 3 is.

7. Jy word die volgende diagram gegee:



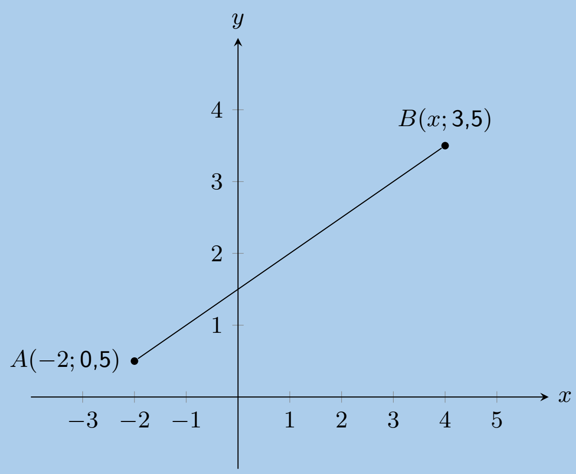
Bereken die gradiënt (m) van lyn AB. Die koördinate is $A(-1;-3{,}5)$ en $B(2;2{,}5)$ onderskeidelik.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right) \\
&= \left(\frac{(2{,}5) - (-3{,}5)}{(2) - (-1)}\right) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Dus is die gradiënt, m, van die lyn AB 2.

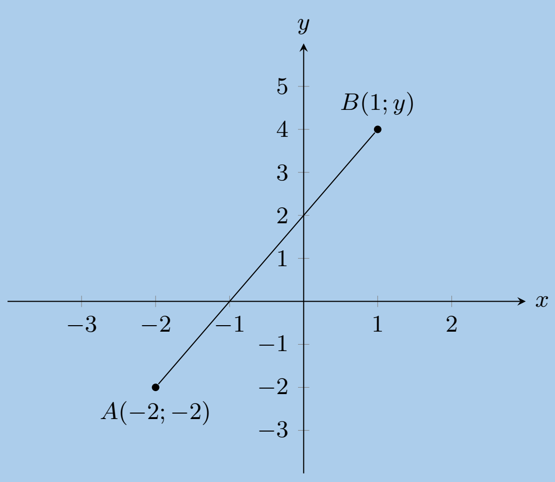
8. Jy word die volgende diagram gegee:



Dit word verder gegee dat AB 'n gradiënt, m, van 0,5 het.
Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right) \\
0{,}5 &= \left(\frac{(3{,}5) - (0{,}5)}{x - (-2)}\right) \\
0{,}5(x+2) &= 3 \\
x + 2 &= 6 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

9. Jy word die volgende diagram gegee:

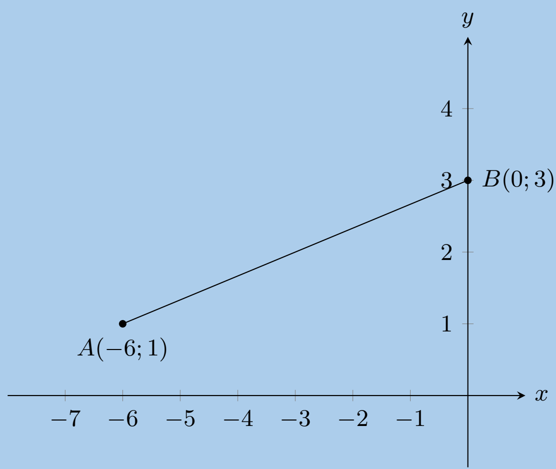


Dit word verder gegee dat die lyn AB 'n gradiënt, m, van 2 het.
Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right) \\
2 &= \left(\frac{y - (-2)}{(1) - (-2)}\right) \\
2(3) &= y + 2 \\
6 &= y + 2 \\
4 &= y
\end{aligned}
$$

10. In die diagram is A die punt $(-6; 1)$ en B is die punt $(0; 3)$.



a) Vind die vergelyking van lyn AB.
Oplossing:
Ons vind eers die gradiënt van die lyn:

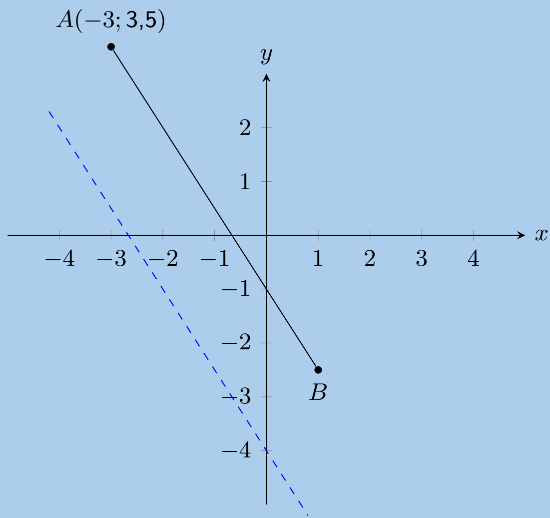
$$
\begin{aligned}
m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{1 - 3}{-6 - 0} \\
&= \frac{-2}{-6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Volgende let ons daarop dat punt B op die y-as lê en dit is dus die y-afsnit. Dus $c = 3$.
Dus is die vergelyking van lyn AB: $y = \frac{1}{3}x + 3$.

b) Bereken die lengte van AB.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(-6 + 0)^2 + (1 - 3)^2} \\
&= \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} \\
&= \sqrt{40}
\end{aligned}
$$

11. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy word ook gegee dat die lyn AB ewewydig loop aan die volgende lyn: $y = -1{,}5x - 4$. Punt A is by $(-3; 3{,}5)$. Vind die vergelyking van die lyn AB.

Oplossing:

Gestel $y = -1{,}5x - 4$ is die lyn CD.

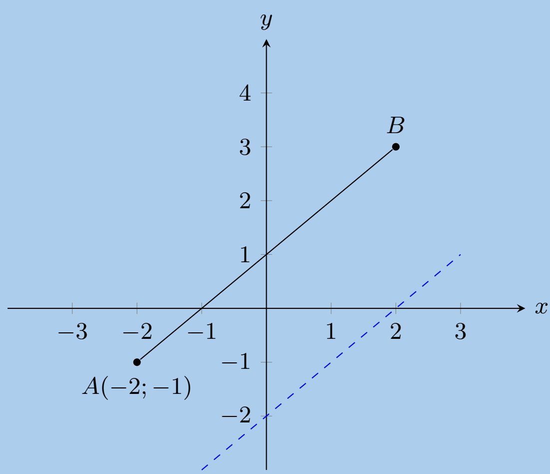
Aangesien lyn AB ewewydig is aan lyn CD, $m_{AB} = m_{CD} = -1{,}5$.

Nou kan ons die bekende punt (A) instel en die y-afsnit kry van die lyn :

$$\begin{aligned} y &= -1{,}5x + c \\ (3{,}5) &= (-1{,}5)(-3) + c \\ c &= -1 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking van die lyn AB: $y = -1{,}5x - 1$

12. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy word ook gegee dat lyn AB ewewydig is aan die volgende lyn: $y = x - 2$.

Bereken die ontbrekende koördinaat van punt $B(x; 3)$.

Oplossing:

Gestel $y = x - 2$ is die lyn CD.

Aangesien lyn AB ewewydig is aan lyn CD, $m_{AB} = m_{CD} = 1$.

Nou kan ons die bekende punt (A) instel en die y-afsnit kry van die lyn :

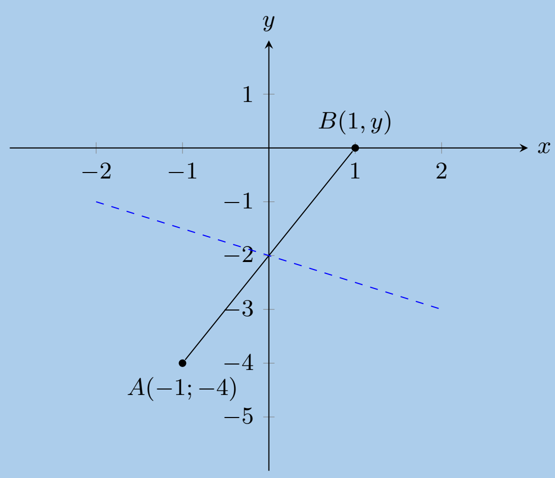
$$\begin{aligned} y &= x + c \\ -1 &= -2 + c \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking van lyn AB: $y = x + 1$.
Uiteindelik substitueer ons die bekende waarde vir punt B in die vergelyking van lyn AB:

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \\ 3 &= x + 1 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Dus id punt B by $(2; 3)$.

13. Jy word die volgende diagram gegee:



Jy word ook gegee dat lyn AB loodreg is op lyn: $y = -0{,}5x - 2$.
Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.
Oplossing:
Die algemene vorm van die reguitlyn is: $y = mx + c$.
Gestel lyn CD is $y = -0{,}5x - 2$.
Lyn AB is loodreg op lyn CD en dus $m_{AB} = \dfrac{-1}{m_{CD}}$.

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ y &= \left(\frac{-1}{m_{CD}}\right)x + c \\ y &= \left(\frac{-1}{-0{,}5}\right)x + c \\ y &= 2x + c \end{aligned}$$

Nou kan ons punt A vervang in die vergelyking om die y-afsnit te vind:

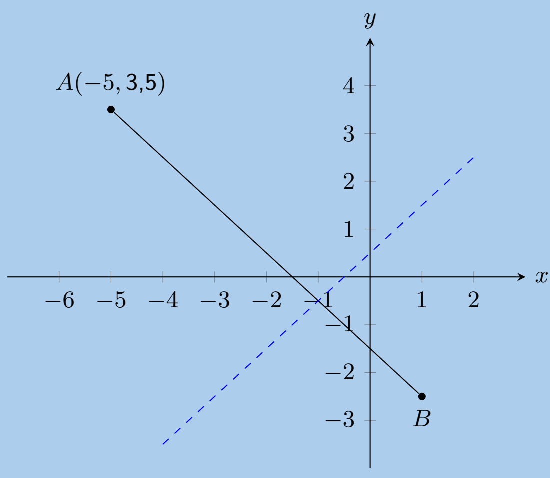
$$\begin{aligned} y &= 2x + c \\ -4 &= (2)(-1) + c \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Vervolgens kan ons punt B instel om die ontbrekende koördinaat te vind:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 2 \\ y &= (2)(1) - 2 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Dus is die ontbrekende koördinaat $B(1; 0)$.

14. Die grafiek hier toon lyn AB. Die blou stippellyn is loodreg op AB.



Die vergelyking van die blou stippellyn is $y = x + 0{,}5$. Punt A is by $(-5; 3{,}5)$. Bepaal die vergelyking van lyn AB.

Oplossing:

Gestel lyn CD is die blou stippellyn.

Lyn AB is loodreg op lyn CD en dus $m_{AB} = \frac{-1}{m_{CD}}$.

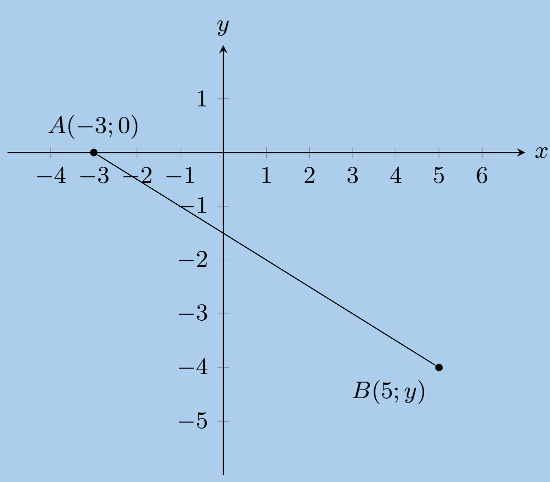
$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ y &= \left(\frac{-1}{m_{CD}}\right)x + c \\ y &= \left(\frac{-1}{1}\right)x + c \\ y &= -x + c \end{aligned}$$

Nou kan ons punt A vervang in die vergelyking om die y-afsnit te vind:

$$\begin{aligned} y &= -x + c \\ 3{,}5 &= (-1)(-5) + c \\ c &= -1{,}5 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking van lyn AB: $y = -x - 1{,}5$.

15. Jy word die volgende diagram gegee:

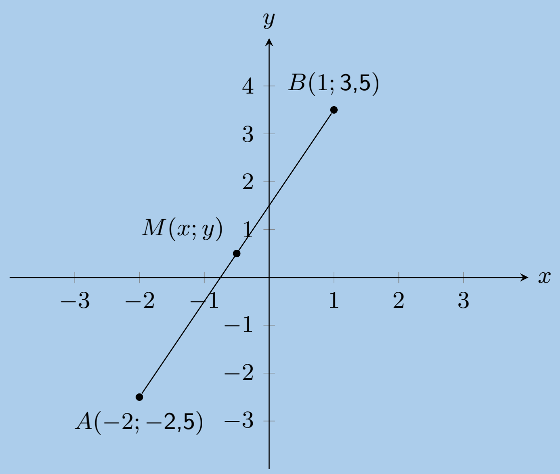


Jy word ook gegee dat lyn AB die volgende vergelyking: $y = -0{,}5x - 1{,}5$ het. Bereken die ontbrekende koördinaat van punt B.

Oplossing:
Ons kan die bekende waarde vir punt B instel in die gegewe vergelyking vir lyn AB:

$$\begin{aligned} y &= (-0{,}5)x - 1{,}5 \\ y &= (-0{,}5)(5) - 1{,}5 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

16. Jy word die volgende diagram gegee:



Bereken die koördinate van die middelpunt (M) tussen punt $A(-2;-2{,}5)$ en punt $B(1;3{,}5)$ korrek tot 1 desimale plek.
Oplossing:

$$\begin{aligned} M(x;y) &= \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \\ &= \left(\frac{(-2)+(1)}{2}; \frac{(-2{,}5)+(3{,}5)}{2}\right) \\ M(x;y) &= (-0{,}5; 0{,}5) \end{aligned}$$

17. $A(-2;3)$ en $B(2;6)$ is punte in die Cartesiese vlak. $C(a;b)$ is die middelpunt van AB. Vind die waardes van a en b.
Oplossing:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-2-2}{2}; \frac{3+6}{2}\right) \\ (a;b) &= \left(0; \frac{9}{2}\right) \\ \therefore a = 0 \text{ en } b &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

18. Bepaal die vergelykings van die volgende reguitlyne:

    a) gaan deur $P(5;5)$ en $Q(-2;12)$.
    Oplossing:

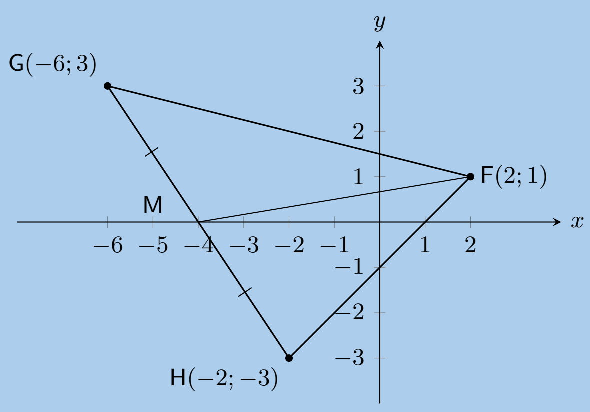
$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
m_{PQ} &= \frac{12 - 5}{-2 - 5} \\
&= \frac{7}{-7} \\
m_{PQ} &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
(5) &= (-1)(5) + c \\
c &= 5 + 5 \\
c &= 10 \\
\therefore y &= -x + 10
\end{aligned}
$$

b) ewewydig aan $y = 3x + 4$ terwyl dit deur $(4; 0)$ gaan.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= 3 \text{ (ewewydige lyne)} \\
y &= mx + c \\
(0) &= (3)(4) + c \\
c &= 12 \\
\therefore y &= 3x + 12
\end{aligned}
$$

c) gaan deur $F(2; 1)$ en die middelpunt van GH waar $G(-6; 3)$ and $H(-2; -3)$.



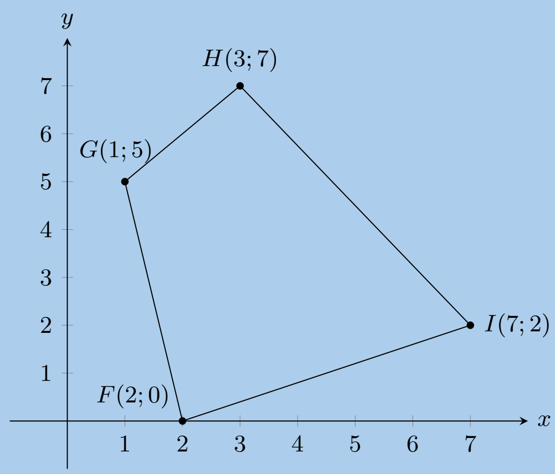
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
M(x; y) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\
M_{GH} &= \left(\frac{-6 + (-2)}{2}; \frac{3 + (-3)}{2}\right) \\
M_{GH} &= (-4; 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(y - y_1) &= m(x - x_1) \\
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(y - 0) &= \frac{1 - 0}{2 - (-4)}(x - (-4)) \\
\therefore y &= \frac{1}{6}(x + 4) \\
\therefore y &= \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

19. In die diagram hieronder is die hoekpunte van die vierhoek $F(2;0)$, $G(1;5)$, $H(3;7)$ en $I(7;2)$.



a) Bereken die lengtes van die sye van $FGHI$.

Oplossing:

Ons moet die afstandsformule gebruik om die lengtes van die sye te bereken. Die vier sye is FG, GH, HI en FI

$$\begin{aligned} d_{FG} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(1-2)^2 + (5-0)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (5)^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{GH} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (7-5)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{HI} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(7-3)^2 + (2-7)^2} \\ &= \sqrt{(4)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{FI} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(2-7)^2 + (0-2)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

b) Is die teenoorstaande sye van $FGHI$ ewewydig?

Oplossing:

Ons wil weet of $GH \parallel FI$ en $FG \parallel HI$. Ons kan die gradiënt van elk van die sye bereken en dan die gradiënte vergelyk.

$$\begin{aligned} m_{FG} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0-5}{2-1} \\ &= \frac{-5}{1} \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{HI} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{2-7}{7-3} \\ &= \frac{-5}{4} \\ &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{GH} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{5-7}{1-3} \\ &= \frac{-2}{-2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{FI} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0-2}{2-7} \\ &= \frac{-2}{-5} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ons let op dat $m_{FG} \neq m_{HI}$ en $m_{GH} \neq m_{FI}$ en dus is teenoorstaande sye nie ewewydig nie.

c) Halveer die hoeklyne van $FGHI$ mekaar?

Oplossing:

Om te bepaal of die hoeklyne mekaar halveer, moet ons die middelpunt vind van FH en GI.

$$\begin{aligned} M_{GI} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1+7}{2}; \frac{5+2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{8}{2}; \frac{7}{2}\right) \\ &= \left(4; \frac{7}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{FH} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3+2}{2}; \frac{7+0}{2}\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right) \end{aligned}$$

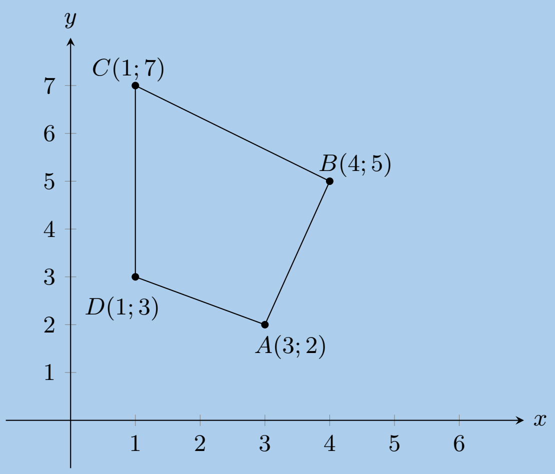
Ons let op dat $M_{GI} \neq M_{FH}$ en dus halveer die hoeklyne mekaar nie.

d) Kan jy vasstel watter tipe vierhoek $FGHI$ is? Gee redes vir jou antwoord.

Oplossing:
Dit is 'n gewone vierhoek. Die teenoorstaande sye is nie ewewydig nie, die hoeklyne halveer mekaar nie en geeneen van die sye is ewe lank nie.

20. Beskou 'n vierhoek $ABCD$ met hoekpunte $A(3;2)$, $B(4;5)$, $C(1;7)$ en $D(1;3)$.

    a) Teken die vierhoek.
    Oplossing:



    b) Vind die lengtes van die sye van die vierhoek.
    Oplossing:
    Ons moet die afstandsformule gebruik om die lengtes van die sye te bereken. Die vier sye is AB, BC, CD en AD

$$\begin{aligned}
d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(3 - 4)^2 + (2 - 5)^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{BC} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(4 - 1)^2 + (5 - 7)^2} \\
&= \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} \\
&= \sqrt{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{CD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(1 - 1)^2 + (7 - 3)^2} \\
&= \sqrt{0 + (4)^2} \\
&= \sqrt{16} \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{AD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 3)^2} \\
&= \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} \\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}$$

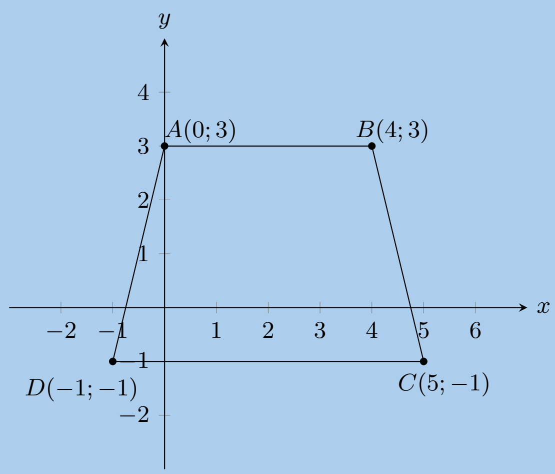
21. $ABCD$ is 'n vierhoek met hoekpunte $A(0;3)$, $B(4;3)$, $C(5;-1)$ en $D(-1;-1)$.

    a) Toon deur berekening dat:

i. $AD = BC$

Oplossing:

Maak eers 'n skets van die vierhoek:



Om te wys dat $AD = BC$, moet ons die afstandsformule gebruik om die lengte te vind van AD en BC.

$$\begin{aligned} d_{AD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(0 - (-1))^2 + (3 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{(1)^2 + (4)^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{BC} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(4 - 5)^2 + (3 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (4)^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

Dus is sye AD en BC gelyk.

ii. $AB \parallel DC$

Oplossing:

Om te toon dat $AB \parallel DC$, moet ons wys dat $m_{AB} = m_{DC}$.

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{3 - 3}{0 - 4} \\ &= \frac{0}{-4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{DC} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-1 + 1}{-1 - 5} \\ &= \frac{0}{-6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die gradiënte is gelyk, dus $AB \parallel DC$.

b) Watter tipe vierhoek is $ABCD$?

Oplossing:

'n Gelykbenige trapesium; een paar teenoorstaande sye is ewe lank en een paar teenoorstaande sye is ewewydig.

c) Toon dat hoeklyne AC en BD mekaar nie halveer nie.

Oplossing:

Om dit te wys moet ons die middelpunte vind van AC en BD.

$$\begin{aligned}
M_{AC} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{0+5}{2}; \frac{3-1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{5}{2}; \frac{2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{5}{2}; 1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{BD} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{4-1}{2}; \frac{3-1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}; \frac{2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}; 1\right)
\end{aligned}$$

$M_{AC} \neq M_{BD}$, dus halveer die hoeklyne mekaar nie.

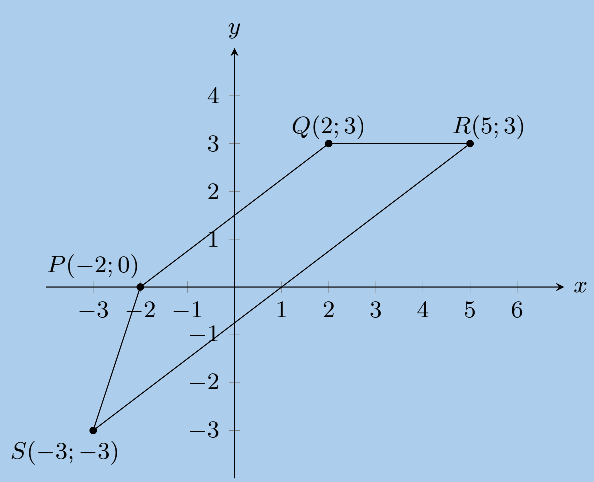
22. P, Q, R en S is die punte $(-2;0)$, $(2;3)$, $(5;3)$ en $(-3;-3)$ onderskeidelik.

a) Wys dat:

i. $SR = 2PQ$

Oplossing:

Teken eers 'n skets:



Ons kan die afstandsformule gebruik om te wys dat $SR = 2PQ$.

$$\begin{aligned} d_{PQ} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (0 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{SR} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(-3 - 5)^2 + (-3 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \\ \therefore SR &= 2PQ \end{aligned}$$

ii. $SR \parallel PQ$

Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{PQ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{3 - 0}{2 - (-2)} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{SR} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-3 - 3}{-3 - 5} \\ &= \frac{-6}{-8} \\ &= \frac{3}{4} \\ \therefore m_{PQ} &= m_{SR} \end{aligned}$$

Aangesien die gradiënte gelyk is, is $SR \parallel PQ$.

b) Bereken:

i. PS

Oplossing:

Ons moet die lengte van PS bereken:

$$\begin{aligned} d_{PS} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - (-3))^2 + (0 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{(1)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

ii. QR

Oplossing:

Ons moet die lengte van QR bereken:

$$\begin{aligned} d_{QR} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 0} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

c) Watter soort vierhoek is $PQRS$? Gee redes vir jou antwoord.

Oplossing:

Trapesium. Een paar teenoorstaande sye is ewewydig.

23. $EFGH$ is 'n parallelogram met hoekpunte $E(-1;2)$, $F(-2;-1)$ en $G(2;0)$. Vind die koördinate van H deur gebruik te maak van die feit dat die diagonale of hoeklyne van 'n parallelogram mekaar halveer.

Oplossing:

Aangesien die hoeklyne mekaar halveer, is die middelpunt van EG gelyk aan die middelpunt van FH. Ons kan eers die middelpunt van EG bereken, aangesien ons die koördinate het van beide E en G. Ons kan dan daardie middelpunt gebruik om ons te help om die koördinate van H te vind.

$$\begin{aligned} M_{EG} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-1+2}{2};\frac{2+0}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2};1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{FH} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-2+x}{2};\frac{-1+y}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{2};1\right) &= \left(\frac{-2+x}{2};\frac{-1+y}{2}\right) \end{aligned}$$

Los op vir x:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{-2+x}{2} \\ 1 &= -2+x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Los op vir y:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{-1+y}{2} \\ 2 &= -1+y \\ y &= 3 \end{aligned}$$

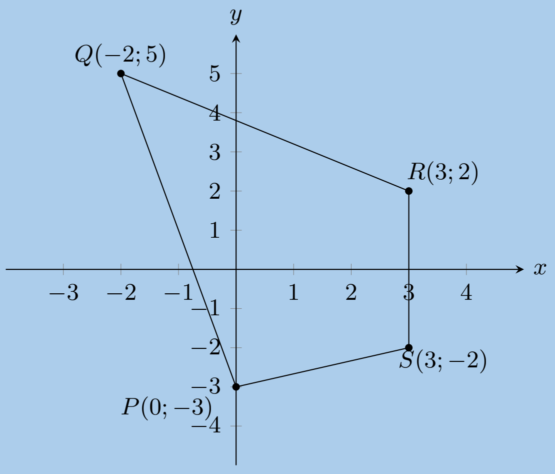
Dus $H(3;3)$.

24. $PQRS$ is vierhoek met punte $P(0;-3)$, $Q(-2;5)$, $R(3;2)$ en $S(3;-2)$ in die Cartesiese vlak.

a) Vind die lengte van QR.

Oplossing:

Maak eers 'n skets van die vierhoek:



$$\begin{aligned}
d_{QR} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(-2-3)^2 + (5-2)^2} \\
&= \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} \\
&= \sqrt{34}
\end{aligned}$$

b) Vind die gradiënt van PS.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
m_{PS} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-3+2}{0-3} \\
&= \frac{-1}{-3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

c) Vind die middelpunt van PR.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
M_{QR} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{0+3}{2}; \frac{-3+2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2}\right)
\end{aligned}$$

d) Is $PQRS$ 'n parallelogram? Gee redes vir jou antwoord.
Oplossing:
Ons moet die gradiënte bereken van elk van die sye om te sien of teenoorstaande sye ewewydig is. Ons het die gradiënt van PS bereken, dus moet ons net die gradiënte van die ander drie sye kontroleer. Maar, as ons kyk na ons skets, sien ons PS is nie ewewydig aan QR nie (jy kan dit kontroleer met die berekening van die gradiënt van QR).

$$\begin{aligned}
m_{RS} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-2-2}{3-3} \\
&= \frac{-4}{0} \\
&= \text{ongedefinieerd}
\end{aligned}$$

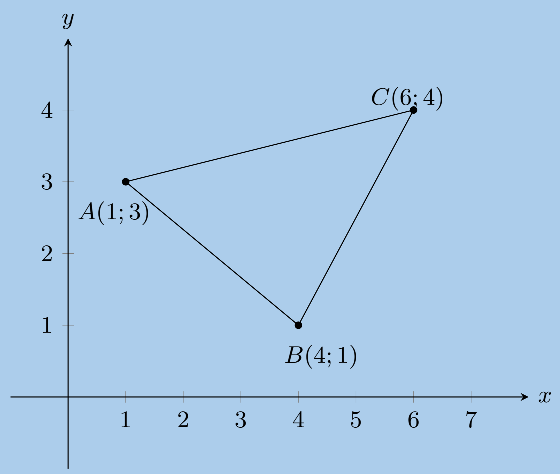
En,

$$\begin{aligned}
m_{QR} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{2-5}{3-(-2)} \\
&= \frac{-3}{5}
\end{aligned}$$

Dus is $PQRS$ nie 'n parallelogram nie. Teenoorstaande sye is nie ewewydig nie.

25. Oorweeg driehoek ABC met hoekpunte $A(1;3)$, $B(4;1)$ en $C(6;4)$.

a) Skets driehoek ABC op die Cartesiese vlak.
Oplossing:



b) Wys dat ABC 'n gelykbenige driehoek is.

Oplossing:

Ons moet wys dat twee sye ewe lank is. Ons bereken dus die lengte van elk van die sye van die driehoek.

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(1-4)^2 + (3-1)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{BC} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(4-6)^2 + (1-4)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{AC} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(1-6)^2 + (3-4)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

Twee sye van die driehoek is ewe lank, dus is $\triangle ABC$ gelykbenig.

c) Bepaal die koördinate van M, die middelpunt van AC.

Oplossing:

$$\begin{aligned} M_{AC} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1+6}{2}; \frac{3+4}{2}\right) \\ &= \left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right) \end{aligned}$$

d) Bepaal die gradiënt van AB.

Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1-3}{4-1} \\ &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

e) Toon dat $D(7;-1)$ op die lyn lê wat deur A en B gaan.

Oplossing:

Ons het nou net die gradiënt bereken van AB: $m_{AB} = \frac{-2}{3}$. Ons moet die gradiënt bereken van BD en AD:

$$\begin{aligned} m_{BD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-1-1}{7-4} \\ &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{AD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-1-3}{7-1} \\ &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

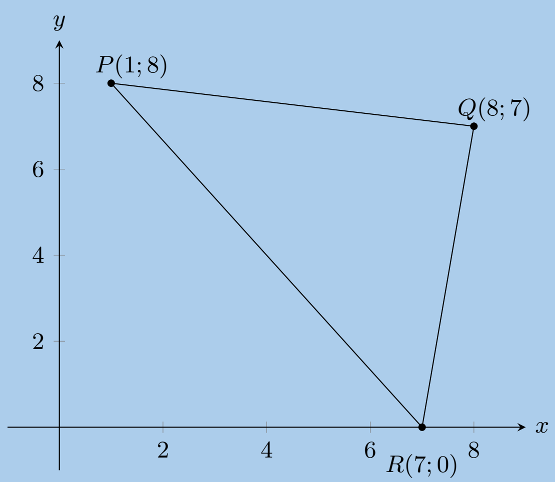
$$m_{AB} = m_{BD} = m_{AD}$$

Dus is A, B en D saamlynig.
Dus lê D op lyn AB.

26. $\triangle PQR$ het hoekpunte $P(1;8)$, $Q(8;7)$ en $R(7;0)$. Toon deur berekening dat $\triangle PQR$ 'n reghoekige gelykbenige driehoek is.

Oplossing:

Teken eers 'n skets:



Bereken vervolgens die gradiënt van elk van die drie sye van die driehoek:

$$\begin{aligned} m_{PQ} &= \frac{8-7}{1-8} \\ &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{QR} &= \frac{7-0}{8-7} \\ &= \frac{7}{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{PR} &= \frac{8-0}{1-7} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Nou kan ons $m_{PQ} \times m_{QR}$, $m_{QR} \times m_{PR}$ en $m_{PQ} \times m_{PR}$ kontroleer. Sodra ons uitvind een van hierdie waardes is gelyk aan -1, het ons bewys die driehoek is reghoekig.

$$\begin{aligned} m_{PR} \times m_{QR} &= -\frac{1}{7} \times \frac{7}{1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Dus $\triangle PQR$ is reghoekig, $PR \perp QR$. Die regte hoek is $P\hat{Q}R$.

Uiteindelik bereken ons die lengtes van sye PQ en RQ om te wys dat die driehoek gelykbenig is. Ons hoef nie PR te bereken nie aangesien dit die skuinssy van die driehoek is en dus langer moet wees as PQ en RQ.

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(1-8)^2 + (8-7)^2} \\ &= \sqrt{49+1} \\ &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

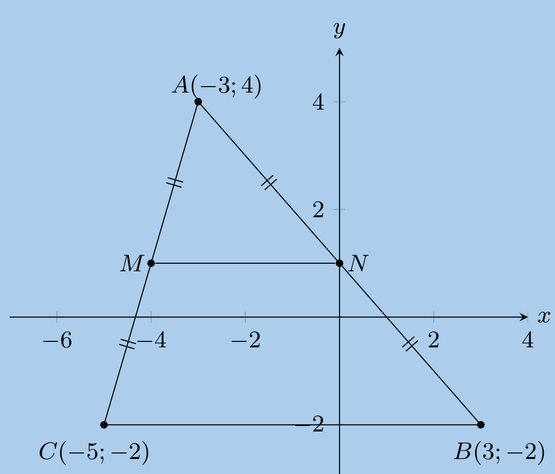
$$\begin{aligned} RQ &= \sqrt{(8-7)^2 + (7-0)^2} \\ &= \sqrt{1+49} \\ &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

Dus $PQ = RQ$ en dus is $\triangle PQR$ 'n reghoekige, gelykbenige driehoek.

27. $\triangle ABC$ het hoekpunte $A(-3;4)$, $B(3;-2)$ en $C(-5;-2)$. M is die middelpunt van AC en N is die middelpunt van BC. Gebruik $\triangle ABC$ om die middelpuntstelling te bewys met die gebruik van analitiese meetkunde metodes.

Oplossing:

Teken eers 'n skets:



Die middelpuntstelling sê dat die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig aan die derde sy en gelyk aan die helfte van die lengte van die derde sy. Dus, ons moet toon dat $MN \parallel BC$ en dat $MN = \frac{1}{2}BC$.

Ons moet die koördinate bereken van die middelpunte M en N:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{-3-5}{2}; \frac{4-2}{2}\right) \\ &= (-4;1) \\ N &= \left(\frac{-3+3}{2}; \frac{4-2}{2}\right) \\ &= (0;1) \end{aligned}$$

Nou kan ons wys dat $MN \parallel BC$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{-2-(-2)}{3-(-5)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{MN} &= \frac{1-1}{-4-0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore MN \parallel BC$$

Uiteindelik kan ons die afstandsformule gebruik om te wys dat $MN = \frac{1}{2}BC$:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2} \\ d_{MN} &= \sqrt{(1-1)^2 + (-4-0)^2} \\ &= 4 \\ d_{BC} &= \sqrt{(-2-(-2))^2 + (-5-3)^2} \\ &= 8 \\ \therefore MN &= \frac{1}{2}CB \end{aligned}$$

28. a) Noem twee eienskappe van 'n parallelogram.

Oplossing:

Enige twee van die volgende:

- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is gelyk.
- Beide hoeklyne halveer mekaar.

b) Die punte $A(-2;-4)$, $B(-4;1)$, $C(2;4)$ en $D(4;-1)$ is die hoekpunte van 'n vierhoek. Toon dat die vierhoek 'n parallelogram is.

Oplossing:

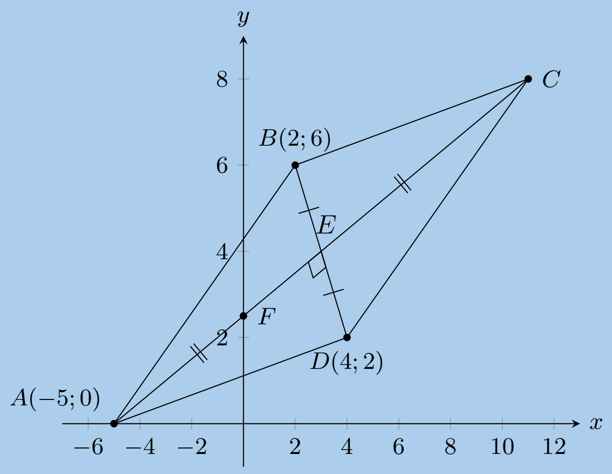
Ons moet aantoon dat beide pare teenoorstaande sye ewewydig is. Dus moet ons die gradiënt van elk van die sye bereken:

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{1+4}{-4+2} \\ &= \frac{5}{-2} \\ m_{CD} &= \frac{-1-4}{4-2} \\ &= \frac{-5}{2} \\ \therefore AB &\parallel CD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{4-1}{2+4} \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ m_{AD} &= \frac{-1+4}{4+2} \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \therefore BC &\parallel AD \end{aligned}$$

Dus is $ABCD$ 'n parallelogram (2 pare teenoorst. sye $\parallel$).

29. Die diagram toon 'n vierhoek. Punte B en D het onderskeidelik die koördinate $(2;6)$ en $(4;2)$. Die hoeklyne van $ABCD$ halveer mekaar reghoekig. F is die snypunt van lyn AC met die y-as.



a) Bepaal die gradiënt van AC.
Oplossing:
Aangesien die hoeklyne mekaar reghoekige halveer, weet ons dat $AC \perp BD$. Dus:

$$\begin{aligned} m_{AC} \times m_{BD} &= -1 \\ m_{AC} \times \frac{6-2}{2-4} &= -1 \\ m_{AC} \times -2 &= -1 \\ m_{AC} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Toon dat die vergelyking van AC gegee word deur $2y = x + 5$.
Oplossing:
Van bostaande sien ons dat $m = \frac{1}{2}$.
Substitueer punt A in die vergelyking:

$$\begin{aligned} (0) &= \frac{1}{2}(-5) + c \\ 0 &= \frac{-5}{2} + c \\ \therefore c &= \frac{5}{2} \\ \therefore y &= \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ \therefore 2y &= x + 5 \end{aligned}$$

c) Bepaal die koördinate van C.
Oplossing:
Ons bereken eers die koördinate van E:

$$\begin{aligned} E(\frac{2+4}{2}&; \frac{6+2}{2}) \\ &E(3;4) \end{aligned}$$

Nou kan ons die koördinate van E gebruik om die koördinate van C te vind. Aangesien E die middelpunt is van AC kan ons die middelpuntformule gebruik om C te vind:

$$\begin{aligned}\frac{-5+x}{2} &= 3\\ -5+x &= 6\\ x &= 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{0+y}{2} &= 4\\ y &= 8\end{aligned}$$

Dus $C(11;8)$.

30. $A(4;-1)$, $B(-6;-3)$ en $C(-2;3)$ is die hoekpunte van $\triangle ABC$.

a) Vind die lengte van BC, korrek tot 1 desimale plek.
Oplossing:

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{(-2+6)^2+(3+3)^2}\\ &= \sqrt{4^2+9^2}\\ &= \sqrt{16+81}\\ &= 9{,}8\end{aligned}$$

b) Bereken die gradiënt van AC.
Oplossing:

$$\begin{aligned}m_{AC} &= \frac{3+1}{-2-4}\\ &= \frac{4}{-6}\\ &= \frac{-2}{3}\end{aligned}$$

c) As P koördinate het van $(-26;19)$, toon dat A, C en P ko-lineêr is.
Oplossing:

$$\begin{aligned}m_{AP} &= \frac{19+1}{-26-4}\\ &= \frac{20}{-30}\\ &= \frac{-2}{3}\end{aligned}$$

Van die vorige vraag weet ons dat $m_{AC} = \frac{-2}{3}$, dus $m_{AC} = m_{AP}$.
Dus is A, C en P saamlynig.

d) Bepaal die vergelyking van lyn BC.
Oplossing:

$$\begin{aligned}m_{BC} &= \frac{3+3}{-2+6}\\ &= \frac{6}{4}\\ &= \frac{3}{2}\\ \therefore y &= \frac{3}{2}x+c\end{aligned}$$

Vervang $B(-6;-3)$:

$$\begin{aligned}(-3) &= \frac{3}{2}(-6) + c \\ -3 &= -9 + c \\ \therefore c &= 6 \\ \therefore y &= \frac{3}{2}x + 6\end{aligned}$$

Die vergelyking van lyn BC is $y = \frac{3}{2}x + 6$.

e) Toon dat $\triangle ABC$ reghoekig is.

Oplossing:

Vir 'n driehoek om reghoekig te wees, moet twee van die sye loodreg op mekaar wees. Ons moet m_{AC}, m_{BC} en m_{AB} bereken.

Ons begin met m_{AC} en m_{BC} aangesien ons hierdie waardes het van vorige vrae: $m_{AC} = \frac{-2}{3}$ en $m_{BC} = \frac{3}{2}$.

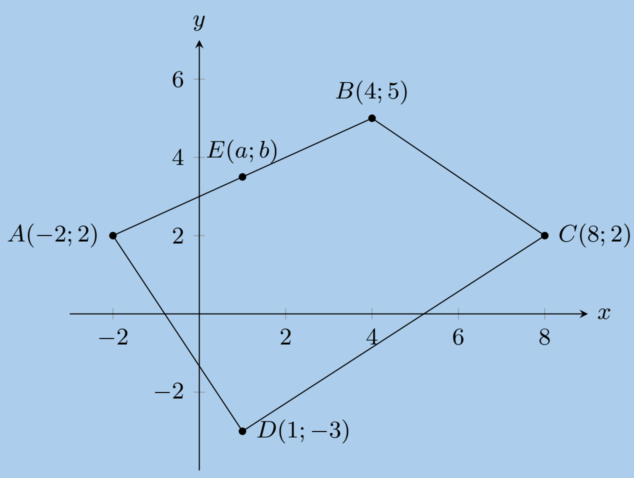
Ons kan kontroleer dat die twee sye met hierdie gradiënte loodreg is op mekaar:

$$\begin{aligned}m_{AC} \times m_{BC} &= \frac{-2}{3} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{-6}{6} \\ &= -1\end{aligned}$$

Aangesien die produk van hierdie twee gradiënte -1 is, is $AC \perp BC$.

Dus is $\triangle ABC$ reghoekig.

31. Die volgende diagram word gegee:



a) As E die middelpunt is van AB, vind die waardes van a and b.

Oplossing:

$$\begin{aligned}M_{AB} &= \left(\frac{-2+4}{2}; \frac{2+5}{2}\right) \\ &= \left(1; \frac{7}{2}\right)\end{aligned}$$

Dus $a = 1$ en $b = \frac{7}{2}$.

b) Vind die vergelyking van die lyn loodreg op BC, en wat deur die oorsprong gaan.

Oplossing:

Gestel die lyn is FG.

Bereken die gradiënt van BC:

$$m_{BC} = \frac{2-5}{8-4}$$
$$m_{BC} = \frac{-3}{4}$$

Bereken nou die gradiënt van FG:

$$-1 = m_{BC} \times m_{FG}$$
$$-1 = \left(\frac{-3}{4}\right) m_{FG}$$
$$m_{FG} = \frac{4}{3}$$

Dus het ons $y = \frac{4}{3}x - c$. Aangesien die lyn deur die oorsprong gaan, is die y-afsnit 0.

Dus is die vergelyking van die lyn loodreg op BC, en wat deur die oorsprong gaan: $y = \frac{4}{3}x$.

c) Vind die koördinate van die middelpunt van die hoeklyn BD.
Oplossing:

$$M_{BD} = \left(\frac{4+1}{2}; \frac{5-3}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{7}{2}; 1\right)$$

d) Toon vervolgens dat $ABCD$ nie 'n parallelogram is nie.
Oplossing:

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+8}{2}; \frac{2+2}{2}\right)$$
$$= (3; 2)$$

Die middelpunt van BD is nie die middelpunt van AC nie. Dus halveer die hoeklyne van die vierhoek mekaar nie en $ABCD$ is nie 'n parallelogram nie.

e) As C geskuif kon word, gee die nuwe koördinate sodat $ABCD$ 'n parallelogram sou wees.
Oplossing:
Ons gebruik die middelpunt van BD om die nuwe x en y koördinate van C te vind:

$$\frac{5}{2} = \frac{-2+x}{2}$$
$$\frac{10}{2} = -2 + x$$
$$x = 7$$

$$1 = \frac{2+y}{2}$$
$$2 = 2 + y$$
$$0 = y$$

Dus sal $C(7; 0)$ $ABCD$ 'n parallelogram maak.

32. 'n Driehoek het hoekpunte $A(-1; 7)$, $B(8; 4)$ en $C(5; -5)$.

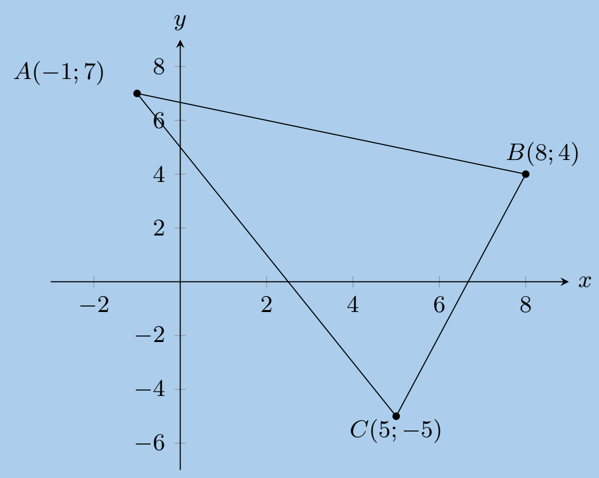
a) Bereken die gradiënt van AB.
Oplossing:

$$m_{AB} = \frac{4-7}{8+1}$$
$$= \frac{-3}{9}$$
$$= -\frac{1}{3}$$

b) Bewys dat die driehoek reghoekig is by B.

Oplossing:

Teken eers 'n skets:



Vir die driehoek om reghoekig te wees by B moet, $m_{AB} \times m_{BC} = -1$. Ons het m_{AB} uit die vorige vraag.

$$
\begin{aligned}
m_{BC} &= \frac{-5-4}{5-8} \\
&= \frac{-9}{-3} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore m_{AB} \times m_{BC} &= 3 \times \frac{-1}{3} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Dus $BC \perp AB$ en $\triangle ABC$ is reghoekig by B.

c) Bepaal die lengte van AB.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(8-(-1))^2 + (4-7)^2} \\
&= \sqrt{90} \\
&= 9{,}49
\end{aligned}
$$

d) Bepaal die vergelyking van die lyn van A tot by die middelpunt van BC.

Oplossing:

Vind eers die middelpunt van BC:

$$
\begin{aligned}
M_{BC} &= \left(\frac{8+5}{2}; \frac{4-5}{2}\right) \\
&= \left(\frac{13}{2}; \frac{-1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Nou kan ons die gradiënt van die lyn bereken:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{7 - \frac{-1}{2}}{-1 - \frac{13}{2}} \\
&= -1 \\
\therefore y &= -x + c
\end{aligned}
$$

Vervang $A(-2;2)$:

$$\begin{aligned}(2) &= -(-1) + c \\ c &= 6 \\ \therefore y &= -x + 6\end{aligned}$$

Die vergelyking van die lyn van A tot by die middelpunt van BC is $y = -x + 6$.

e) Vind die oppervlakte van die driehoek ABC.

Oplossing:

Vind eers die lengte van BC:

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{(8-5)^2 + (4+5)^2} \\ &= 3\sqrt{10} \\ &= 9{,}5\end{aligned}$$

Nou kan ons die oppervlakte vind:

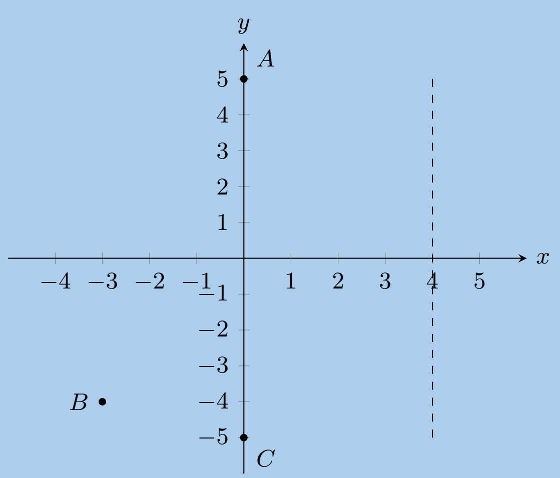
$$\begin{aligned}\text{Area } &= \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}(AB)(BC) \\ &= \frac{1}{2}(3\sqrt{10})(3\sqrt{10}) \\ &= 45\end{aligned}$$

33. 'n Vierhoek het hoekpunte $A(0;5)$, $B(-3;-4)$, $C(0;-5)$ en $D(4;k)$ waar $k \geq 0$.

a) Wat moet k wees sodat AD ewewydig is aan CD?

Oplossing:

Ons maak eers 'n skets. Ons let op dat D iewers op die lyn $x = 4$ lê.



Vir ewewydige lyne $m_{AD} = m_{CD}$:

$$\begin{aligned}\frac{k-5}{4-0} &= \frac{k+5}{4-0} \\ \frac{k-5}{4} &= \frac{k+5}{4} \\ \therefore k - 5 &= k + 5 \\ 0 &= 10\end{aligned}$$

Dus is daar geen waarde van k sodat AD ewewydig sal wees aan DC nie.

Ons kan sien dat dit moet waar wees aangesien D 'n gemeenskaplike punt is op lyne AD en CD; dus AD kan nie ewewydig wees aan CD nie.

b) Wat moet k wees sodat $CD = \sqrt{52}$?
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sqrt{52} &= \sqrt{(4-0)^2 + (k+5)^2} \\
\sqrt{52} &= \sqrt{16 + (k+5)^2} \\
\therefore 52 &= 16 + k^2 + 10k + 25 \\
0 &= k^2 + 10k - 11 \\
&= (k+11)(k-1) \\
\therefore k = -11 &\text{ of } k = 1
\end{aligned}$$

Maar $k \geq 0$, dus $k = 1$

34. Op die Cartesiese vlak, is die drie punte $P(-3;4)$, $Q(7;-1)$ en $R(3;b)$ saamlynig.

a) Vind die lengte van PQ.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{(-3-7)^2 + (-1-4)^2} \\
&= 5\sqrt{5}
\end{aligned}$$

b) Vind die gradiënt van PQ.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
m_{PQ} &= \frac{-1-4}{7+3} \\
&= \frac{-5}{10} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c) Vind die vergelyking van PQ.
Oplossing:
$y = -\frac{1}{2}x + c$. Substitueer $P(-3;4)$:

$$\begin{aligned}
(4) &= -\frac{1}{2}(-3) + c \\
c &= \frac{5}{2} \\
\therefore y &= -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Die vergelyking van die PQ is $y = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$.

d) Vind die waarde van b.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
m_{QR} &= m_{PQ} \\
\frac{b+1}{3-7} &= -\frac{1}{2} \\
b+1 &= 2 \\
b &= 1
\end{aligned}$$

35. Gegee $A(4;9)$ en $B(-2;-3)$.

a) Vind die middelpunt M van AB.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
M\left(\frac{4+(-2)}{2}; \frac{9-3}{2}\right) \\
M(1;3)
\end{aligned}$$

b) Vind die gradiënt van AB.
Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{-3-9}{-2-4} \\ &= \frac{-12}{-6} \\ &= 2 \end{aligned}$$

c) Vind die gradiënt van die lyn loodreg op AB.
Oplossing:

$$\begin{aligned} m &= -1 \div m_{AB} \\ &= -1 \div 2 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

d) Vind die vergelyking van die loodregte halveerlyn (middelloodlyn) van AB.
Oplossing:
Van die vorige vraag het ons dat $y = -\frac{1}{2}x + c$. Substitueer M:

$$\begin{aligned} 3 &= -\frac{1}{2}(1) + c \\ c &= \frac{7}{2} \\ \therefore y &= -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Die vergelyking van die loodregte halveerlyn van AB is $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

e) Vind die vergelyking van die lyn ewewydig aan AB, en wat deur $(0;6)$ gaan.
Oplossing:
Aangesien die lyn ewewydig is aan AB, is die gradiënt dieselfde en dus het ons: $y = 2x + c$. Substitueer: $(0;6)$:

$$\begin{aligned} (6) &= 2(0) + c \\ c &= 6 \\ \therefore y &= 2x + 6 \end{aligned}$$

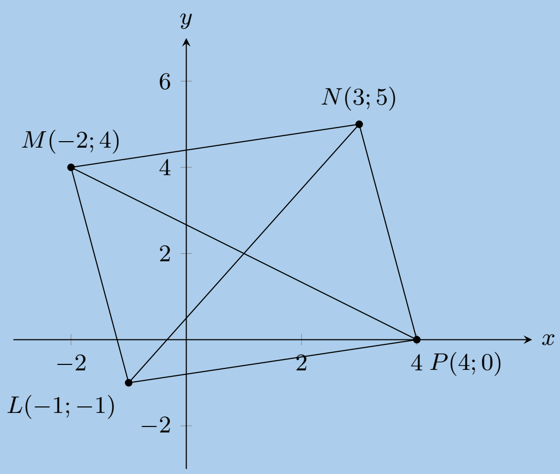
Die vergelyking van die lyn ewewydig aan AB en wat deur $(0;6)$ gaan, is $y = 2x + 6$.

36. $L(-1;-1)$, $M(-2;4)$, $N(x;y)$ en $P(4;0)$ is die hoekpunte van parallelogram $LMNP$.

a) Bepaal die koördinate van N.
Oplossing:
Aangesien $LMNP$ 'n parallelogram is, weet ons dat $LM \parallel NP$. Gevolglik:

$$\begin{aligned} m_{LM} &= m_{NP} \\ \frac{4+1}{-2+1} &= \frac{y-0}{x-4} \\ \frac{5}{-1} &= \frac{y}{x-4} \\ \therefore y &= 5 \\ -1 &= x-4 \\ 3 &= x \end{aligned}$$

Dus $N(3;5)$.
Ons kan nou die parallelogram skets:



b) Wys dat MP loodreg is op LN en sê watter soort vierhoek $LMNP$ is, bo en behalwe 'n parallelogram.
Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{MP} &= \frac{0-4}{4+2} \\ &= \frac{-4}{6} \\ &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{LN} &= \frac{5+1}{3+1} \\ &= \frac{6}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{MP} \times m_{LN} &= \frac{-2}{3} \times \frac{3}{2} \\ &= -1 \\ \therefore MP \perp LN & \end{aligned}$$

$LMNP$ is 'n ruit aangesien die hoeklyne reghoekig sny.

c) Wys dat $LMNP$ 'n vierkant is.
Oplossing:
Ons kan die lengte van elke sy bereken en toon dat al vier lengtes dieselfde is:

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{(-2-3)^2 + (4-5)^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

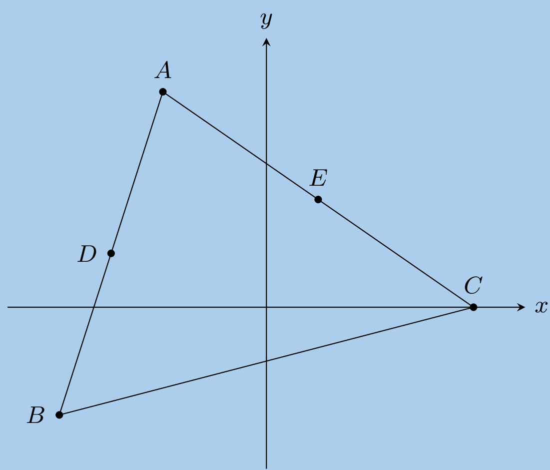
$$\begin{aligned} NP &= \sqrt{(3-4)^2 + (5-0)^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LP &= \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-0)^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ML &= \sqrt{(-2+1)^2 + (4+1)^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

Dus is $LMNP$ 'n vierkant, want al die sye is ewe lank.

37. $A(-2;4)$, $B(-4;-2)$ en $C(4;0)$ is die hoekpunte van $\triangle ABC$. D en $E(1;2)$ is die middelpunte AB en AC onderskeidelik.



a) Vind die gradiënt van BC.
Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{0+2}{4+4} \\ &= \frac{2}{8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b) Toon dat die koördinate van D, die middelpunt van AB, is $(-3;1)$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{-2-4}{2}; \frac{-2+4}{2}\right) \\ &= (-3;1) \end{aligned}$$

c) Vind die lengte van DE.
Oplossing:

$$\begin{aligned} DE &= \sqrt{(1-(-3))^2 + (2-1)^2} \\ &= \sqrt{17} \\ &= 4{,}1 \end{aligned}$$

d) Vind die gradiënt van DE. Formuleer 'n vermoede aangaande lyne BC en DE.
Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{DE} &= \frac{1-2}{-3-1} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

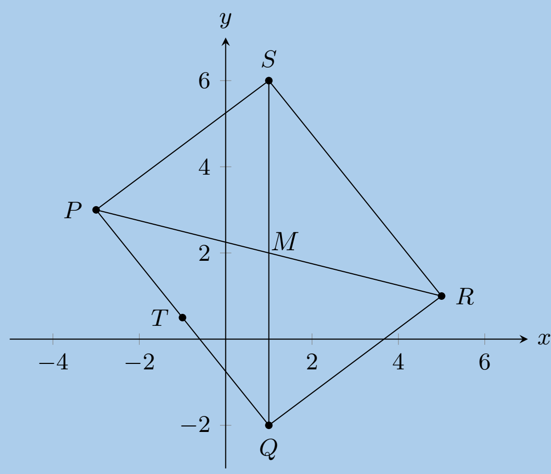
'n Vermoede aangaande lyne BC en DE is $DE \parallel BC$.

e) Bepaal die vergelyking van BC.
Oplossing:
Soos reeds bepaal, het ons die gradiënt BC, dus is die vergelyking van BC: $y = \frac{1}{4}x + c$. Substitueer B:

$$\begin{aligned} (-2) &= \frac{1}{4}(-4) + c \\ c &= -1 \\ y &= \frac{1}{4}x - 1 \end{aligned}$$

Die vergelyking van BC is $y = -\frac{1}{2}x - 4$.

38. In die diagram is punte $P(-3;3)$, $Q(1;-2)$, $R(5;1)$ en $S(x;y)$ die hoekpunte van 'n parallelogram.



a) Bereken die lengte van PQ.
Oplossing:

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(-3-1)^2 + (3+2)^2} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

b) Vind die koördinate van M waar die hoeklyne ontmoet.
Oplossing:
M is die middelpunt van beide PR en QS ($PQRS$ is 'n parallelogram). Aangesien ons nie weet wat die koördinate is van S nie, sal ons PR gebruik om M te vind.

$$M\left(\frac{-3+5}{2}; \frac{3+1}{2}\right)$$
$$\therefore M(1;2)$$

c) Vind T, die middelpunt van PQ.
Oplossing:

$$T\left(\frac{-3+1}{2}; \frac{3-2}{2}\right)$$
$$\therefore T\left(-1; \frac{1}{2}\right)$$

d) Wys dat $MT \parallel QR$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{MT} &= \frac{2-\frac{1}{2}}{1+1} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{QR} &= \frac{-2-1}{1-4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore m_{MT} = m_{QR}$$
$$\therefore MT \parallel QR$$

e) Bereken die koördinate van S.

Oplossing:

Ons kan die koördinate van M gebruik om die koördinate van S te kry:

$$M(1;2) = S\left(\frac{x+1}{2};\frac{y-2}{2}\right)$$

Los op vir x:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{x+1}{2}\\ 2 &= x+1\\ x &= 1\end{aligned}$$

Los op vir y:

$$\begin{aligned}2 &= \frac{y-2}{2}\\ 4 &= y-2\\ y &= 6\end{aligned}$$

Dus $S(1;6)$.

39. Die koördinate van $\triangle PQR$ is as volg: $P(5;1)$, $Q(1;3)$ en $R(1;-2)$.

a) Bepaal deur berekening of die driehoek gelyksydig, gelykbenig of skerphoekig is. Maak seker dat jy al jou werk toon.

Oplossing:

$$\begin{aligned}PQ &= \sqrt{(5-1)^2+(1-3)^2}\\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QR &= \sqrt{(1-1)^2+(3+2)^2}\\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}PR &= \sqrt{(5-1)^2+(1+2)^2}\\ &= 5\end{aligned}$$

$$\therefore QR = PR$$

$\triangle PQR$ is 'n gelykbenige driehoek.

b) Vind die koördinate van punte S en T, die middelpunte van PQ en QR.

Oplossing:

$$S\left(\frac{5+1}{2};\frac{1+3}{2}\right)$$
$$\therefore S(3;2)$$

$$T\left(\frac{1+1}{2};\frac{3-2}{2}\right)$$
$$\therefore T\left(1;\frac{1}{2}\right)$$

c) Bepaal die gradiënt van die lyn ST.

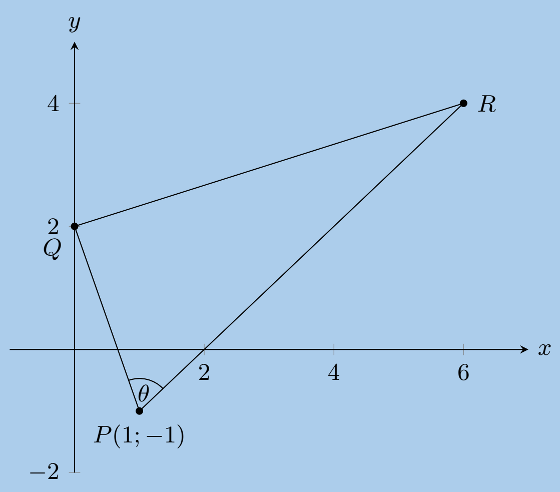
Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{ST} &= \frac{2 - \frac{1}{2}}{3 - 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

d) Bewys dat $ST \parallel PR$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{PR} &= \frac{1 + 2}{5 - 1} \\ &= \frac{3}{4} \\ \therefore ST &\parallel PR \text{ (gelyke gradiënte)} \end{aligned}$$

40. Die volgende diagram toon $\triangle PQR$ met $P(-1; 1)$. Die vergelyking van QR is $x - 3y = -6$ en die vergelyking van PR is $x - y - 2 = 0$. $R\hat{P}Q = \theta$.



a) Skryf die koördinate van Q neer.
Oplossing:
Q lê op die y-as, dus het ons $Q(0; y)$. Deur die vergelyking van QR te gebruik, kry ons:

$$\begin{aligned} -3y &= -6 \\ \therefore y &= 2 \\ \therefore Q&(0; 2) \end{aligned}$$

b) Bewys dat $PQ \perp QR$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}x + 2 \\ \therefore m_{QR} &= \frac{1}{3} \\ \\ m_{QP} &= -3 \\ \\ m_{QP} \times m_{QR} &= \frac{1}{3} \times -3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Dus $PQ \perp QR$.

c) Skryf die gradiënt neer van PR.

Oplossing:

Die vergelyking van PR is $x - y - 2 = 0$. In standaardvorm is dit $y = x - 2$.

Dus $m_{PR} = 1$.

d) As die y-koördinaat van R 4 is, bereken die x- koördinaat.

Oplossing:

Ons gebruik die vergelyking van PR en vervang $y = 4$:

$$\begin{aligned} x - 4 - 2 &= 0 \\ \therefore x &= 6 \end{aligned}$$

e) Vind die vergelyking van die lyn van P tot S (die middelpunt van QR).

Oplossing:

Ons bereken eers S:

$$\begin{aligned} S\left(\frac{0+6}{2};\frac{2+4}{2}\right) \\ S\,(3;3) \end{aligned}$$

Nou kan ons die vergelyking van die lyn SP vind:

$$\begin{aligned} m_{SP} &= \frac{-1-3}{1-3} \\ &= \frac{-4}{-2} \\ &= 2 \\ \therefore y &= 2x + c \\ -1 &= 2(1) + c \\ y &= 2x - 3 \end{aligned}$$

Die vergelyking van die lyn van P tot S is $y = 2x - 3$.

41. Die punte $E(-3;0)$, $L(3;5)$ en $S(t+1, 2{,}5)$ is saamlynig.

a) Bepaal die waarde van t.

Oplossing:

Aangesien E, L en S saamlynig is, $m_{EL} = m_{LS}$. Dus:

$$\begin{aligned} m_{EL} &= \frac{5}{6} \\ \therefore \frac{5-2{,}5}{3-(t+1)} &= \frac{5}{6} \\ \frac{2{,}5}{2-t} &= \frac{5}{6} \\ 6(2{,}5) &= 5(2-t) \\ 15 &= 10 - 5t \\ 5t &= -5 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

b) Bepaal die waardes van a en b as die vergelyking van die lyn, wat gaan deur E, L en S $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ is.

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \frac{5}{6}x + c \\ \therefore 0 &= \frac{5}{6}(-3) + c \\ c &= \frac{5}{2} \\ y &= \frac{5}{6}x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Nou kan ons die vergelyking herrangskik:

$$\begin{aligned}\frac{5}{2} &= y - \frac{5}{6}x \\ 1 &= \frac{2}{5}y - \frac{1}{3}x \\ &= \frac{2y}{5} - \frac{x}{3}\end{aligned}$$

Ons het $\frac{x}{a} = -\frac{x}{3}$, dus $a = -3$.
Ons het $\frac{y}{b} = \frac{2y}{5}$, dus $b = \frac{5}{2}$.

42. Gegee: $A(-3;-4), B(-1;-7), C(2;-5)$ en $D(0;-2)$.

a) Bereken die afstand AC en die afstand BD. Laat jou antwoord in wortelvorm.
Oplossing:

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ AC &= \sqrt{(2 - (-3))^2 + (-5 - (-4))^2} \\ &= \sqrt{5^2 (-1)^2} \\ &= \sqrt{25 + 1} \\ &= \sqrt{26}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ BD &= \sqrt{(0 - (-1))^2 + (-2 - (-7))^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{26}\end{aligned}$$

Dus $d_{AC} = d_{BD} = \sqrt{26}$.

b) Bepaal die koördinate van M, die middelpunt van BD.
Oplossing:

$$\begin{aligned}M(x;y) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-1 + 0}{2}; \frac{-7 + (-2)}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{2}; \frac{-9}{2}\right) \\ M &= (-0{,}5; -4{,}5)\end{aligned}$$

c) Bewys dat $AM \perp BD$.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
m_{AM} &= \frac{-4 - (-4{,}5)}{-3 - (-0{,}5)} \\
&= \frac{0{,}5}{-2{,}5} \\
&= -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{BD} &= \frac{-7 - (-2)}{-1 - (0)} \\
&= \frac{-5}{-1} \\
&= 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{BD} \times m_{AM} &= -\frac{1}{5} \times 5 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Dus $AM \perp BD$.

d) Bewys dat A, M en C saamlynig is.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
m_{MC} &= \frac{-5 - (-4{,}5)}{-2 - (-0{,}5)} \\
&= \frac{-0{,}5}{2{,}5} \\
&= -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Van vorige werk weet ons dat $m_{AM} = -\frac{1}{5}$.

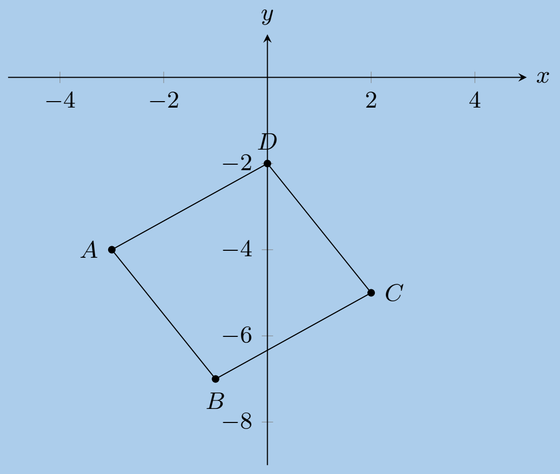
$m_{MC} = m_{AM}$ en M is 'n gemeenskaplike punt.

Dus is A, M en C saamlynig.

e) Watter tipe vierhoek is $ABCD$?

Oplossing:

Teken eers 'n skets:



Van vorige werk weet ons $d_{AC} = d_{BD} = \sqrt{26}$. Dus is die hoeklyne ewe lank.

Aangesien die hoeklyne ewe lank is, weet ons dat die vierhoek 'n vierkant moet wees.

Ons kan dit bevestig deur te toon dat al vier sye ewe lank is en dat $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp AD$ en $AD \perp AB$.

43. $M(2;-2)$ is die middelpunt van AB met punt $A(3;1)$. Bepaal:

a) die koördinate van B.
Oplossing:

$$\begin{aligned} M(x;y) &= (\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}) \\ (2;-2) &= (\frac{3+x_B}{2};\frac{1+y_B}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{3+x_B}{2} \\ 4 &= 3+x_B \\ x_B &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{1+y_B}{2} \\ -4 &= 1+y_B \\ y_B &= -5 \end{aligned}$$

$$\therefore B(x;y) = (1;-5)$$

b) die gradiënt van AM.
Oplossing:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ m_{AM} &= \frac{-2-1}{2-3} \\ &= \frac{-3}{-1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

c) die vergelyking van die lyn AM.
Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= mx+c \\ (-2) &= (3)(2)+c \\ c &= -2-6 \\ c &= -8 \end{aligned}$$

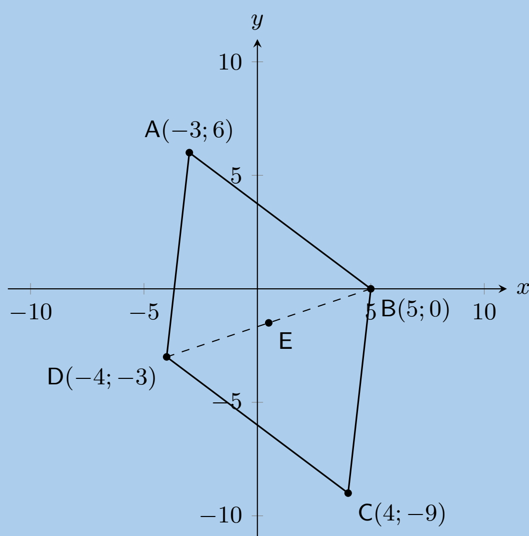
$$\therefore y = 3x-8$$

d) die loodregte halveerlyn van AB.
Oplossing:
Die loodregte halveerlyn van AB gaan deur M en het 'n gradiënt van $-\frac{1}{m_{AB}}$.

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{m_{AB}} \\ m &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
(-2) &= \left(-\frac{1}{3}\right)(2) + c \\
c &= \frac{2}{3} - 2 \\
c &= -\frac{4}{3} \\
\therefore y &= -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

44. $ABCD$ is 'n vierhoek met $A(-3;6),\ B(5;0),\ C(4;-9),\ D(-4;-3)$.



a) Bepaal die koördinate van E, die middelpunt van BD.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\
E &= \left(\frac{5 + (-4)}{2}; \frac{0 + (-3)}{2}\right) \\
\therefore E &= \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}
$$

b) Bewys dat $ABCD$ 'n parallelogram is.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\
M_{AC} &= \left(\frac{-3 + 4}{2}; \frac{6 + (-9)}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) \\
\therefore M_{AC} &= E
\end{aligned}
$$

$ABCD$ is a parallelogram (Hoeklyne sny by E).

c) Vind die vergelyking van hoeklyn BD.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(y - y_1) &= m(x - x_1) \\
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(y - 0) &= \frac{-3 - 0}{-4 - (5)}(x - (5)) \\
\therefore y &= \frac{-3}{-9}(x - 5) \\
\therefore y &= \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

d) Bepaal die vergelyking van die loodregte halveerlyn van BD.

Oplossing:

Die loodregte halveerlyn van BD gaan deur E en het 'n gradiënt $-\frac{1}{m_{BD}}$

$$
\begin{aligned}
m &= -\frac{1}{m_{BD}} \\
m &= \frac{1}{-\frac{1}{3}} \\
m &= -3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
-\frac{3}{2} &= (3)(\frac{1}{2}) + c \\
c &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\
c &= 0 \\
\therefore y &= -3x
\end{aligned}
$$

e) Bepaal die gradiënt van AC.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{6 - (-9)}{-3 - 4} \\
m_{AC} &= -\frac{15}{7}
\end{aligned}
$$

f) Is $ABCD$ 'n ruit? Verduidelik waarom of waarom nie.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m_{AC} \times m_{BD} &= -\frac{15}{7} \times \frac{1}{3} \\
&= -\frac{15}{21} \neq -1
\end{aligned}
$$

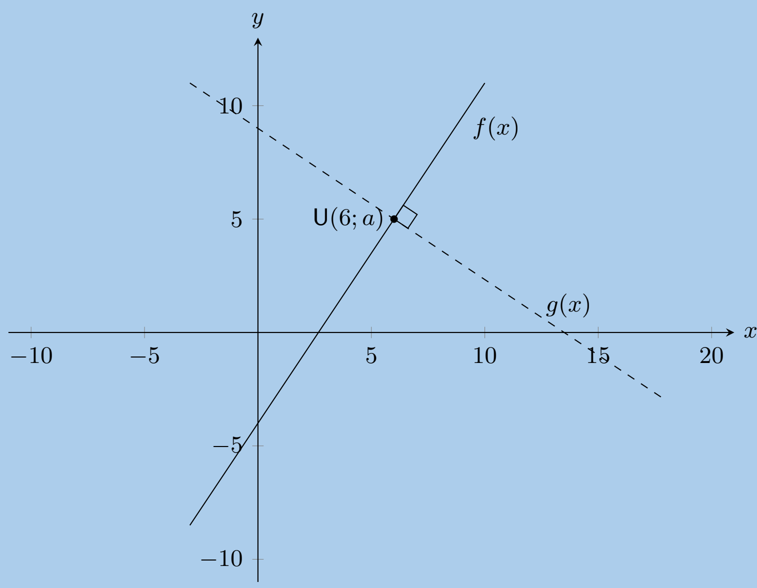
Nee, $ABCD$ is nie 'n ruit nie omdat die hoeklyne nie teen 'n regte hoek sny nie.

g) Vind die lengte van AB.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
AB &= \sqrt{(-3 - 5))^2 + (6 - 0)^2} \\
&= \sqrt{8^2 + 6^2} \\
&= \sqrt{64 + 36} \\
&= \sqrt{100} \\
&= 10
\end{aligned}
$$

45. In die diagram hieronder, is $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$ geskets met $U(6;a)$ op $f(x)$.



a) Bepaal die waarde van a in $U(6;a)$.

Oplossing:

Ons kan U substitueer in $f(x)$ om a te vind:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2}x - 4 \\ a &= \frac{3}{2}(6) - 4 \\ &= 9 - 5 \\ \therefore a &= 5 \end{aligned}$$

b) 'n Lyn, $g(x)$, wat deur U gaan, is loodreg op $f(x)$. $V(b;4)$ lê op $g(x)$. Bepaal die waarde van b.

Oplossing:

Ons weet dat $m_{g(x)} \times m_{f(x)} = -1$, dus $m_{g(x)} = -\dfrac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{2}{3}x + c \\ 5 &= -\frac{2}{3}(6) + c \\ c &= 5 + 4 \\ c &= 9 \end{aligned}$$

Dus $g(x) = -\dfrac{2}{3}x + 9$. Substitueer in V om vir b op te los:

$$\begin{aligned} 4 &= -\frac{2}{3}b + 9 \\ -5 &= -\frac{2}{3}b \\ b &= \frac{15}{2} \\ \therefore b &= 7\frac{1}{2} \end{aligned}$$

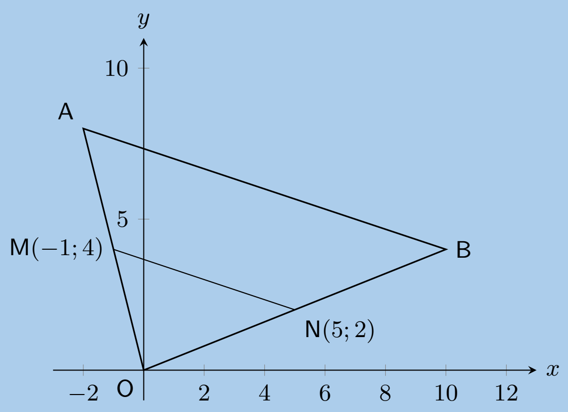
c) As $U(6;5)$, $V(7\frac{1}{2},4)$ en $W(1;c)$ saamlynig is, bepaal die waarde van c.

Oplossing:

U, V en W is saamlynig en die vergelyking vir die lyn is $g(x) = -\frac{2}{3}x + 9$. Ons kan W substitueer in die vergelyking vir die lyn om op te los vir c:

$$
\begin{aligned}
c &= -\frac{2}{3}(1) + 9 \\
\therefore c &= 8\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

46. In die diagram hieronder is M en N die middelpunte van OA en OB onderskeidelik.



a) Bereken die gradiënt van MN.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{4-2}{-1-5} \\
m_{MN} &= \frac{2}{-6} \\
m_{MN} &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

b) Vind die vergelyking van die lyn deur M en N in die vorm $y = mx + c$.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
4 &= -\frac{1}{3}(-1) + c \\
c &= 4 - \frac{1}{3} \\
c &= 3\frac{2}{3} \\
y &= -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

c) Wys dat $AB \parallel MN$.
Oplossing:
Vind die koördinate van A:

$$M_{OA} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
$$(-1, 4) = \left(\frac{x_A + 0}{2}; \frac{y_A + 0}{2}\right)$$

$$-1 = \frac{x_A}{2}$$
$$x_A = -2$$
$$4 = \frac{y_A}{2}$$
$$y_A = 8$$
$$\therefore A(x; y) = (-2; 8)$$

Volgende vind ons die koördinate van B:

$$M_{OB} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
$$(5, 2) = \left(\frac{x_B}{2}; \frac{y_B}{2}\right)$$

$$5 = \frac{x_B}{2}$$
$$x_B = 10$$
$$2 = \frac{y_B}{2}$$
$$y_B = 4$$
$$\therefore B(x; y) = (10; 4)$$

Nou kan ons die gradiënt bereken van AB en dit vergelyk met die gradiënt van MN:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m_{AB} = \frac{8 - 4}{-2 - 10}$$
$$= -\frac{4}{12}$$
$$m_{AB} = -\frac{1}{3} = m_{MN}$$
$$\therefore AB \parallel MN$$

d) Skryf die ratio of verhouding neer: $\dfrac{\text{area } \triangle OAB}{\text{area } \triangle OMN}$.

Oplossing:

Ons let die volgende op:

- $OA = 2OM$en $OB = 2ON$ (Middelpunte)
- $AB = 2MN$ (Middelpuntstelling)

Hiervan kan ons sien dat $\triangle OAB$ tweekeer so groot is as $\triangle OMN$ (elke sy van $\triangle OAB$ is tweemaal so lank as dieselfde sy in $\triangle OMN$). Dus die oppervlakte van $\triangle OAB$ is tweemaal die oppervlakte van $\triangle OMN$:

$$\frac{\text{area } \triangle OAB}{\text{area } \triangle OMN} = \frac{2\text{area } \triangle OMN}{\text{area } \triangle OMN}$$
$$= 2$$

e) Skryf die koördinate van P neer sodat $OAPB$ 'n parallelogram is.

Oplossing:

Ons kan die feit gebruik dat die hoeklyne van 'n parallelogram mekaar halveer ten einde P te vind. Die middelpunt van AB moet dieselfde wees as die die middelpunt van OP.

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)\\
M_{AB} &= \left(\frac{-2+10}{2}; \frac{8+4}{2}\right)\\
M_{AB} &= (4;6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4;6) &= \left(\frac{x_p+0}{2}; \frac{y_p+0}{2}\right)\\
(8;12) &= \left(\frac{x_p}{2}; \frac{y_p}{2}\right)\\
\therefore P(x;y) &= (8;12)
\end{aligned}$$

47. $A(6;-4)$, $B(8;2)$, $C(3;a)$ en $D(b;c)$ is punte op die Cartesiese vlak. Bepaal die waarde van:

a) a as A, B en C is saamlynig.

Oplossing:

Eers vind die gradiënt van AB:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\
&= \frac{-4-2}{6-8}\\
&= \frac{-6}{-2}\\
&= 3
\end{aligned}$$

Dus het ons $y = 3x + c$. Substitueer nou uit A:

$$\begin{aligned}
-4 &= 3(6) + c\\
c &= -22
\end{aligned}$$

Nou kan ons C substitueer om vir a op te los:

$$\begin{aligned}
a &= 3(3) - 22\\
\therefore a &= -13
\end{aligned}$$

b) b en c as B die middelpunt van A en D is.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
M_{AD} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)\\
(8;2) &= \left(\frac{6+b}{2}; \frac{-4+c}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8 &= \frac{6+b}{2}\\
16 &= 6+b\\
b &= 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{-4+c}{2}\\
4 &= -4+c\\
c &= 8\\
B(x;y) &= (8;12)
\end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K2H	2. 2K2J	3. 2K2K	4a. 2K2M	4b. 2K2N	4c. 2K2P
4d. 2K2Q	5. 2K2R	6. 2K2S	7. 2K2T	8. 2K2V	9. 2K2W
10. 2K2X	11. 2K2Y	12. 2K2Z	13. 2K32	14. 2K33	15. 2K34
16. 2K35	17. 2K36	18. 2K37	19. 2K38	20. 2K39	21. 2K3B
22. 2K3C	23. 2K3D	24. 2K3F	25. 2K3G	26. 2K3H	27. 2K3J
28. 2K3K	29. 2K3M	30. 2K3N	31. 2K3P	32. 2K3Q	33. 2K3R
34. 2K3S	35. 2K3T	36. 2K3V	37. 2K3W	38. 2K3X	39. 2K3Y
40. 2K3Z	41. 2K42	42. 2K43	43. 2K44	44. 2K45	45. 2K46
46. 2K47	47. 2K48				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 9

Finansies en groei

9.1 Inleiding

- Inhoud wat gedek word in hierdie hoofstuk, sluit die enkelvoudige rente en saamgestelde renteformules in. Hierdie formules word dan toegepas op huurkoop, inflasie en bevolkingsgroei. 'n Kort inleiding tot wisselkoerse is ingesluit.
- Vir saamgestelde rente word daar nie van leerders verwag om die oplossing te vind vir n nie.
- Bespreek die terminologie met betrekking tot enkelvoudige en saamgestelde rente soos hoofsom, opgehoopte bedrag, ens.
- Dit is belangrik om te onthou om nie die berekeninge af te rond voor die finale antwoord nie, aangesien dit akkuraatheid beïnvloed.
- Leerders moet berekeninge in een stap doen deur die geheue - 'memory' - funksie van hulle sakrekenaars te gebruik.

Sommige van die videos vir hierdie hoofstuk, gebruik dollar in plaas van rand in die voorbeelde. Aangesien beide rand en dollar desimale geldeenhede is, kan jy slegs die geldeenheid simbool verander en die berekeninge sal dieselfde uitwerk.

9.2 Enkelvoudige rente

Exercise 9 – 1:

1. 'n Bedrag van R 3500 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 7,5% per annum betaal. Bereken die balans wat opgehou het teen die einde van 2 jaar.
   Oplossing:

$$\begin{aligned} P &= 3500 \\ i &= 0{,}075 \\ n &= 2 \\ A &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1+in) \\ A &= 3500(1+(0{,}075)(2)) \\ A &= 3500(1{,}15) \\ A &= \text{R } 4025 \end{aligned}$$

2. 'n Bedrag van R 4090 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 8% per annum betaal. Bereken die balans wat geakkumuleer het teen die einde van 4 jaar.
   Oplossing:
   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= 4090 \\ n &= 4 \\ i &= \frac{8}{100} = 0{,}08 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1+in) \\ &= \text{R } 4090\,(1+(0{,}08)\times 4) \\ &= \text{R } 5398{,}80 \end{aligned}$$

3. 'n Bedrag van R 1250 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 6% per annum betaal. Bereken die balans wat geakkumuleer het teen die einde van 6 jaar.
   Oplossing:

Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= 1250 \\ n &= 6 \\ i &= \frac{6}{100} = 0{,}06 \end{aligned}$$

Enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= \text{R } 1250\,(1 + (0{,}06) \times 6) \\ &= \text{R } 1700{,}00 \end{aligned}$$

4. 'n Bedrag van R 5670 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 8% per annum betaal. Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 3 jaar.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= 5670 \\ n &= 3 \\ i &= \frac{8}{100} = 0{,}08 \end{aligned}$$

Enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= \text{R } 5670{,}00\,(1 + (0{,}08) \times 3) \\ &= \text{R } 7030{,}80 \end{aligned}$$

5. Bereken die vermeerderde bedrag in die volgende situasies:
   a) 'n Lening van R 300 teen 'n rentekoers van 8% vir 1 jaar.
   Oplossing:

$$\begin{aligned} P &= 300 \\ i &= 0{,}08 \\ n &= 1 \\ A &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ A &= 300(1 + (0{,}08)(1)) \\ A &= 300(1{,}08) \\ A &= \text{R } 324 \end{aligned}$$

   b) 'n Belegging van R 2250 teen 'n koers van 12,5% p.a. vir 6 jaar.
   Oplossing:

$$\begin{aligned} P &= 2250 \\ i &= 0{,}125 \\ n &= 6 \\ A &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ A &= 2250(1 + (0{,}125)(6)) \\ A &= 2250(1{,}75) \\ A &= \text{R } 3937{,}50 \end{aligned}$$

6. 'n Bank bied 'n spaarrekening aan wat enkelvoudige rente betaal teen 'n koers van 6% per annum. As jy R 15 000 wil bymekaarmaak in 5 jaar, hoeveel moet jy nou belê?
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= \text{R } 15\ 000 \\ P &= ? \\ i &= \frac{6}{100} = 0{,}06 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ \text{R } 15\ 000 &= P\,(1 + (0{,}06) \times 5) \\ P &= \frac{\text{R } 15\ 000}{1{,}3} \\ &= \text{R } 11\ 538{,}46 \end{aligned}$$

7. Sally wil die aantal jare bereken wat sy nodig het om R 1000 te belê ten einde R 2500 bymekaar te maak. Sy word 'n enkelvoudige rentekoers van 8,2% p.a. aangebied. Hoeveel jaar sal dit neem vir die geld om te vermeerder tot R 2500?
Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= 2500 \\ P &= 1000 \\ i &= 0{,}082 \\ n &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ 2500 &= 1000(1 + (0{,}082)(n)) \\ \frac{2500}{1000} &= 1 + 0{,}082n \\ \frac{2500}{1000} - 1 &= 0{,}082n \\ \left(\frac{2500}{1000} - 1\right) \div 0{,}082 &= n \\ n &= 18{,}3 \end{aligned}$$

Dit sal 19 jaar neem vir R 1000 om R 2500 te word teen 8,2% p.a.

8. Joseph belê R 5000 in 'n spaarrekening op sy seun se vyfde verjaarsdag. Toe sy seun 21 geword het, het die balans in die rekening reeds gegroei tot R 18 000. As enkelvoudige rente gebruik is, bereken die koers waarteen die geld belê was.
Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= 18\ 000 \\ P &= 5000 \\ i &= ? \\ n &= 21 - 5 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ 18\ 000 &= 5000(1 + (i)(16)) \\ \frac{18\ 000}{5000} &= 1 + 16i \\ \frac{18\ 000}{5000} - 1 &= 16i \\ \left(\frac{18\ 000}{5000} - 1\right) \div 16 &= i \\ i &= 0{,}1625 \end{aligned}$$

Die rentekoers waarteen die geld belê was, is 16,25%.

9. Toe sy seun 6 jaar oud was, het Methuli 'n bedrag van R 6610 in die bank belê. Die belegging het gegroei teen 'n enkelvoudige rentekoers en toe Methuli se seun 18 jaar oud was, was die waarde van die belegging R 11 131,24.

   Teen watter rentekoers was die geld belê?

   Oplossing:

   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{R } 11\ 131{,}24 \\
P &= \text{R } 6610 \\
i &= ? \\
n &= 18 - 6 = 12
\end{aligned}
$$

   Die vraag sê dat die belegging "gegroei het teen 'n enkelvoudige rentekoers", dus moet ons die enkelvoudige rentekoers formule gebruik. Om die rentekoers te bereken, moet ons i die onderwerp maak van die formule:

$$
\begin{aligned}
A &= P(1 + in) \\
\frac{A}{P} &= 1 + in \\
\frac{A}{P} - 1 &= in \\
\frac{\frac{A}{P} - 1}{n} &= i \\
\text{Dus } i &= \frac{\left(\frac{11\ 131{,}24}{6610}\right) - 1}{12} \\
&= 0{,}057 \\
&= 5{,}7\% \text{ per annum}
\end{aligned}
$$

10. Toe sy seun 6 jaar oud was, het Philip 'n belegging van R 5040 in die bank gemaak. Die belegging het gegroei teen 'n enkelvoudige rentekoers en toe Philip se seun 18 jaar oud was, was die waarde van die belegging R 7338,24.

   Oplossing:

   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{R } 7338{,}24 \\
P &= \text{R } 5040 \\
i &= ? \\
n &= 18 - 6 = 12
\end{aligned}
$$

   Die vraag sê dat die belegging "gegroei het teen 'n enkelvoudige rentekoers", dus moet ons die enkelvoudige rentekoers formule gebruik. Om die rentekoers te bereken, moet ons i die onderwerp maak van die formule:

$$
\begin{aligned}
A &= P(1 + in) \\
\frac{A}{P} &= 1 + in \\
\frac{A}{P} - 1 &= in \\
\frac{\frac{A}{P} - 1}{n} &= i \\
\text{Dus } i &= \frac{\left(\frac{7338{,}24}{5040}\right) - 1}{12} \\
&= 0{,}038 \\
&= 3{,}8\% \text{ per annum}
\end{aligned}
$$

11. Toe sy seun 10 jaar oud was, het Lefu R 2580 in die bank belê. Die belegging het gegroei teen 'n enkelvoudige rentekoers en toe Lefu se seun 20 jaar oud was, was die waarde van die belegging R 3689,40.

   Oplossing:

   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{R } 3689{,}40 \\
P &= \text{R } 2580 \\
i &= ? \\
n &= 20 - 10 = 10
\end{aligned}
$$

Die vraag sê dat die belegging "gegroei het teen 'n enkelvoudige rentekoers", dus moet ons die enkelvoudige rentekoers formule gebruik. Om die rentekoers te bereken, moet ons i die onderwerp maak van die formule:

$$\begin{aligned}
A &= P(1+in)\\
\frac{A}{P} &= 1+in\\
\frac{A}{P}-1 &= in\\
\frac{\frac{A}{P}-1}{n} &= i\\
\text{Dus } i &= \frac{\left(\frac{3689,40}{2580}\right)-1}{10}\\
&= 0,043\\
&= 4,3\% \text{ per annum}
\end{aligned}$$

12. Abdoul wil R 1080 belê teen 'n enkelvoudige rentekoers van 10,9% p.a.
Hoeveel jaar sal dit neem vir die geld om te groei tot R 3348? Rond jou antwoord **op** tot die naaste jaar.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned}
A &= \text{R } 3348\\
P &= \text{R } 1080\\
i &= \frac{10,9}{100} = 0,109\\
n &= ?
\end{aligned}$$

Om die aantal jare te bereken, moet ons n die onderwerp van die formule maak:

$$\begin{aligned}
A &= P(1+in)\\
\frac{A}{P} &= 1+in\\
\frac{A}{P}-1 &= in\\
\frac{\frac{A}{P}-1}{i} &= n\\
\text{Dus } n &= \frac{\left(\frac{3348}{1080}\right)-1}{0,109}\\
&= 19,3\\
&= 20 \text{ jare} \quad \Leftarrow \text{rond OP tot die naaste heelgetal}
\end{aligned}$$

13. Andrew wil R 3010 belê teen 'n enkelvoudige rentekoers van 11,9% p.a.
Hoeveel jaar sal dit neem vir die geld om te groei tot R 14 448? Rond jou antwoord **op** tot die naaste jaar.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned}
A &= \text{R } 14\,448\\
P &= \text{R } 3010\\
i &= \frac{11,9}{100} = 0,119\\
n &= ?
\end{aligned}$$

Om die aantal jare te bereken, moet ons n die onderwerp maak van die formule:

$$\begin{aligned}
A &= P(1+in) \\
\frac{A}{P} &= 1+in \\
\frac{A}{P} - 1 &= in \\
\frac{\frac{A}{P} - 1}{i} &= n \\
\text{Dus } n &= \frac{\left(\frac{14\,448}{3010}\right) - 1}{0{,}119} \\
&= 31{,}9 \\
&= 32 \text{ jare} \qquad \Leftarrow \text{rond OP tot die naaste heelgetal}
\end{aligned}$$

Boontoe afgerond tot die naaste jaar, sal dit 32 jaar neem om die doel te bereik om R 14 448 te spaar.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K49 2. 2K4B 3. 2K4C 4. 2K4D 5a. 2K4F 5b. 2K4G 6. 2K4H 7. 2K4J
8. 2K4K 9. 2K4M 10. 2K4N 11. 2K4P 12. 2K4Q 13. 2K4R

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

9.3 Saamgestelde rente

Die krag van saamgestelde rente

Exercise 9 – 2:

1. 'n Bedrag van R 3500 word belê in 'n spaarrekening wat 'n saamgestelde rentekoers van 7,5% p.a. betaal. Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 2 jaar.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
P &= 3500 \\
i &= 0{,}075 \\
n &= 2 \\
A &= ?
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= 3500(1+0{,}075)^2 \\
&= \text{R } 4044{,}69
\end{aligned}$$

2. 'n Bedrag van R 3070 word belê in 'n spaarrekening wat 'n saamgestelde rentekoers van 11,6% p.a. betaal. Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 6 jaar. Soos gewoonlik, met finansiële berekeninge, rond jou antwoord af tot twee desimale plekke, maar moenie afrond voor die finale antwoord nie.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned}
P &= 3070 \\
i &= \frac{11{,}6}{100} = 0{,}116 \\
n &= 6 \\
A &= ?
\end{aligned}$$

Die opgehoopte bedrag is:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 3070\,(1+0{,}116)^6 \\ &= \text{R } 5930{,}94 \end{aligned}$$

3. 'n Bedrag van R 6970 word belê in 'n spaarrekening wat 'n saamgestelde rentekoers van 10,2% p.a. betaal. Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 3 jaar. Soos gewoonlik, met finansiële berekeninge, rond jou antwoord af tot twee desimale plekke, maar moenie afrond voor die finale antwoord nie.
   Oplossing:
   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} P &= 6970 \\ i &= \frac{10{,}2}{100} = 0{,}102 \\ n &= 3 \\ A &= ? \end{aligned}$$

   Die opgehoopte bedrag is:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 6970\,(1+0{,}102)^3 \\ &= \text{R } 9327{,}76 \end{aligned}$$

4. Nicola wil 'n bedrag geld belê teen 'n saamgestelde rentekoers van 11% p.a. Hoeveel geld (tot die naaste rand) behoort sy te belê as sy die som van R 100 000 wil bereik in vyf jaar?
   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= 100\ 000 \\ P &= ? \\ i &= 0{,}11 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ 100\ 000 &= P(1+0{,}11)^5 \\ \frac{100\ 000}{(1{,}11)^5} &= P \\ P &= \text{R } 59\ 345{,}13 \end{aligned}$$

5. Thobeka wil geld belê teen 'n saamgestelde rentekoers van 11,8% p.a.
   Hoeveel geld behoort sy te belê as sy 'n som van R 30 000 wil bereik in 2 jaar? Rond jou antwoord op tot die naaste rand.
   Oplossing:
   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= \text{R } 30\ 000 \\ P &= ? \\ i &= \frac{11{,}8}{100} = 0{,}118 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

   Om die bedrag te bepaal wat sy moet belê, moet ons P die onderwerp te maak van die formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ \frac{A}{(1+i)^n} &= P \\ \frac{\text{R } 30\ 000}{(1+0{,}118)^2} &= P \\ P &= \text{R } 24\ 001{,}46 \end{aligned}$$

Sy moet R 24 002,00 te belê.

6. Likengkeng wil 'n bedrag geld belê teen 'n saamgestelde rentekoers van 11,4% p.a.

   Hoeveel geld behoort sy te belê as sy 'n som van R 38 200 wil bereik in 7 jaar? Rond jou antwoord op tot die naaste rand.

   Oplossing:

   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= 38\ 200 \\ i &= \frac{11{,}4}{100} = 0{,}114 \\ n &= 7 \\ P &= ? \end{aligned}$$

   Om die bedrag te bepaal wat sy moet belê, moet ons P die onderwerp maak van die formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ \frac{A}{(1+i)^n} &= P \\ \frac{38\ 200}{(1+\frac{11{,}4}{100})^7} &= P \\ P &= \text{R } 17\ 941{,}84 \\ \text{Dus is die antwoord: } & \text{R } 17\ 942{,}00 \end{aligned}$$

7. Morgan belê R 5000 in 'n rekening wat 'n eenmalige bedrag uitbetaal aan die einde van 5 jaar. As hy R 7500 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank vir hom aangebied?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= 7500 \\ P &= 5000 \\ i &= ? \\ n &= 5 \end{aligned}$$

$$A = P(1+i)^n$$

$$\begin{aligned} 7500 &= 5000(1+i)^5 \\ \frac{7500}{5000} &= (1+i)^5 \\ \sqrt[5]{\frac{7500}{5000}} &= (1+i) \\ \sqrt[5]{\frac{7500}{5000}} - 1 &= i \\ i &= 0{,}0844717712 \end{aligned}$$

   Die rentekoers is 8,45% p.a

8. Kabir belê R 1790 in 'n rekening wat 'n eenmalige bedrag uitbetaal aan die einde van 9 jaar.

   As hy R 2613,40 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank vir hom aangebied? Gee die antwoord korrek tot een desimale plek.

   Oplossing:

   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= \text{R } 2613{,}40 \\ P &= \text{R } 1790 \\ i &= ? \\ n &= 9 \end{aligned}$$

Om die rentekoers te bereken, moet ons i die onderwerp maak van die formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ \frac{A}{P} &= (1+i)^n \\ \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{n}} &= 1+i \\ \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 &= i \\ \text{Dus } i &= \left(\frac{2613{,}40}{1790}\right)^{\frac{1}{9}} - 1 \\ &= 0{,}043 \\ &= 4{,}3\% \text{ per annum} \end{aligned}$$

9. Bongani belê R 6110 in 'n rekening wat 'n eenmalige bedrag uitbetaal aan die einde van 7 jaar. As hy R 6904,30 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank vir hom aangebied? Gee die antwoord korrek tot een desimale plek.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= \text{R } 6904{,}30 \\ P &= \text{R } 6110 \\ i &= ? \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Om die rentekoers te bereken, moet ons i die onderwerp maak van die formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ \frac{A}{P} &= (1+i)^n \\ \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{n}} &= 1+i \\ \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 &= i \\ \text{Dus } i &= \left(\frac{6904{,}30}{6110}\right)^{\frac{1}{7}} - 1 \\ &= 0{,}018 \\ &= 1{,}8\% \text{ per annum} \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.
1. 2K4V 2. 2K4W 3. 2K4X 4. 2K4Y 5. 2K4Z 6. 2K52 7. 2K53 8. 2K54 9. 2K55

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

9.4 Berekening deur gebruik van enkelvoudige en saamgestelde rente

Huurkoop

Exercise 9 – 3:

1. Angelique wil 'n mikrogolfoond koop met 'n huurkoopooreenkoms. Die kontantprys van die mikrogolfoond is

R 4400. Sy moet 'n deposito van 10% betaal en sy delg die res van die lening oor 12 maande teen 'n rentekoers van 9% p.a.

a) Wat is die leningsbedrag?
Oplossing:
Bereken eers die bedrag vir die deposito:

$$\begin{aligned} \text{deposito} &= 4400 \times \frac{10}{100} \\ &= 440 \end{aligned}$$

Om die aanvangsbedrag van die lening te bepaal, moet ons die deposito bedrag van die kontantprys aftrek:

$$\begin{aligned} P &= \text{ kontantprys } - \text{ deposito} \\ &= 4400 - 440 \\ &= \text{R } 3960{,}00 \end{aligned}$$

b) Wat is die opgehoopte leningsbedrag?
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= \text{R } 3960{,}00 \\ i &= \frac{9}{100} = 0{,}09 \\ n &= 1 \end{aligned}$$

Om die opgehoopte bedrag te bereken, gebruik ons die enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= \text{R } 3960{,}00\,(1 + 0{,}09 \times 1) \\ &= \text{R } 4316{,}40 \end{aligned}$$

c) Wat is Angelique se maandelikse terugbetalings?
Oplossing:
Om die maandelikse paaiement te bepaal, deel ons die opgehoopte bedrag A deur die totale aantal maande:

$$\begin{aligned} \text{Maandelikse paaiement} &= \frac{A}{\text{aantal maande}} \\ &= \frac{\text{R } 4316{,}40}{12} \\ &= \text{R } 359{,}70 \end{aligned}$$

d) Wat is die totale bedrag wat sy betaal het vir die mikrogolfoond?
Oplossing:
Om die totale bedrag wat betaal is te bepaal, tel ons die opgehoopte bedrag en die deposito bymekaar:

$$\begin{aligned} \text{Totale bedrag} &= A + \text{ deposito} \\ &= \text{R } 4316{,}40 + 440 \\ &= \text{R } 4756{,}40 \end{aligned}$$

2. Nyakallo wil 'n televisiestel koop met 'n huurkoopooreenkoms. Die kontantprys van die televisiestel is R 5600. Daar word van haar verwag om 'n deposito van 15% te betaal en om die oorblywende lening af te betaal oor 24 maande, teen 'n rentekoers van 14% p.a.

   a) Wat is die leningsbedrag?
   Oplossing:
   Bereken eers die bedrag vir die deposito:

$$\text{deposito} = 5600 \times \frac{15}{100} = 840$$

Om die aanvangsbedrag van die lening te bepaal, moet ons die deposito bedrag van die kontantprys aftrek:

$$\begin{aligned} P &= \text{ kontantprys } - \text{ deposito} \\ &= 5600 - 840 \\ &= \text{R } 4760{,}00 \end{aligned}$$

b) Wat is die opgehoopte bedrag?
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &=? \\ P &= \text{R } 4760{,}00 \\ i &= \frac{14}{100} = 0{,}14 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

Om die opgehoopte bedrag te bereken, gebruik ons die enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= \text{R } 4760{,}00\,(1 + 0{,}14 \times 2) \\ &= \text{R } 6092{,}80 \end{aligned}$$

c) Wat is Nyakallo se maandelikse terugbetaling?
Oplossing:
Om die maandelikse paaiement te bepaal, deel ons die opgehoopte bedrag A deur die totale aantal maande:

$$\begin{aligned} \text{Maandelikse paaiement} &= \frac{A}{\text{aantal maande}} \\ &= \frac{6092{,}80}{24} \\ &= \text{R } 253{,}87 \end{aligned}$$

d) Wat is die totale bedrag wat sy betaal het vir die televisiestel?
Oplossing:
Om die totale bedrag wat betaal is te bepaal, tel ons die opgehoopte bedrag en die deposito bymekaar:

$$\begin{aligned} \text{Totale bedrag} &= A + \text{ deposito} \\ &= \text{R } 6092{,}80 + 840 \\ &= \text{R } 6932{,}80 \end{aligned}$$

3. 'n Maatskappy wil 'n rekenaardrukker koop. Die kontantprys van die drukker is R 4500. 'n Deposito van 15% moet betaal word. Die oorblywende bedrag sal afbetaal word oor 24 maande teen 'n rentekoers van 12% p.a.

a) Wat is die leningsbedrag?
Oplossing:
Om die leningsbedrag te bepaal, bereken die bedrag van die deposito en trek dit dan af van die kontantprys:

$$\begin{aligned} P &= 4500 - (4500 \times 0{,}15) \\ &= 4500 - 675 \\ &= \text{R } 3825 \end{aligned}$$

b) Wat is die opgehoopte bedrag?
Oplossing:

Onthou dat huurkoop altyd enkelvoudige rente gebruik. Ons skryf die gegewe inligting neer en vervang dan hierdie waardes in die enkelvoudige renteformule.

$$\begin{aligned} P &= \text{R } 3825 \\ i &= 0{,}12 \\ n &= \frac{24}{12} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ A &= 3825(1 + (0{,}12)(2)) \\ A &= \text{R } 4743 \end{aligned}$$

c) Hoeveel sal die maatskappy elke maand betaal?

Oplossing:

Om die maandelikse paaiement (d.w.s.hoeveel die maatskappy elke maand betaal) te bepaal, deel ons die opgehoopte bedrag A deur die totale aantal maande:

$\frac{4743}{24} = \text{R } 197{,}63$

d) Wat is die totale bedrag wat die maatskappy betaal het vir die drukker?

Oplossing:

Om die totale bedrag te bepaal wat ons betaal het, tel ons die opgehoopte bedrag en die deposito bymekaar:

$675 + 4743 = \text{R } 5418$

4. Sandile koop 'n eetkamertafel wat R 8500 kos met 'n huurkoopooreenkoms. Hulle hef 'n rentekoers van 17,5% p.a. oor 3 jaar.

a) Hoeveel sal Sandile in totaal betaal?

Oplossing:

Die vraag meld nie of 'n deposito betaal is nie, dus aanvaar ons Sandile het nie een betaal nie. Ons skryf die gegewe inligting neer en gebruik dan die enkelvoudige rente formule om die geakkumuleerde bedrag te bereken.

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= 8500 \\ i &= 0{,}175 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ A &= 8500(1 + (0{,}175)(3)) \\ A &= \text{R } 12\ 962{,}50 \end{aligned}$$

b) Hoeveel rente betaal hy?

Oplossing:

Om die totale bedrag wat aan rente betaal is, te bereken, trek ons die kontantprys af van die opgehoopte bedrag.

$12\ 962{,}50 - 8500 = \text{R } 4462{,}50$

c) Wat is die maandelikse paaiement?

Oplossing:

Om die maandelikse paaiement te bereken, verdeel ons die opgehoopte bedrag A deur die totale aantal maande:

$\frac{12\ 962{,}50}{36} = \text{R } 360{,}07$

5. Mike koop 'n tafel wat R 6400 kos met 'n huurkoopooreenkoms. Hy word aangeslaan teen 'n rentekoers van 15% p.a. oor 4 jaar.

a) Hoeveel betaal Mike in totaal?

Oplossing:

Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$
\begin{aligned}
A &= ? \\
P &= \text{R } 6400 \\
i &= \frac{15}{100} = 0{,}15 \\
n &= 4
\end{aligned}
$$

Om die opgehoopte bedrag te bereken, gebruik ons die enkelvoudige rente formule:

$$
\begin{aligned}
A &= P(1 + in) \\
&= 6400(1 + 0{,}15 \times 4) \\
&= \text{R } 10\,240
\end{aligned}
$$

b) Hoeveel rente betaal hy?
Oplossing:
Om die rentebedrag te bepaal, trek ons die hoofsom af van die geakkumuleerde bedrag

$$
\begin{aligned}
\text{Rente bedrag} &= A - P \\
&= 10\,240 - 6400 \\
&= \text{R } 3840
\end{aligned}
$$

c) Wat is die maandelikse paaiement?
Oplossing:
Om die maandelikse paaiement te bepaal, deel ons die opgehoopte bedrag A deur die totale aantal maande:

$$
\begin{aligned}
\text{Maandelikse paaiement} &= \frac{A}{\text{aantal maande}} \\
&= \frac{10\,240}{4 \times 12} \\
&= \text{R } 213{,}33
\end{aligned}
$$

6. Talwar koop 'n kas wat R 5100 kos op huurkoop. Hy word gevra om 'n rentekoers van 12% p.a. oor 2 jaar te betaal.

a) Hoeveel sal Talwar in totaal betaal?
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$
\begin{aligned}
A &= ? \\
P &= \text{R } 5100 \\
i &= \frac{12}{100} = 0{,}12 \\
n &= 2
\end{aligned}
$$

Om die opgehoopte bedrag te bereken, gebruik ons die enkelvoudige rente formule:

$$
\begin{aligned}
A &= P(1 + in) \\
&= 5100(1 + 0{,}12 \times 2) \\
&= \text{R } 6324
\end{aligned}
$$

b) Hoeveel rente betaal hy?
Oplossing:
Om die rentebedrag te bepaal, trek ons die hoofsom af van die geakkumuleerde bedrag

$$
\begin{aligned}
\text{Rente bedrag} &= A - P \\
&= 6324 - 5100 \\
&= \text{R } 1224
\end{aligned}
$$

c) Wat is die maandelikse paaiement?
Oplossing:

Om die maandelikse paaiement te bepaal, deel ons die opgehoopte bedrag A deur die totale aantal maande:

$$\begin{aligned}\text{Maandelikse paaiement} &= \frac{A}{\text{aantal maande}}\\ &= \frac{6324}{2 \times 12}\\ &= \text{R } 263{,}50\end{aligned}$$

7. 'n Sitkamerstel word te koop geadverteer op televisie. Dit kan afbetaal word oor 36 maande teen R 150 per maand.

   a) As dit aanvaar word dat geen deposito betaalbaar is nie, hoeveel sal die koper betaal vir die sitkamerstel wanneer dit uiteindelik afbetaal is?
   Oplossing:
   $36 \times 150 = \text{R } 5400$
   b) As die rentekoers 9% p.a. is, wat is die kontantprys van die stel?
   Oplossing:

$$\begin{aligned}A &= 5400\\ P &= ?\\ i &= 0{,}09\\ n &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= P(1 + in)\\ 5400 &= P(1 + (0{,}09)(3))\\ \frac{5400}{1{,}27} &= P\\ P &= \text{R } 4251{,}97\end{aligned}$$

8. Twee winkels bied 'n gesamentlike yskas en wasmasjien pakket aan. Winkel A bied 'n maandelikse paaiement van R 350 oor 24 maande aan. Winkel B bied 'n maandelikse paaiement van R 175 oor 48 maande aan.
   As beide winkels 7,5% rente vra, by watter winkel behoort jy die yskas en wasmasjien pakket te koop as jy die minste rente wil betaal?
   Oplossing:
   Om uit te vind hoeveel rente by elkeen van die winkels betaal sal word, moet ons eers die kontantprys van die yskas en wasmasjien pakket bereken.
   Winkel A:

$$\begin{aligned}A &= 350 \times 24 = 8400\\ P &= ?\\ i &= 0{,}075\\ n &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= P(1 + in)\\ 8400 &= P(1 + (0{,}075)(2))\\ \frac{8400}{2{,}15} &= P\\ P &= \text{R } 3906{,}98\end{aligned}$$

   Dus is die rente R 8400 − R 3906,98 = R 4493,02
   Winkel B:

$$\begin{aligned}
A &= 175 \times 48 = 8400 \\
P &= ? \\
i &= 0{,}075 \\
n &= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= P(1 + in) \\
8400 &= P(1 + (0{,}075)(4)) \\
\frac{8400}{4{,}3} &= P \\
P &= \text{R } 1953{,}49
\end{aligned}$$

Dus is die rente R 8400 − R 1953,49 = R 6446,51

Om die minste rente te betaal, behoort jy die yskas en wasmasjien pakket by winkel A te koop.

9. Tlali wil 'n nuwe rekenaar koop en besluit om een te koop met 'n huurkoopooreenkoms. Die kontantprys van die rekenaar is R 4250. Hy sal dit betaal oor 'n tydperk van 30 maande teen 'n rentekoers van 9,5% p.a. 'n Versekeringspremie van R 10,75 word by elke maandelike paaiement gevoeg. Hoe groot is sy maandelikse betalings?

Oplossing:

$$\begin{aligned}
P &= 4250 \\
i &= 0{,}095 \\
n &= \frac{30}{12} = 2{,}5
\end{aligned}$$

Die vraag maak nie melding van 'n deposito nie, dus aanvaar ons Tlali het nie een betaal nie.

$$\begin{aligned}
A &= P\,(1 + in) \\
A &= 4250\,(1 + 0{,}095 \times 2{,}5) \\
&= 5259{,}38
\end{aligned}$$

Die maandelikse paaiement is:

$$\begin{aligned}
\text{Maandelikse paaiement} &= \frac{5259{,}38}{36} \\
&= 146{,}09
\end{aligned}$$

Voeg die versekeringspremie by R 146,09 + R 10,75 = R 156,84.

10. Richard beplan om 'n nuwe stoof te koop op huurkoop. Die kontantprys van die stoof is R 6420. Hy betaal 'n deposito van 10% en betaal dan die oorblywende bedrag af oor 36 maande teen 'n rentekoers van 8% p.a. 'n Versekeringspremie van R 11,20 word bygevoeg by elke maandelikse paaiement. Bereken Richard se maandelikse paaiement.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
P &= 6420 - (0{,}10)(6420) = 5778 \\
i &= 0{,}08 \\
n &= \frac{36}{12} = 3
\end{aligned}$$

Bereken die opgehoopte bedrag:

$$\begin{aligned}
A &= P\,(1 + in) \\
A &= 5778\,(1 + 0{,}08 \times 3) \\
&= 7164{,}72
\end{aligned}$$

Bereken die maandelikse paaiemente op die huurkoopooreenkoms:

$$\text{Maandelikse paaiement} = \frac{7164,72}{36}$$
$$= 199,02$$

Voeg die versekeringspremie by R 199,02 + R 11,20 = R 210,22.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K57 2. 2K58 3. 2K59 4. 2K5B 5. 2K5C 6. 2K5D
7. 2K5F 8. 2K5G 9. 2K5H 10. 2K5J

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Inflasie

Exercise 9 – 4:

1. Die prys van sakkie appels is R 12. Hoeveel sal dit oor 9 jaar kos as die inflasiekoers 12% p.a. is?
   Oplossing:
   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:
   - $A = ?$
   - $P =$ R 12
   - $n = 9$
   - $i = \frac{12}{100}$

   Om die toekomstige koste te bereken, gebruik ons die formule vir saamgestelde rente:
   $$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 12 \times \left(1 + \frac{12}{100}\right)^9 \\ &= \text{R } 33{,}28 \end{aligned}$$

2. Die prys van 'n sak aartappels is R 15.
   Hoeveel sal dit oor 6 jaar kos as die inflasiekoers 12% p.a. is?
   Oplossing:
   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:
   - $A = ?$
   - $P =$ R 15
   - $n = 6$
   - $i = \frac{12}{100}$

   Om die toekomstige koste te bereken, gebruik ons die formule vir saamgestelde rente:
   $$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 15 \times \left(1 + \frac{12}{100}\right)^6 \\ &= \text{R } 29{,}61 \end{aligned}$$

3. Die prys van 'n boks springmielies is R 15. Hoeveel sal dit oor 4 jaar kos as die inflasiekoers 11% p.a. is?
   Oplossing:
   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:
   - $A = ?$
   - $P =$ R 15

- $n = 4$
- $i = \frac{11}{100}$

Om die toekomstige koste te bereken, gebruik ons die formule vir saamgestelde rente:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 15 \times \left(1 + \frac{11}{100}\right)^4 \\ &= \text{R } 22{,}77 \end{aligned}$$

4. 'n Pakkie rosyntjies kos vandag R 24. Hoeveel het dit 4 jaar gelede gekos as die gemiddelde inflasiekoers 13% p.a. was? Rond jou antwoord af tot 2 desimale plekke.

   Oplossing:

   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

   - $A = \text{R } 24$
   - $P = ?$
   - $i = \frac{13}{100}$
   - $n = 4$

   Ons gebruik die saamgestelde rente formule en maak P die onderwerp:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ P &= \frac{A}{(1+i)^n} \\ &= \frac{24}{\left(1 + \frac{13}{100}\right)^4} \\ &= \text{R } 14{,}72 \end{aligned}$$

5. 'n Blik koekies kos vandag R 24. Hoeveel het dit 5 jaar gelede gekos as die gemiddelde inflasiekoers 11% p.a. was? Rond jou antwoord af tot 2 desimale plekke.

   Oplossing:

   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

   - $A = \text{R } 24$
   - $P = ?$
   - $i = \frac{11}{100}$
   - $n = 5$

   Ons gebruik die saamgestelde rente formule en maak P die onderwerp:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ P &= \frac{A}{(1+i)^n} \\ &= \frac{24}{\left(1 + \frac{11}{100}\right)^5} \\ &= \text{R } 14{,}24 \end{aligned}$$

6. As die gemiddelde inflasiekoers oor die afgelope paar jaar 7,3% p.a. was en jou water- en kragrekening is nou gemiddeld R 1425, wat kan jy verwag om te betaal oor 6 jaar?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= 1425 \\ i &= 0{,}073 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ A &= 1425(1+0{,}073)^6 \\ A &= \text{R } 2174{,}77 \end{aligned}$$

7. ’n Pak springmielies en ’n Coke kos nou R 60 by die flick. As die gemiddelde inflasiekoers 9,2% p.a. is, wat was die prys van springmielies en Coke 5 jaar gelede?
   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= \text{R } 60 \\ P &= ? \\ i &= 0{,}092 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

$$A = P(1+i)^n$$

$$\begin{aligned} 60 &= P(1+0{,}092)^5 \\ \frac{60}{(1{,}092)^5} &= P \\ P &= \text{R } 38{,}64 \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op ’Oefen Wiskunde’.
1. 2K5K 2. 2K5M 3. 2K5N 4. 2K5P 5. 2K5Q 6. 2K5R 7. 2K5S

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Bevolkingsgroei

Exercise 9 – 5:

1. Die huidige bevolking van Durban is 3 879 090 en die gemiddelde bevolkingsgroei van Suid-Afrika is 1,1% p.a. Hoeveel kan die stadsbeplanners van Durban verwag sal die bevolking van die stad oor 6 jaar wees? Rond jou antwoord af tot die naaste heelgetal.
   Oplossing:
   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:
   - $A = ?$
   - $P = 3\ 879\ 090$
   - $i = \frac{1{,}1}{100}$
   - $n = 6$

   Ons gebruik die volgende formule om die verwagte bevolking van Durban te bereken:

$$\begin{aligned} A &= P\,(1+i)^n \\ &= 3\ 879\ 090\left(1+\frac{1{,}1}{100}\right)^6 \\ &= 4\ 142\ 255 \end{aligned}$$

2. Die huidige bevolking van Polokwane is 3 878 970 en die gemiddelde bevolkingsgroei in Suid-Afrika is 0,7% p.a. Wat kan die stadsbeplanners verwag sal die bevolking van Polokwane oor 12 jaar wees? Rond jou antwoord af tot die naaste heelgetal.
   Oplossing:
   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:
   - $A = ?$
   - $P = 3\ 878\ 970$
   - $i = \frac{0{,}7}{100}$
   - $n = 12$

Ons gebruik die volgende formule om die verwagte bevolking vir Polokwane te bereken:

$$
\begin{aligned}
A &= P\left(1+i\right)^{n} \\
&= 3\ 878\ 970\left(1+\frac{0{,}7}{100}\right)^{12} \\
&= 4\ 217\ 645
\end{aligned}
$$

3. 'n Klein dorpie in Ohio, VSA, ondervind 'n groot toename in geboortes. As die gemiddelde groeikoers van die bevolking 16% p.a. is, hoeveel babas sal gebore word vir die 1600 inwoners in die volgende 2 jaar?
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
A &= ? \\
P &= 1600 \\
i &= 0{,}16 \\
n &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= P(1+i)^{n} \\
A &= 1600(1+0{,}16)^{2} \\
A &= 2152{,}96 \\
2153 - 1600 &= 553
\end{aligned}
$$

   Daar sal min of meer 553 babas gebore word in die volgende twee jaar.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2K5T 2. 2K5V 3. 2K5W

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

9.5 Buitelandse wisselkoerse

Exercise 9 – 6:

1. Bridget wil 'n iPod koop wat £ 100 kos, met die wisselkoers tans op £ 1 = R 14. Sy bereken dat die wisselkoers in 'n maand se tyd sal daal tot R 12.
   a) Hoeveel sal die iPod in rand kos as sy dit nou koop?
      Oplossing:
      Koste in rand = (koste in pond) × wisselkoers.
      $= 100 \times \frac{14}{1} =$ R 1400
   b) Hoeveel sal sy spaar as die wisselkoers daal tot R 12?
      Oplossing:
      Koste in rand $= 100 \times \frac{12}{1} =$ R 1200
      Dus sal sy R 200 spaar (Besparing = R 1400 − R 1200)
   c) Hoeveel sal sy verloor as die wisselkoers verander na R 15?
      Oplossing:
      Koste in rand $= 100 \times \frac{15}{1} =$ R 1500
      Dus sal sy R 100 verloor (Verlies = R 1400 − R 1500)
2. Mthuli wil 'n televisiestel koop wat £ 130 kos, met die huidige wisselkoers op £ 1 = R 11. Hy beraam dat die wisselkoers sal daal tot R 9 oor 'n maand.
   a) Hoeveel sal die televisiestel in rand kos as hy dit nou koop?
      Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Koste} &= 130 \times \text{R } 11\\ &= \text{R } 1430\end{aligned}$$

b) Hoeveel sal hy spaar as die wisselkoers daal tot R 9?
Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Koste} &= 130 \times \text{R } 9\\ &= \text{R } 1170\end{aligned}$$

Dus is die bedrag wat hy sou spaar:

$$\begin{aligned}\text{Geld gespaar} &= \text{R } 1430 - \text{R } 1170\\ &= \text{R } 260\end{aligned}$$

c) Hoeveel sal hy verloor as die wisselkoers verander na R 19?
Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Koste} &= 130 \times \text{R } 19\\ &= \text{R } 2470\end{aligned}$$

Dus is die bedrag wat hy sou verloor:

$$\begin{aligned}\text{Bedrag verloor} &= \text{R } 2470 - \text{R } 1430\\ &= \text{R } 1040\end{aligned}$$

3. Nthabiseng wil 'n iPad koop wat £ 120 kos, met die huidige wisselkoers op £ 1 = R 14. Sy skat dat die wisselkoers sal daal tot R 9 oor 'n maand.

a) Hoeveel rand sal die iPad kos as sy dit nou koop?
Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Koste} &= 120 \times \text{R } 14\\ &= \text{R } 1680\end{aligned}$$

b) Hoeveel sal sy spaar as die wisselkoers daal tot R 9?
Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Koste} &= 120 \times \text{R } 9\\ &= \text{R } 1080\end{aligned}$$

Dus is die bedrag wat sy sou spaar:

$$\begin{aligned}\text{Bedrag gespaar} &= \text{R } 1680 - \text{R } 1080\\ &= \text{R } 600\end{aligned}$$

c) Hoeveel sal sy verloor as die wisselkoers verander na R 18?
Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Koste} &= 120 \times \text{R } 18\\ &= \text{R } 2160\end{aligned}$$

Dus is die bedrag wat sy sou verloor:

$$\begin{aligned}\text{Bedrag verloor} &= \text{R } 2160 - \text{R } 1680\\ &= \text{R } 480\end{aligned}$$

4. Bestudeer die volgende wisselkoerstabel:

Land	Geldeenheid	Wisselkoers
Verenigde Koninkryk van Brittanje (VK)	Pond (£)	R 14,13
Verenigde State van Amerika (VSA)	Dollar ($)	R 7,04

a) In Suid-Afrika kos 'n nuwe Honda Civic R 173 400. In Engeland kos dieselfde motor £ 12 200 en in die VSA $21 900. In watter land is die motor die goedkoopste?

Oplossing:

Om hierdie vraag te beantwoord, werk ons die prys van die motor in rand uit vir elke land en vergelyk dan die drie antwoorde om te sien watter een die goedkoopste is. Prys in rand = prys in geldeenheid vermenigvuldig met die wisselkoers.

Prys in VK: $12\ 200 \times \frac{14{,}13}{1} = \text{R } 172\ 386$

Prys in VSA: $21\ 900 \times \frac{7{,}04}{1} = \text{R } 154\ 400$

As ons die drie pryse vergelyk, vind ons die motor is die goedkoopste in VSA.

b) Sollie en Arinda is kelners by 'n restaurant in Suid-Afrika wat baie buitelandse toeriste ontvang. Sollie ontvang 'n fooitjie van £ 6 van 'n toeris en Arinda een van $12. Wie het die grootste fooitjie ontvang?

Oplossing:

Sollie: $6 \times \frac{14{,}31}{1} = \text{R } 84{,}78$

Arinda: $12 \times \frac{7{,}04}{1} = \text{R } 84{,}48$.

Dus het Sollie die grootste fooitjie ontvang. Hy het 30 sent meer as Arinda gekry.

5. Yaseen wil 'n boek oor die internet koop. Hy kry 'n uitgewer in London wat die boek verkoop vir £ 7,19. Hierdie uitgewer bied gratis versending van die produk aan.

   Hy vind uit dieselfde boek is beskikbaar by 'n uitgewer in New York vir $8,49 met 'n versendingsfooi van $2.

   Vervolgens kyk hy na die wisselkoerse om te sien watter uitgewer die beste aanbod het. As $1 = R 11,48 en £ 1 = R 17,36, van watter uitgewer behoort hy die boek te koop?

   Oplossing:

   London uitgewer: $7{,}19 \times \frac{17{,}36}{1} = \text{R } 124{,}82$

   New York uitgewer: $(8{,}49 + 2) \times \frac{11{,}48}{1} = \text{R } 120{,}43$.

   Dus behoort Yaseen die boek te koop van die New York uitgewer.

6. Mathe spaar om haar vriend in Duitsland te gaan besoek. Sy bereken dat die totale koste van haar reis R 50 000 sal wees. Die wisselkoers is tans € 1 = R 13,22.

   Mathe se vriend besluit om haar te help en hy gee vir haar € 1000. Hoeveel geld (in rand) moet Mathe nou nog spaar?

   Oplossing:

   Ons bereken eers hoeveel Mathe se vriend vir haar gegee het in rand:

   $1000 \times \frac{13{,}22}{1} = \text{R } 13\ 220$.

   Dus moet Mathe nou nog R 50 000 − R 13 220 = R 36 780 spaar.

7. Lulamile en Jacob bied oor naweke toere aan. Hulle vra nie geld vir toere nie, maar aanvaar fooitjies van die groep. Die tabel hieronder toon die fooitjies aan wat hulle van die verskillende toergroepe ontvang het.

Groep	Totale fooie
Britse toeriste	£ 5,50
Japanese toeriste	¥ 85,50
Amerikaanse toeriste	$ 7,00
Nederlandse toeriste	€ 9,70
Brasiliaanse toeriste	40,50 BRL
Australiese toeriste	9,20 AUD
Suid-Afrikaanse toeriste	R 55,00

Die huidige wisselkoerse is:

£ 1 = R 17,12

¥ 1 = R 0,10

$ 1 = R 11,42

€ 1 = R 12,97

1 BRL = R 4,43

1 AUD = R 9,12

a) Watter groep toeriste het die beste fooi gegee? Hoeveel het hulle gegee (in rand)?

Oplossing:

Ons moet die waarde van elke fooi in rand bereken:

Groep	Totale fooie	Waarde van die fooi in rand:
Britse toeriste	£ 5,50	R 94,16
Japanese toeriste	¥ 85,50	R 8,55
Amerikaanse toeriste	$ 7,00	R 79,94
Nederlandse toeriste	€ 9,70	R 125,81
Brasiliaanse toeriste	40,50 BRL	R 179,42
Australiese toeriste	9,20 AUD	R 83,90
Suid-Afrikaanse toeriste	R 55,00	R 55,00

Die Brasiliaanse toeriste het die meeste fooitjies gegee. Die randwaarde van hulle fooi was R 179,42.

b) Watter groep toeriste het die swakste fooitjies gegee? Hoeveel het hulle gegee (in rand)?

Oplossing:

Die Japanese toeriste het die kleinste fooi gegee. Die randwaarde van hulle fooi was R 8,55.

8. Kayla beplan om haar familie in Malawi te besoek en om daarna tyd te spandeer in die Serengeti Reservaat in Tanzanië. Sy moet eers haar Suid-Afrikaanse rande omskakel na Malawi kwacha. Daarna moet sy haar oorblywende Malawi kwacha omskakel na Tanzanië sjielings.

   Sy vind uit oor die huidige wisselkoerse en vind die volgende inligting:

$$\begin{aligned} \text{R } 1 &= 39{,}46 \text{ MWK} \\ 1 \text{ MWK} &= 4{,}01 \text{ TZS} \end{aligned}$$

   Sy begin met R 5000 in Suid-Afrika. In Malawi spandeer sy 65 000 MWK. Wanneer sy die oorblywende Malawi kwacha vir Tanzanië sjieling omruil, hoeveel geld het sy (in Tanzanië sjieling)?

   Oplossing:

   Ons skakel eers oor van rand na Malawi kwacha: $5000 \times \frac{39{,}46}{1} = 197\ 300$ MWK

   Sy spandeer 65 000 MWK hiervan en dus het sy 132 300 MWK wat sy kan omruil vir Tanzanië sjieling.

   Nou kan ons Malawi kwacha omskakel na Tanzanië sjieling: 132 300 MWK $\times \frac{4{,}01}{1} = 530\ 523$ TZS

   Sy sal dus 530 523 TZS hê om in Tanzanië te spandeer.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K5Y 2. 2K5Z 3. 2K62 4. 2K63 5. 2K64 6. 2K65
7. 2K66 8. 2K67

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

9.6 Hoofstuk opsomming

End of chapter Exercise 9 – 7:

1. 'n Bedrag van R 6330 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 11% p.a. betaal. Bereken die balans wat geakkumuleer het teen die einde van 7 jaar.

   Oplossing:

   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= \text{R } 6330 \\ i &= \frac{11}{100} = 0{,}11 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1+in) \\ &= \text{R } 6330\,(1+(0{,}11)\times 7) \\ &= \text{R } 11\ 204{,}10 \end{aligned}$$

2. 'n Bedrag van R 1740 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente teen 'n koers van 7% p.a. betaal. Bereken die balans wat geakkumuleer het teen die einde van 6 jaar.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= \text{R } 1740 \\ i &= \frac{7}{100} = 0{,}07 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1+in) \\ &= \text{R } 1740\,(1+(0{,}07)\times 6) \\ &= \text{R } 2470{,}80 \end{aligned}$$

3. Adam open 'n spaarrekening toe hy 13 jaar oud is. Hy wil R 50 000 hê teen die tyd dat hy 18 is. As die spaarrekening enkelvoudige rente aanbied teen ' n koers van 8,5% per annum, hoeveel geld moet hy nou belê om sy doel te bereik?
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= \text{R } 50\ 000 \\ P &= ? \\ i &= \frac{8{,}5}{100} = 0{,}085 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1+in) \\ \text{R } 50\ 000 &= P\,(1+(0{,}085)\times 5) \\ P &= \frac{\text{R } 50\ 000}{1{,}425} \\ &= \text{R } 35\ 087{,}72 \end{aligned}$$

4. Toe sy seun 4 jaar oud was, het Dumile R 6700 gedeponeer in die bank. Die belegging het teen 'n enkelvoudige rentekoers gegroei en toe Dumile se seun 24 jaar oud was, was die waarde van die belegging R 11 524. Teen watter koers is die geld hele? Gee die antwoord korrek tot een desimale plek.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= \text{R } 11\ 524 \\ P &= \text{R } 6700 \\ i &= ? \\ n &= 24-4 = 20 \end{aligned}$$

Die vraag sê dat die belegging "gegroei het teen 'n enkelvoudige rentekoers", dus moet ons die enkelvoudige rentekoers formule gebruik. Om die rentekoers te bereken, moet ons i die onderwerp maak van die formule:

$$\begin{aligned}
A &= P(1 + in) \\
\frac{A}{P} &= 1 + in \\
\frac{A}{P} - 1 &= in \\
\frac{\frac{A}{P} - 1}{n} &= i \\
\text{Dus } i &= \frac{\left(\frac{11\ 524{,}00}{6700}\right) - 1}{20} \\
&= 0{,}036 \\
&= 3{,}6\% \text{ per annum}
\end{aligned}$$

5. Toe sy seun 7 jaar oud was, het Jared 'n deposito van R 5850 in die bank gemaak. Die belegging het teen 'n enkelvoudige rentekoers gegroei en toe Jared se seun 35 jaar oud was, was die waarde van die belegging R 11 746,80. Teen watter koers is die geld hele? Gee die antwoord korrek tot een desimale plek.
   Oplossing:
   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned}
A &= \text{R } 11\ 746{,}80 \\
P &= \text{R } 5850 \\
i &= ? \\
n &= 35 - 7 = 28
\end{aligned}$$

   Die vraag sê dat die belegging "gegroei het teen 'n enkelvoudige rentekoers", dus moet ons die enkelvoudige rentekoers formule gebruik. Om die rentekoers te bereken, moet ons i die onderwerp maak van die formule:

$$\begin{aligned}
A &= P(1 + in) \\
\frac{A}{P} &= 1 + in \\
\frac{A}{P} - 1 &= in \\
\frac{\frac{A}{P} - 1}{n} &= i \\
\text{Dus } i &= \frac{\left(\frac{11\ 746{,}80}{5850}\right) - 1}{28} \\
&= 0{,}036 \\
&= 3{,}6\% \text{ per annum}
\end{aligned}$$

6. Sehlolo wil R 6360 belê teen 'n enkelvoudige rentekoers van 12,4% p.a.
   Hoeveel jaar sal dit neem vir die geld om te groei tot R 26 075? Rond jou antwoord **op** tot die naaste jaar.
   Oplossing:
   Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned}
A &= \text{R } 26\ 075 \\
P &= \text{R } 6360 \\
i &= \frac{12{,}4}{100} = 0{,}124 \\
n &= ?
\end{aligned}$$

Om die aantal jare te bereken, moet ons n die onderwerp maak van die formule:

$$
\begin{aligned}
A &= P(1+in) \\
\frac{A}{P} &= 1+in \\
\frac{A}{P} - 1 &= in \\
\frac{\frac{A}{P}-1}{i} &= n \\
\text{Dus } n &= \frac{\left(\frac{26\ 075}{6360}\right)-1}{0{,}124} \\
&= 24{,}9987\ldots \\
&= 25 \text{ jare} \quad \Leftarrow \text{rond OP tot die naaste heelgetal}
\end{aligned}
$$

Boontoe afgerond tot die naaste jaar, sal dit 25 jaar neem om die doel te bereik om R 26 075 te spaar.

7. Mphikeleli wil R 5540 belê teen 'n enkelvoudige rentekoers van 9,1% p.a.
Hoeveel jaar sal dit neem vir die geld om te groei tot R 16 620? Rond jou antwoord **op** tot die naaste jaar.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{R } 16\ 620 \\
P &= \text{R } 5540 \\
i &= \frac{9{,}1}{100} = 0{,}091 \\
n &= ?
\end{aligned}
$$

Om die aantal jare te bereken, moet ons n die onderwerp maak van die formule:

$$
\begin{aligned}
A &= P(1+in) \\
\frac{A}{P} &= 1+in \\
\frac{A}{P} - 1 &= in \\
\frac{\frac{A}{P}-1}{i} &= n \\
\text{Dus } n &= \frac{\left(\frac{16\ 620}{5540}\right)-1}{0{,}091} \\
&= 21{,}9780\ldots \\
&= 22 \text{ jare} \quad \Leftarrow \text{rond OP tot die naaste heelgetal}
\end{aligned}
$$

Boontoe afgerond tot die naaste jaar, sal dit 22 jaar neem om die doel te bereik om R 16 620 te spaar.

8. 'n Bedrag van R 3500 is belê in 'n rekening wat enkelvoudige rente betaal teen 'n koers van 6,7% per annum. Bereken die bedrag geakkumuleerde rente teen die einde van 4 jaar.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$
\begin{aligned}
A &= ? \\
P &= \text{R } 3500 \\
i &= \frac{6{,}7}{100} = 0{,}067 \\
n &= 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= P(1+in) \\
&= 3500\,(1+(0{,}067)\,4) \\
&= \text{R } 4438
\end{aligned}
$$

Dus is die rente verdien R 4438 − R 3500 = R 938

9. 'n Bedrag van R 3270 word belê in 'n spaarrekening wat 'n saamgestelde rentekoers van 12,2% p.a. betaal. Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 7 jaar. Soos gewoonlik, met finansiële berekeninge, rond jou antwoord af tot twee desimale plekke, maar moenie afrond voor die finale antwoord nie.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= \text{R } 3270 \\ i &= \frac{12{,}2}{100} = 0{,}122 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Die opgehoopte bedrag is:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 3270\,(1+0{,}122)^7 \\ &= \text{R } 7319{,}78 \end{aligned}$$

10. 'n Bedrag van R 2380 word belê in 'n spaarrekening wat 'n saamgestelde rentekoers van 8,3% p.a. betaal. Bereken die balans wat opgebou het teen die einde van 7 jaar. Soos gewoonlik, met finansiële berekeninge, rond jou antwoord af tot twee desimale plekke, maar moenie afrond voor die finale antwoord nie.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= \text{R } 2380 \\ i &= \frac{8{,}3}{100} = 0{,}083 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Die opgehoopte bedrag is:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 2380\,(1+0{,}083)^7 \\ &= \text{R } 4158{,}88 \end{aligned}$$

11. Emma wil geld belê teen 'n saamgestelde rentekoers van 8,2% p.a. Hoeveel geld behoort sy te belê as sy 'n som van R 61 500 wil bereik in 4 jaar? Rond jou antwoord op tot die naaste rand.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= \text{R } 61\ 500 \\ P &= ? \\ i &= \frac{8{,}2}{100} = 0{,}082 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

Om die bedrag te bepaal wat sy moet belê, moet ons P die onderwerp maak van die formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ \frac{A}{(1+i)^n} &= P \\ \frac{61\ 500}{(1+0{,}082)^4} &= P \\ P &= \text{R } 44\ 871{,}03 \end{aligned}$$

Dus is die antwoord: R 44 872

12. Limpho wil geld belê teen 'n saamgestelde rentekoers van 13,9% p.a. Hoeveel geld behoort sy te belê as sy 'n som van R 24 300 wil bereik in 2 jaar? Rond jou antwoord op tot die naaste rand.

Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$A = \text{R } 24\ 300$$
$$P = ?$$
$$i = \frac{13{,}9}{100} = 0{,}139$$
$$n = 2$$

Om die bedrag te bepaal wat sy moet belê, moet ons P die onderwerp maak van die formule:

$$A = P(1+i)^n$$
$$\frac{A}{(1+i)^n} = P$$
$$\frac{24\ 300}{(1+0{,}139)^2} = P$$
$$P = \text{R } 18\ 730{,}91$$

Dus is die antwoord: R 18 731,00

13. Bereken die saamgestelde rente vir die volgende probleme.

a) 'n R 2000 lening vir 2 jaar teen 5% p.a.
Oplossing:

$$P = 2000$$
$$i = 0{,}05$$
$$n = 2$$
$$A = ?$$

$$A = P(1+i)^n$$

$$A = 2000(1+0{,}05)^2$$
$$A = \text{R } 2205$$

Dus is die bedrag rente verdien: $2205 - 2000 = \text{R } 205$

b) 'n R 1500 belegging vir 3 jaar teen 6% p.a.
Oplossing:

$$P = 1500$$
$$i = 0{,}06$$
$$n = 3$$
$$A = ?$$

$$A = P(1+i)^n$$

$$A = 1500(1+0{,}06)^3$$
$$A = \text{R } 1786{,}52$$

Dus is die bedrag rente verdien: $1786{,}52 - 1500 = \text{R } 286{,}52$

c) 'n R 800 lening vir 1 jaar teen 16% p.a.
Oplossing:

$$\begin{aligned} P &= 800 \\ i &= 0{,}16 \\ n &= 1 \\ A &= ? \end{aligned}$$

$$A = P(1+i)^n$$

$$\begin{aligned} A &= 800(1+0{,}16)^1 \\ A &= \text{R } 928 \end{aligned}$$

Dus is die bedrag rente verdien: $928 - 800 = \text{R } 128$

14. Ali belê R 1110 in 'n rekening wat 'n enkelbedrag uitbetaal aan die einde van 12 jaar.
    As hy R 1642,80 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank vir hom aangebied? Gee jou antwoord korrek tot een desimale plek.
    Oplossing:
    Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= \text{R } 1642{,}80 \\ P &= \text{R } 1110 \\ i &= ? \\ n &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ \text{R } 1642{,}80 &= \text{R } 1110(1+i)^{12} \\ \text{R } 1{,}48 &= (1+i)^{12} \\ \sqrt[12]{\text{R } 1{,}48} &= (1+i) \\ i &= 1{,}033... - 1 \\ &= 0{,}033... \\ &\approx 3{,}3\% \text{ per annum} \end{aligned}$$

15. Christopher belê R 4480 in 'n rekening wat 'n enkelbedrag uitbetaal aan die einde van 7 jaar.
    As hy R 6496,00 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank vir hom aangebied? Gee jou antwoord korrek tot een desimale plek.
    Oplossing:
    Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= \text{R } 6496 \\ P &= \text{R } 4480 \\ i &= ? \\ n &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ \text{R } 6496 &= \text{R } 4480(1+i)^{7} \\ \text{R } 1{,}45 &= (1+i)^{7} \\ \sqrt[7]{\text{R } 1{,}45} &= (1+i) \\ i &= 1{,}0545... - 1 \\ &= 0{,}0545... \\ &\approx 5{,}5\% \text{ per annum} \end{aligned}$$

16. Bereken hoeveel jy sal kry as jy R 500 belê vir 1 jaar teen die volgende rentekoerse:
    a) 6,85% enkelvoudige rente

Oplossing:

$$\begin{aligned} P &= 500 \\ i &= 0{,}685 \\ n &= 1 \\ A &= ? \\ \\ A &= P(1 + in) \\ A &= 500(1 + (0{,}685)(1)) \\ A &= 500(1{,}685) \\ A &= \text{R } 534{,}25 \end{aligned}$$

b) 4,00% saamgestelde rente

Oplossing:

$$\begin{aligned} P &= 500 \\ i &= 0{,}04 \\ n &= 1 \\ A &= ? \\ \\ A &= P(1 + i)^n \\ A &= 500(1 + 0{,}04)^1 \\ A &= \text{R } 520 \end{aligned}$$

17. Bianca het R 1450 om te belê vir 3 jaar. Bank A bied 'n spaarrekening aan wat enkelvoudige rente betaal teen 'n koers van 11% per annum, terwyl Bank B 'n spaarrekening aanbied wat saamgestelde rente betaal teen 'n koers van 10,5% per annum. Watter rekening sal vir Bianca die grootste geakkumuleerde balans oplewer teen die einde van 3 jaar?

Oplossing:

Bank A:

$$\begin{aligned} P &= 1450 \\ i &= 0{,}11 \\ n &= 3 \\ A &= ? \\ \\ A &= P(1 + in) \\ A &= 1450(1 + (0{,}11)(3)) \\ A &= 1450(1{,}33) \\ A &= \text{R } 1928{,}50 \end{aligned}$$

Bank B:

$$\begin{aligned} P &= 1450 \\ i &= 0{,}105 \\ n &= 3 \\ A &= ? \\ \\ A &= P(1 + i)^n \\ A &= 1450(1 + 0{,}105)^3 \\ A &= \text{R } 1956{,}39 \end{aligned}$$

Sy behoort Bank B te kies aangesien dit vir haar meer geld sal gee na 3 jaar.

18. Gegee:
'n Lening van R 2000 vir 'n jaar teen 'n rentekoers van 10% p.a.

a) Hoeveel enkelvoudige rente is betaalbaar op die lening?
Oplossing:

$$P = 2000$$
$$i = 0{,}10$$
$$n = 1$$
$$A = ?$$

$$A = P(1 + in)$$
$$A = 2000(1 + (0{,}10)(1))$$
$$A = 2000(1{,}10)$$
$$A = \text{R } 2200$$

Dus is die bedrag rente betaalbaar:$2200 - 2000 = \text{R } 200$

b) Hoeveel saamgestelde rente is betaalbaar op die lening?
Oplossing:

$$P = 2000$$
$$i = 0{,}10$$
$$n = 1$$
$$A = ?$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$A = 2000(1 + 0{,}10)^1$$
$$A = \text{R } 2200$$

Dus is die bedrag rente betaalbaar:$2200 - 2000 = \text{R } 200$

19. R 2250 is belê teen 'n rentekoers van 5,25% per annum.
Voltooi die volgende tabel.

Aantal jare	Enkelvoudige rente	Saamgestelde rente
1		
2		
3		
4		
20		

Oplossing:
Ons moet die geakkumuleerde bedrag bereken as die rente enkelvoudig bereken word. Ons gebruik $A = P(1 + in)$ om dit te doen.
Ons moet ook die bedrag bereken as die rente saamgesteld bereken word. Ons gebruik $A = P(1 + i)^n$ om dit te doen.
Vir beide gevalle let ons op dat:

$$A = ?$$
$$P = \text{R } 2250$$
$$i = 6{,}25\%$$

Aantal jare	Enkelvoudige rente	Saamgestelde rente
1	R 2390,63	R 2390,63
2	R 2531,25	R 2540,04
3	R 2671,88	R 2698,79
4	R 2812,50	R 2867,47
20	R 5062,50	R 7564,17

20. Bespreek:

a) Watter tipe rente sou jy graag wou gebruik as jy 'n lener is?

Oplossing:

Enkelvoudige rente. Rente word slegs bereken op die hoofsom en nie op die rente verdien gedurende vorige periodes nie. Dit sal daartoe lei dat die lener minder rente betaal.

b) Watter tipe rente sou jy wou gebruik as jy die bankier is?

Oplossing:

Saamgestelde rente. Rente word bereken op die oorspronklike bedrag sowel as op die rente verdien in vorige periodes. Dit lei daartoe dat die bankier meer geld kry vir die bank.

21. Portia wil 'n televisiestel koop op 'n huurkoopooreenkoms. Die kontantprys van die televisiestel is R 6000. Sy moet 'n deposito betaal van 20% en sy betaal die oorblywende leningsbedrag af oor 12 maande teen 'n rentekoers van 9% p.a.

a) Wat is die leningsbedrag?

Oplossing:

Bereken eers die bedrag vir die deposito:

$$\begin{aligned} \text{deposito } &= 6000 \times \frac{20}{100} \\ &= 1200 \end{aligned}$$

Om die aanvangsbedrag van die lening te bepaal, moet ons die deposito bedrag van die kontantprys aftrek:

$$\begin{aligned} P &= \text{ kontantprys } - \text{ deposito} \\ &= 6000 - 1200 \\ &= \text{R } 4800{,}00 \end{aligned}$$

b) Wat is die opgehoopte bedrag?

Oplossing:

Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= 4800{,}00 \\ i &= \frac{9}{100} = 0{,}09 \\ n &= \frac{12}{12} \end{aligned}$$

Om die opgehoopte bedrag te bereken, gebruik ons die enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= 4800{,}00 \left(1 + 0{,}09 \times \frac{12}{12}\right) \\ &= \text{R } 5232{,}00 \end{aligned}$$

c) Wat is Portia se maandelike terugbetaling?

Oplossing:

Om die maandelikse paaiement te bepaal, deel ons die opgehoopte bedrag A deur die totale aantal maande:

$$\begin{aligned} \text{Maandelikse paaiement} &= \frac{A}{\text{aantal maande}} \\ &= \frac{5232{,}00}{12} \\ &= \text{R } 436{,}00 \end{aligned}$$

d) Wat is die totale bedrag wat sy betaal het vir die televisiestel?

Oplossing:

Om die totale bedrag wat betaal is te bepaal, tel ons die opgehoopte bedrag en die deposito bymekaar:

$$\begin{aligned} \text{Totale bedrag } &= A + \text{ deposito} \\ &= 5232{,}00 + 1200 \\ &= \text{R } 6432{,}00 \end{aligned}$$

22. Gabisile wil 'n verwarmer koop op huurkoop. Die kontantprys van die verwarmer is R 4800. Sy moet 'n deposito betaal van 10% en betaal die oorblywende lening af oor 12 maande teen 'n rentekoers van 12% p.a.

a) Wat is die leningsbedrag?

Oplossing:

Bereken eers die bedrag vir die deposito:

$$\begin{aligned} \text{deposito} &= 4800 \times \frac{10}{100} \\ &= 480 \end{aligned}$$

Om die aanvangsbedrag van die lening te bepaal, moet ons die deposito bedrag van die kontantprys aftrek:

$$\begin{aligned} P &= \text{ kontantprys } - \text{ deposito} \\ &= 4800 - 480 \\ &= \text{R } 4320 \end{aligned}$$

b) Wat is die opgehoopte bedrag?

Oplossing:

Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= \text{R } 4320 \\ i &= \frac{12}{100} = 0{,}12 \\ n &= \frac{12}{12} \end{aligned}$$

Om die opgehoopte bedrag te bereken, gebruik ons die enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= \text{R } 4320\left(1 + \frac{12}{100} \times \frac{12}{12}\right) \\ &= \text{R } 4838{,}40 \end{aligned}$$

c) Wat is Gabisile se maandelikse paaiement?

Oplossing:

Om die maandelikse paaiement te bepaal, deel ons die opgehoopte bedrag A deur die totale aantal maande:

$$\begin{aligned} \text{Maandelikse paaiement} &= \frac{A}{\text{aantal maande}} \\ &= \frac{4838{,}40}{12} \\ &= \text{R } 403{,}20 \end{aligned}$$

d) Wat is die totale bedrag wat sy betaal het vir die verwarmer?

Oplossing:

Om die totale bedrag wat betaal is te bepaal, tel ons die opgehoopte bedrag en die deposito bymekaar:

$$\begin{aligned} \text{Totale bedrag } &= A + \text{ deposito} \\ &= \ 4838{,}40 + 480 \\ &= \text{R } 5318{,}40 \end{aligned}$$

23. Khayalethu koop 'n bank wat R 8000 kos met 'n huurkoopooreenkoms. Hulle hef 'n rentekoers van 12% p.a. oor 3 jaar.

a) Hoeveel sal Khayalethu in totaal betaal?

Oplossing:

Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= \text{R } 8000 \\ i &= \frac{12}{100} = 0{,}12 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

Om die opgehoopte bedrag te bereken, gebruik ons die enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= 8000(1 + 0{,}12 \times 3) \\ &= \text{R } 10\,880 \end{aligned}$$

b) Hoeveel rente betaal hy?
Oplossing:
Om die rentebedrag te bepaal, trek ons die hoofsom af van die geakkumuleerde bedrag

$$\begin{aligned} \text{rentebedrag} &= A - P \\ &= 10\,880 - 8000 \\ &= \text{R } 2880 \end{aligned}$$

c) Wat is die maandelikse paaiement?
Oplossing:
Om die maandelikse paaiement te bepaal, deel ons die opgehoopte bedrag A deur die totale aantal maande:

$$\begin{aligned} \text{Maandelikse paaiement} &= \frac{A}{\text{aantal maande}} \\ &= \frac{10\,880}{3 \times 12} \\ &= \text{R } 302{,}22 \end{aligned}$$

24. Jwayelani koop 'n sofabed van R 7700 met 'n huurkoopooreenkoms. Die rentekoers is 16% p.a. oor 5 jaar.

a) Hoeveel sal Jwayelani in totaal betaal?
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= 7700{,}00 \\ i &= \frac{16}{100} = 0{,}16 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Om die opgehoopte bedrag te bereken, gebruik ons die enkelvoudige rente formule:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= 7700(1 + 0{,}16 \times 5) \\ &= \text{R } 13\,860 \end{aligned}$$

b) Hoeveel rente betaal hy?
Oplossing:
Om die rentebedrag te bepaal, trek ons die hoofsom af van die geakkumuleerde bedrag

$$\begin{aligned} \text{Bedrag aan rente} &= A - P \\ &= 13\,860 - 7700 \\ &= \text{R } 6160 \end{aligned}$$

c) Wat is die maandelikse paaiement?
Oplossing:
Om die maandelikse paaiement te bepaal, deel ons die opgehoopte bedrag A deur die totale aantal maande:

$$\begin{aligned} \text{Maandelikse paaiement} &= \frac{A}{\text{aantal maande}} \\ &= \frac{13\,860}{5 \times 12} \\ &= \text{R } 231{,}00 \end{aligned}$$

25. Bonnie koop 'n stoof vir R 3750. Na 3 jaar is sy klaar betaal aan die stoof en die R 956,25 rente wat gehef was vir die huurkoop. Bepaal die enkelvoudige rentekoers wat gehef was.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Totale bedrag } &= 3750 + 956{,}25 = 4706{,}25\\
P &= 3750\\
i &= ?\\
n &= 3\\
A &= 4706{,}25\\
\\
A &= P(1 + in)\\
\\
4706{,}25 &= 3750(1 + i(3))\\
1{,}255 &= (1 + 3i)\\
0{,}255 &= 3i\\
i &= 0{,}085
\end{aligned}$$

Dus was die rentekoers: 8,5%

26. 'n Nuwe meubelwinkel het pas oopgemaak in die dorp en hulle het die volgende spesiale aanbiedings:

    Koop 'n sitkamerstel, 'n slaapkamerstel en die kombuistoerusting (yskas, stoof, wasmasjien) vir slegs R 50 000 en ontvang 'n gratis mikrogolfoond. Geen deposito word verlang nie en 'n 5 jaar afbetalingsplan is beskikbaar. Rente word gehef teen slegs 6,5% p.a.

    Babelwa koop al die items op huurkoop. Sy besluit om 'n deposito van R 1500 te betaal. Die winkel voeg 'n versekeringspremie van R 35,00 per maand by.

    Wat is Babelwa se maandelikse paaiement op die items?

    Oplossing:

$$\begin{aligned}
P &= 50\ 000 - 1500 = 48\ 500\\
i &= 0{,}065\\
n &= 5
\end{aligned}$$

    Bereken die opgehoopte bedrag:

$$\begin{aligned}
A &= P\left(1 + in\right)\\
A &= 48\ 500\left(1 + 0{,}065 \times 5\right)\\
&= 64\ 262{,}50
\end{aligned}$$

    Bereken die maandelikse paaiemente op die huurkoopooreenkoms:

$$\begin{aligned}
\text{Maandelikse paaiement} &= \frac{64\ 262{,}50}{(5)(12)}\\
&= 1071{,}04
\end{aligned}$$

    Voeg die versekeringspremie by R 1071,04 + R 35,00 = R 1106,04.

27. Die prys van 2 liter melk is R 17. Hoeveel sal dit oor 3 jaar kos as die inflasiekoers 13% p.a. is?

    Oplossing:

    Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

    - $A = ?$
    - $P =$ R 17
    - $n = 3$
    - $i = \frac{13}{100} = 0{,}13$

    Om die toekomstige koste te bereken, gebruik ons die formule vir saamgestelde rente:

$$\begin{aligned}
A &= P\left(1 + i\right)^n\\
&= 17 \times \left(1 + 0{,}13\right)^3\\
&= \text{R } 24{,}53
\end{aligned}$$

28. Die prys van 'n 2 l bottel vrugtesap is R 16. Wat sal die sap oor 8 jaar kos met 'n inflasiekoers 7% p.a.?

    Oplossing:

    Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

- $A = ?$
- $P =$ R 16
- $n = 8$
- $i = \frac{7}{100} = 0{,}07$

Om die toekomstige koste te bereken, gebruik ons die formule vir saamgestelde rente:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 16 \times (1 + 0{,}07)^8 \\ &= \text{R } 27{,}49 \end{aligned}$$

29. 'n Boks vrugtelekkers kos vandag R 27. Hoeveel het dit 8 jaar gelede gekos as die gemiddelde inflasiekoers 10% p.a. was? Rond jou antwoord af tot 2 desimale plekke.

Oplossing:

Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

- $A =$ R 27
- $P = ?$
- $i = \frac{10}{100} = 0{,}10$
- $n = 8$

Ons gebruik die saamgestelde rente formule en maak P die onderwerp:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ P &= \frac{A}{(1+i)^n} \\ &= \frac{27}{(1+0{,}10)^8} \\ &= \text{R } 12{,}60 \end{aligned}$$

30. 'n Boksie Smarties kos vandag R 23. Hoeveel het dieselfde boksie 8 jaar gelede gekos as die gemiddelde inflasiekoers 14% p.a. was? Rond jou antwoord af tot 2 desimale plekke.

Oplossing:

Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

- $A =$ R 23
- $P = ?$
- $i = \frac{14}{100} = 0{,}14$
- $n = 8$

Ons gebruik die saamgestelde rente formule en maak P die onderwerp:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ P &= \frac{A}{(1+i)^n} \\ &= \frac{23}{(1+0{,}14)^8} \\ &= \text{R } 8{,}06 \end{aligned}$$

31. Volgens die laaste sensus, het Suid-Afrika tans 'n bevolking van 57 000 000.

    a) As die verwagte jaarlikse groeitempo 0,9% is, bereken hoeveel Suid-Afrikaners sal daar oor 10 jaar wees (korrek tot die naaste honderd duisend).

    Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= 57\ 000\ 000(1 + \frac{0{,}9}{100})^{10} \\ &= 57\ 000\ 000(1{,}009)^{10} \\ &= 57\ 000\ 000(1{,}0937)^{10} \\ &= 62{,}3 \text{ miljoen mense} \end{aligned}$$

    b) As dit na 10 jaar blyk dat die bevolking in der waarheid gegroei het met 10 miljoen tot 67 miljoen, wat was die groeitempo?

Oplossing:

$$\begin{aligned} 67 &= 57\left(1+\frac{i}{100}\right)^{10} \\ \sqrt[10]{\frac{67}{57}} &= 1+\frac{i}{100} \\ \frac{i}{100} &= 1{,}01629 - 1 \\ i &= 100(0{,}016) \\ &= 1{,}69 \\ &\approx 1{,}7 \end{aligned}$$

32. Die huidige bevolking van Kaapstad is 3 875 190 en die gemiddelde bevolkingsgroei in Suid-Afrika is 0,4% p.a. Wat verwag die stadsbeplanners sal die bevolking van Kaapstad oor 12 jaar wees?
Nota: Rond jou antwoord af tot die naaste heelgetal.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:

$$\begin{aligned} A &= ? \\ P &= 3\ 875\ 190 \\ i &= \frac{0{,}4}{100} = 0{,}004 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

Ons gebruik die volgende formule om die verwagte bevolking van Kaapstad te bereken:

$$\begin{aligned} A &= P\left(1+i\right)^{n} \\ &= 3\ 875\ 190\left(1+0{,}004\right)^{12} \\ &= 4\ 065\ 346 \end{aligned}$$

33. Die huidige bevolking van Pretoria is 3 888 420 en die gemiddelde bevolkingsgroei in Suid-Afrika is 0,7% p.a. Wat sal die bevolking van Pretoria oor 7 jaar wees?
Nota: Rond jou antwoord af tot die naaste heelgetal.
Oplossing:
Lees die vraag versigtig en skryf die gegewe inligting neer:
- $A = ?$
- $P = 3\ 888\ 420$
- $i = \frac{0{,}7}{100}$
- $n = 7$

Ons gebruik die volgende formule om die verwagte bevolking van Pretoria te bepaal:

$$\begin{aligned} A &= P\left(1+i\right)^{n} \\ &= 3\ 888\ 420\left(1+\frac{0{,}7}{100}\right)^{7} \\ &= 4\ 083\ 001 \end{aligned}$$

34. Monique wil 'n iPad koop wat £ 140 kos, met die wisselkoers tans op £ 1 = R 15. Sy skat dat die wisselkoers sal daal tot R 9 oor 'n maand.

a) Hoeveel sal die iPad kos, in rand, as sy dit nou koop?
Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Koste} &= 140 \times \text{R } 15 \\ &= \text{R } 2100 \end{aligned}$$

b) Hoeveel sal sy spaar as die wisselkoers daal tot R 9?
Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Koste} &= 140 \times \text{R } 9 \\ &= \text{R } 1260 \end{aligned}$$

Dus is die bedrag wat sy sou spaar:

$$\begin{aligned} \text{Bedrag gespaar} &= \text{R } 2100 - \text{R } 1260 \\ &= \text{R } 840 \end{aligned}$$

c) Hoeveel sal sy verloor as die wisselkoers verander na R 20?
Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Koste} &= 140 \times \text{R } 20 \\ &= \text{R } 2800 \end{aligned}$$

Dus is die bedrag wat sy sou verloor:

$$\begin{aligned} \text{Bedrag verloor} &= \text{R } 2800 - \text{R } 2100 \\ &= \text{R } 700 \end{aligned}$$

35. Xolile wil 'n CD speler koop wat £ 140 kos, terwyl die huidige wisselkoers £ 1 = R 14 is. Sy skat dat die wisselkoers sal daal tot R 10 in 'n maand.

a) Hoeveel sal die CD speler kos, in rand, as sy dit nou koop?
Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Koste} &= 140 \times \text{R } 14 \\ &= \text{R } 1960 \end{aligned}$$

b) Hoeveel sal sy spaar as die wisselkoers val tot R 10?
Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Koste} &= 140 \times \text{R } 10 \\ &= \text{R } 1400 \end{aligned}$$

Dus is die bedrag wat sy sou spaar:

$$\begin{aligned} \text{Spaar} &= \text{R } 1960 - \text{R } 1400 \\ &= \text{R } 560 \end{aligned}$$

c) Hoeveel sal sy verloor as die wisselkoers verander na R 20?
Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Koste} &= 140 \times \text{R } 20 \\ &= \text{R } 2800 \end{aligned}$$

Dus is die bedrag wat sy sou verloor:

$$\begin{aligned} \text{Bedrag verloor} &= \text{R } 2800 - \text{R } 1960 \\ &= \text{R } 840 \end{aligned}$$

36. Alison gaan met vakansie na Europa. Haar hotel kos € 200 per nag. Hoeveel geld het sy nodig, in rand, om haar hotel rekening te kan betaal teen 'n wisselkoers van € 1 = R 9,20?
Oplossing:
Koste in rand = koste in euro × wisselkoers

$$\begin{aligned} \text{Koste in Rand} &= 200 \times 9{,}20 \\ &= \text{R } 1840 \end{aligned}$$

37. Jennifer koop boeke op die internet. Sy vind 'n uitgewer in die VK wat die boeke verkoop vir £ 16,99.

    Sy vind dieselfde boeke by 'n uitgewer in die VSA vir \$23,50.

    Vervolgens kyk sy na die wisselkoers om te sien watter uitgewer vir haar die beste opsie gee. As \$1 = R 12,43 en £ 1 = R 16,89, van watter uitgewer behoort sy die boeke te koop?

    Oplossing:

    VK uitgewer: $16{,}99 \times \frac{16{,}89}{1} = \text{R } 286{,}96$

    VSA uitgewer: $23{,}50 \times \frac{12{,}43}{1} = \text{R } 292{,}11$.

    Dus behoort Jennifer boeke te koop van die VK uitgewer.

38. Bonani wen 'n reis na Machu Picchu in Peru, gevolg deur 'n toer na Brasilië vir die karnaval. Hy kry R 25 000 om te spandeer op sy toer.

    Hy kyk vervolgens na die huidige wisselkoerse en vind die volgende inligting:

    $$\text{R } 1 = 0{,}26 \text{ PEN}$$
    $$1 \text{ BRL} = 1{,}17 \text{ PEN}$$

    In Peru spandeer hy 2380 PEN. Hoeveel geld het hy (in Brasilië real) nadat hy sy orige Peru sol omgeskakel het na Brasilië real of BRL?

    Oplossing:

    Ons skakel eers om van rand na Peru sol: $25\,000 \times \frac{0{,}26}{1} = 6500 \text{ PEN}$

    Hy spandeer 2380 PEN hiervan en dus het hy 4120 PEN om om te skakel na BRL.

    Nou kan ons omskakel van Peru sol na BRL: $4120 \text{ PEN} \times \frac{1}{1{,}17} = 3521{,}37 \text{ BRL}$

    Dus het hy 3521,37 BRL om te spandeer in Brasilië.

39. As die wisselkoers van die Rand tot die Japanese Yen ¥ 100 = R 6,23 is, en tot die Australiese dollar 1 AUD = R 5,11 is, bereken die wisselkoers tussen die Australiese dollar en die Japanese yen.

    Oplossing:

    $$\begin{aligned} \frac{\text{AUD}}{\text{Yen}} &= \frac{\text{ZAR}}{\text{Yen}} \times \frac{\text{AUD}}{\text{ZAR}} \\ &= \frac{6{,}2287}{100} \times \frac{1}{5{,}1094} \\ &= 0{,}012 \text{ AUD} \\ &= 1 \text{ Yen} \\ \text{of } 1 \text{ AUD} &= 82{,}02 \text{ Yen} \end{aligned}$$

40. Khetang was onlangs vir 'n paar maande in Europa vir werk. Hy keer terug na Suid-Afrika met € 2850 om te belê in 'n spaarrekening.

    Sy bank bied hom 'n spaarrekening aan wat 5,3% saamgestelde rente per annum betaal. Die bank skakel Khetang se euro om na rand teen 'n wisselkoers van € 1 = R 12,89.

    As Khetang sy geld belê vir 6 jaar, hoeveel rente verdien hy op sy belegging?

    Oplossing:

    Ons skakel eers om van euro na rand: $2850 \times \frac{12{,}89}{1} = \text{R } 36\,736{,}50$.

    Nou bereken ons hoeveel Khetang verdien.

    $$\begin{aligned} P &= 36\,736{,}50 \\ i &= 0{,}053 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

    $$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ A &= 36\,736{,}50(1+0{,}053)^6 \\ A &= \text{R } 50\,080{,}42 \end{aligned}$$

    Rente verdien:

    $$\text{R } 50\,080{,}42 - \text{R } 36\,736{,}50 = \text{R } 13\,343{,}92$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K69	2. 2K6B	3. 2K6C	4. 2K6D	5. 2K6F	6. 2K6G
7. 2K6H	8. 2K6J	9. 2K6K	10. 2K6M	11. 2K6N	12. 2K6P
13a. 2K6Q	13b. 2K6R	13c. 2K6S	14. 2K6T	15. 2K6V	16. 2K6W
17. 2K6X	18. 2K6Y	19. 2K6Z	20. 2K72	21. 2K73	22. 2K74
23. 2K75	24. 2K76	25. 2K77	26. 2K78	27. 2K79	28. 2K7B
29. 2K7C	30. 2K7D	31. 2K7F	32. 2K7G	33. 2K7H	34. 2K7J
35. 2K7K	36. 2K7M	37. 2K7N	38. 2K7P	39. 2K7Q	40. 2K7R

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 10

Statistiek

- Hierdie hoofstuk dek hersiening van die maatstawwe van sentrale neiging in ongegroepeerde data en vervolgens word hierdie maatstawwe uitgebrei tot gegroepeerde data. Omvang of variasiewydte word hersien en uitgebrei om persentiele, kwartiele, interkwartiele en semi-interkwartielwydte in te sluit. Die vyfgetal opsomming en mond-en-snorgdiagram word hier bekendgestel. Uiteindelik word statistiese opsommings toegepas op data om betekenisvolle kommentaar te lewer op die konteks waarmee die data geassosieer is.
- Intervalle vir gegroepeerde data behoort uitgedruk te word deur middel van ongelykhede ($0 \leq x < 20$) eerder as 0 - 19.
- Bespreek die misbruik van statistiek in die regte wêreld en moedig bewuswording aan.

Van die statssa webblad kan jy datastelle en statistiek vind wat relevant is vir Suid-Afrika.

10.1 Versameling van data

Exercise 10 – 1:

1. Die volgende datastel van leerders se drome of planne, is ingesamel van Graad 12 leerders net na hulle finale eksamens.
   {"Ek wil 'n brug te bou!"; "Ek wil die siekes te help."; "Ek wil lopende water hê!"}
   Kategoriseer die datastel.
   Oplossing:
   Die datastel kan nie geskryf word as getalle nie en dit moet dus kwalitatief wees.
   Hierdie datastel is anekdoties aangesien dit die vorm aanneem van 'n storie.
   Dus is die datastel kwalitatief anekdoties.
2. Die volgende datastel van lekkers in 'n pakkie is ingesamel van besoekers aan 'n lekkergoedwinkel.
   $\{23; 25; 22; 26; 27; 25; 21; 28\}$
   Kategoriseer die datastel.
   Oplossing:
   Die datastel is 'n stel getalle en dus moet dit kwantitatief wees.
   Hierdie datastel is diskreet aangesien dit verteenwoordig kan word deur heelgetalle en dit is 'n telling van die getal lekkers.
   Dus is die datastel kwantitatief diskreet.
3. Die volgende datastel van vrae wat korrek beantwoord is, is ingesamel van 'n klas van wiskunde leerders.
   $\{3; 5; 2; 6; 7; 5; 1; 2\}$
   Kategoriseer die datastel.
   Oplossing:
   Die datastel is 'n stel getalle en dus moet dit kwantitatief wees.
   Hierdie datastel is diskreet aangesien dit verteenwoordig kan word deur heelgetalle en dit is die telling van die aantal vrae wat korrek beantwoord is.
   Dus is die datastel kwantitatief diskreet.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2K7S 2. 2K7T 3. 2K7V

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.2 Maatstawwe van sentrale neiging

Gemiddelde

Mediaan

Exercise 10 – 2:

1. Bereken die **gemiddelde** van die volgende datastel:
   $\{9; 14; 9; 14; 8; 8; 9; 8; 9; 9\}$. Rond jou antwoord af tot 1 desimale plek.
   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{gemiddelde} &= \frac{9+14+9+14+8+8+9+8+9+9}{10} \\ &= 9{,}7 \end{aligned}$$

   Die gemiddelde is: 9,7.
2. Bereken die **mediaan** van die volgende datastel:
   $\{4; 13; 10; 13; 13; 4; 2; 13; 13; 13\}$.
   Oplossing:
   Ons moet eers die datastel orden:
   $\{2; 4; 4; 10; 13; 13; 13; 13; 13; 13\}$.
   Aangesien daar 'n ewe aantal datawaardes (10) in hierdie datastel is, lê die mediaan tussen die vyfde en die sesde plek:

$$\begin{aligned} \text{mediaan} &= \frac{13+13}{2} \\ &= 13 \end{aligned}$$

   Die mediaan is: 13.
3. Bereken die **modus** van die volgende datastel:
   $\{6; 10; 6; 6; 13; 12; 12; 7; 13; 6\}$
   Oplossing:
   Ons sorteer of orden eers die datastel: $\{6; 6; 6; 6; 7; 10; 12; 12; 13; 13\}$. Die modus is die waarde wat die meeste voorkom in die datastel.
   Die modus is: 6
4. Bereken die gemiddelde, die mediaan en die modus van die volgende datastelle:
   a) $\{2; 5; 8; 8; 11; 13; 22; 23; 27\}$
      Oplossing:
      Die datastel is alreeds georden.

$$\begin{aligned} \text{gemiddelde} &= \frac{2+5+8+8+11+13+22+23+27}{9} \\ &= 13{,}2 \end{aligned}$$

      Aangedien daar 'n onewe aantal waardes in hierdie datastel is, lê die mediaan by die vyfde getal: 11
      Die modus is die waarde wat die meeste voorkom. In hierdie datastel is die modus 8.
      Die gemiddelde, mediaan en modus is: gemiddelde: 13,2; mediaan: 11; modus: 8.
   b) $\{15; 17; 24; 24; 26; 28; 31; 43\}$
      Oplossing:
      Die datastel is alreeds georden.

$$\begin{aligned} \text{gemiddelde} &= \frac{15+17+24+24+26+28+31+43}{8} \\ &= 26 \end{aligned}$$

      Aangesien daar 'n ewe aantal waardes in hierdie datastel is, lê die mediaan tussen die vierde en vyfde getalle:

$$\begin{aligned} \text{mediaan} &= \frac{24+26}{2} \\ &= 25 \end{aligned}$$

Die modus is die waarde wat die meeste voorkom. In hierdie datastel is die modus 24.
Die gemiddelde, mediaan en modus is: gemiddelde: 26; mediaan: 25; modus: 24.

c) $\{4; 11; 3; 15; 11; 13; 25; 17; 2; 11\}$

Oplossing:

Ons moet eers die datastel orden: $\{2; 3; 4; 11; 11; 11; 13; 15; 17; 25\}$.

$$\begin{aligned} \text{gemiddelde} &= \frac{2+3+4+11+11+11+13+15+17+25}{10} \\ &= 11{,}2 \end{aligned}$$

Aangesien daar 'n ewe aantal waardes in hierdie datastel is, lê die mediaan tussen die vyfde en sesde getalle:

$$\begin{aligned} \text{mediaan} &= \frac{11+11}{2} \\ &= 11 \end{aligned}$$

Die modus is die waarde wat die meeste voorkom. In hierdie datastel is die modus 11.
Die gemiddelde, die mediaan en die modus is: gemiddelde: 11,2; mediaan: 11; modus: 11.

d) $\{24; 35; 28; 41; 31; 49; 31\}$

Oplossing:

Ons moet eers die datastel orden: $\{24; 28; 31; 31; 35; 41; 49\}$

$$\begin{aligned} \text{gemiddelde} &= \frac{24+28+31+31+35+41+49}{7} \\ &= 34{,}3 \end{aligned}$$

Aangesien daar 'n onewe aantal waardes in hierdie datastel is, lê die mediaan by die vierde getal: 31
Die modus is die waarde wat die meeste voorkom. In hierdie datastel is die modus 31.
Die gemiddelde, mediaan en modus is: gemiddelde: 34,3; mediaan: 31; modus: 31.

5. Die ouderdomme van 15 atlete in die Comrades Marathon is opgeteken:

$$\{31; 42; 28; 38; 45; 51; 33; 29; 42; 26; 34; 56; 33; 46; 41\}$$

Bereken die gemiddelde, die mediaan en die modale ouderdom.

Oplossing:

Ons moet eers die datastel orden: $\{26; 28; 29; 31; 33; 33; 34; 38; 41; 42; 42; 45; 46; 51; 56\}$

$$\begin{aligned} \text{gemiddelde} &= \frac{26+28+29+31+33+33+34+38+41+42+42+45+46+51+56}{15} \\ &= 38{,}3 \end{aligned}$$

Aangesien daar 'n onewe aantal waardes in hierdie datastel is, lê die mediaan by die agtste getal: 38.
Die modus is die waarde wat die meeste voorkom. In hierdie datastel is daar twee modusse: 33 en 42.
Die gemiddelde, mediaan en modale ouderdom is: gemiddelde: 38,3; mediaan 38; modus 33 en 42.

6. 'n Groep van 10 vriende het 'n aantal klippies tussen hulle. Hulle werk uit dat die **gemiddelde** aantal klippies wat hulle het, 6 is. Vervolgens verlaat 7 van die vriende die groep met 'n onbekende aantal (x) van die klippies. Die oorblywende 3 vriende werk uit die **gemiddelde** aantal klippies wat hulle oor het, 12,33 is.
Hoeveel klippies het die 7 vriende met hulle saamgeneem toe hulle padgegee het?

Oplossing:

As die **gemiddelde** aantal klippies wat die groep oorspronklik gehad het, **6** was, dan was die totale aantal klippies oorspronklik:

$$\begin{aligned} \text{gemiddelde} &= \frac{\text{aantal klippies (voorheen)}}{\text{aantal in groep}} \\ \text{aantal klippies (voorheen)} &= \text{gemiddelde} \times \text{aantal in groep} \\ &= (6) \times (10) \\ &= 60 \end{aligned}$$

Dit word gesê dat **7** vriende die groep verlaat het en daarna is die **gemiddelde** aantal klippies wat oor is **12,33**. Nou kan ons die oorblywende aantal klippies uitwerk.

$$\begin{aligned}
\text{gemiddelde} &= \frac{\text{aantal klippies (agterna)}}{\text{aantal in groep}}\\
\text{aantal klippies (agterna)} &= \text{gemiddelde} \times \text{aantal in groep}\\
&= (12{,}33) \times (3)\\
&= 37
\end{aligned}$$

Nou kan ons bereken hoeveel klippies die 7 vriende, wat die groep verlaat het, saamgeneem het.

$$\begin{aligned}
\text{aantal klippies weggeneem } (x) &= \text{klippies agterna} - \text{klippies voorheen}\\
&= (60) - (37)\\
&= 23
\end{aligned}$$

7. ’n Groep van 9 vriende het elk ’n aantal muntstukke. Hulle werk uit dat die **gemiddelde** aantal muntstukke wat hulle het, 4 is. Dan verlaat 5 vriende die groep en neem ’n onbekende aantal (x) munte met hulle saam. Die oorblywende 4 vriende bereken dat die **gemiddelde** aantal muntstukke wat hulle nou oor het, 2,5 is.
   Hoeveel muntstukke het die 5 vriende met hulle saamgeneem toe hulle weg is?
   Oplossing:
   As die **gemiddelde** aantal muntstukke wat die groep oorspronklik gehad het **4** was, dan was die totale aantal muntstukke oorspronklik:

$$\begin{aligned}
\text{gemiddelde} &= \frac{\text{aantal munte (voorheen)}}{\text{aantal in groep}}\\
\text{aantal munte (voorheen)} &= \text{gemiddelde} \times \text{aantal in groep}\\
&= (4) \times (9)\\
&= 36
\end{aligned}$$

Ons weet dat **5** vriende die groep verlaat en daarna is die **gemiddelde** aantal muntstukke wat oor is, **2,5**. Laat ons nou die oorblywende aantal muntstukke uitwerk.

$$\begin{aligned}
\text{gemiddelde} &= \frac{\text{aantal munte (agterna)}}{\text{aantal in groep}}\\
\text{aantal munte (agterna)} &= \text{gemiddelde} \times \text{aantal in groep}\\
&= (2{,}5) \times (4)\\
&= 10
\end{aligned}$$

Ons bereken nou hoeveel muntstukke saamgeneem is deur die 5 vriende wat die groep verlaat het.

$$\begin{aligned}
\text{aantal munte weggeneem}(x) &= \text{munte voorheen} - \text{munte agterna}\\
&= (36) - (10)\\
&= 26
\end{aligned}$$

8. ’n Groep van 9 vriende het elkeen ’n aantal albasters. Hulle bereken dat die **gemiddelde** aantal albasters wat hulle het 3 is. Dan verlaat 3 vriende die groep met ’n onbekende aantal (x) albasters. Die oorblywende 6 vriende werk uit dat die **gemiddelde** aantal albasters wat hulle nou oor het, 1,17 is.
   Hoeveel albasters het die 3 vriende met hulle saamgeneem toe hulle die groep verlaat het?
   Oplossing:
   As die **gemiddelde** aantal albasters wat die groep oorspronklik gehad het, **3** was, dan was die totale aantal albasters oorspronklik:

$$\begin{aligned}
\text{gemiddelde} &= \frac{\text{aantal albasters (voorheen)}}{\text{aantal in groep}}\\
\text{aantal albasters (voorheen)} &= \text{gemiddelde} \times \text{aantal in groep}\\
&= (3) \times (9)\\
&= 27
\end{aligned}$$

Ons weet dat **3** vriende weggaan het en daarna is die **gemiddelde** aantal albasters wat oor is **1,17**. Kom ons werk die oorblywende aantal albasters uit.

$$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{\text{aantal albasters (agterna)}}{\text{aantal in groep}}\\ \text{aantal albasters (agterna)} &= \text{gemiddelde} \times \text{aantal in groep}\\ &= (1{,}17) \times (6)\\ &= 7\end{aligned}$$

Nou kan ons bereken hoeveel albasters saamgeneem is deur die 3 vriende wat die groep verlaat het.

$$\begin{aligned}\text{aantal albasters weggeneem } (x) &= \text{albasters voorheen} - \text{albasters agterna}\\ &= (27) - (7)\\ &= 20\end{aligned}$$

9. In die eerste van 'n reeks flessies is daar 1 lekkertjie. In die tweede flessie is daar 3 lekkers. Die gemiddelde aantal lekkers in die eerste twee flessies is 2.

   a) As die gemiddelde aantal lekkers in die eerste drie flessies 3 is, hoeveel lekkers is daar in die derde flessie?
   Oplossing:
   Laat n_3 die aantal lekkers in die derde flessie wees:

$$\begin{aligned}\frac{1+3+n_3}{3} &= 3\\ 1+3+n_3 &= 9\\ n_3 &= 5\end{aligned}$$

   b) As die gemiddelde aantal lekkers in die eerste vier flessies 4 is, hoeveel lekkers is daar dan in die vierde flessie?
   Oplossing:
   Gestel die aantal lekkers in die vierde flessie is n_4:

$$\begin{aligned}\frac{1+3+5+n_4}{4} &= 4\\ 9+n_4 &= 16\\ n_4 &= 7\end{aligned}$$

10. Vind 'n stel van vyf ouderdomme, waarvan die gemiddelde ouderdom 5 is, die modale ouderdom 2 is en die mediaan ouderdom 3 jaar is.
Oplossing:
Gestel die vyf verskillende ouderdomme is $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ en x_5. Dus die gemiddelde is:

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} &= 5\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 25\end{aligned}$$

Die mediaanwaarde is by posisie 3, dus $x_3 = 3$.
Die modus is die ouderdom wat die meeste voorkom. Ons het 5 ouderdomme om mee te werk en ons weet dat een van die ouderdomme 3 is (van die mediaan). Dus die geordende datastel is: $\{x_1; x_2; 3; x_4; x_5\}$ (onthou dat ons altyd die gemiddelde, modus en mediaan bereken deur die geordende datastel te gebruik). Ons weet die modus is 2. As ons na die geordende datastel kyk, sien ons x_1 of x_2 moet 2 wees (x_4 en x_5 kan nie 2 wees nie aangesien dit die datastel ongeorden sal maak). Aan die ander kant, as een van hierdie waardes 2 is, dan kan die modus nie 2 wees nie. Dus $x_1 = x_2 = 2$.
Ons kan dus nou ons berekening van die gemiddelde opdateer:

$$\begin{aligned}2+2+3+x_4+x_5 &= 25\\ 18 &= x_4+x_5\end{aligned}$$

x_4 en x_5 kan enige getalle wees waarvan die som 18 is en wat nie dieselfde getal is nie (as hulle dieselfde was, sou die modus nie 2 gewees het nie), dus 12 en 6 of 8 en 10 of 3 en 15, ens.

Moontlike datastelle:

$$\text{Data set 1: } \{2;2;3;4;14\}$$
$$\text{Data set 2: } \{2;2;3;5;13\}$$
$$\text{Data set 3: } \{2;2;3;6;12\}$$
$$\text{Data set 4: } \{2;2;3;7;11\}$$
$$\text{Data set 5: } \{2;2;3;8;10\}$$

Let daarop dat die stel ouderdomme georden moet wees, dus moet die mediaanwaarde 3 wees en daar moet 2 ouderdomme van 2 wees.

11. Vier vriende het elkeen 'n aantal albasters. Hulle bereken dat hulle gemiddeld elkeen 10 albasters het. Een vriend vertrek met 4 albasters. Hoeveel albasters het die oorblywende vriende altesaam?

Oplossing:

Gestel die aantal albasters per vriend is $x_1,\ x_2,\ x_3$ en x_4.

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = 10$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 40$$

Een vriend vertrek:

$$x_1+x_2+x_3 = 40-4$$
$$x_1+x_2+x_3 = 36$$

Dus het die oorblywende vriende 36 albasters.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

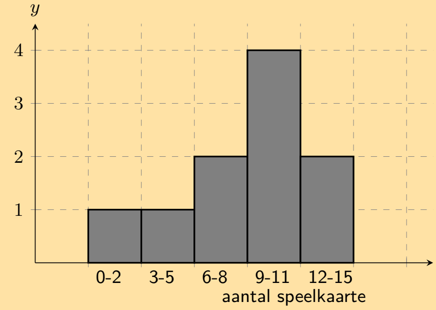
1. 2K7X	2. 2K7Y	3. 2K7Z	4a. 2K82	4b. 2K83	4c. 2K84
4d. 2K85	5. 2K86	6. 2K87	7. 2K88	8. 2K89	9. 2K8B
10. 2K8C	11. 2K8D				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.3 Groepering van data

Exercise 10 – 3:

1. 'n Groep van 10 leerders tel die aantal speelkaarte wat hulle elkeen het. Hier is 'n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het:

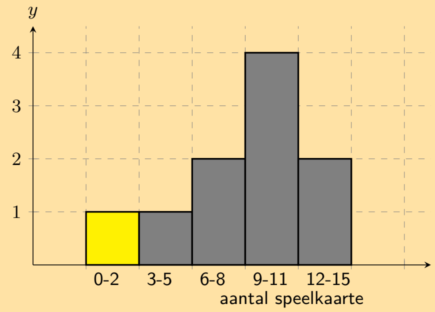


Tel die aantal speelkaarte in die volgende interval: $0 \leq$ aantal speelkaarte ≤ 2

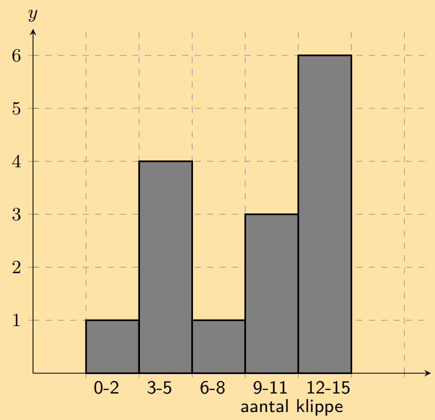
Oplossing:

Vanaf die grafiek is die antwoord: 1

Ons kry ons antwoord van die histogram af deur die hoogte van die spesifieke interval af te lees.



2. 'n Groep van 15 leerders tel die aantal klippe wat hulle elkeen het. Hier is 'n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het:

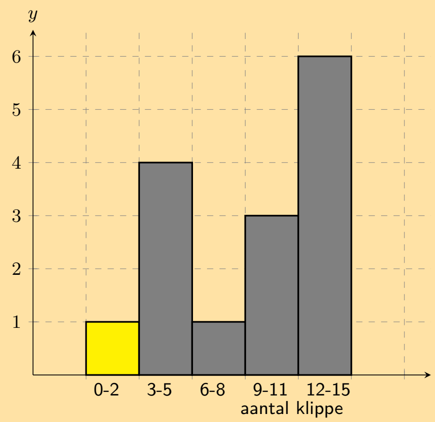


Tel die aantal klippe in die volgende interval: $0 \leq$ aantal klippe ≤ 2

Oplossing:

Vanaf die grafiek is die antwoord: 1

Ons kry ons antwoord van die histogram af deur die hoogte van die spesifieke interval af te lees.



3. 'n Groep van **20** leerders tel die aantal speelkaarte wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle ingesamel het:

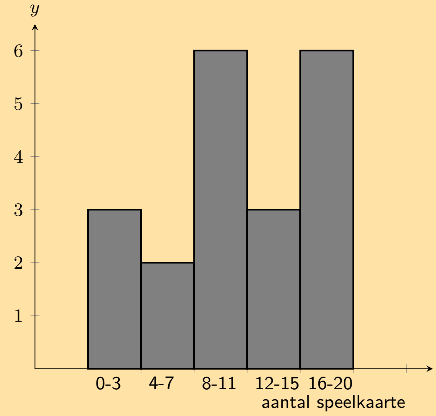
14	9	11	8	13	2	3	4	16	17
9	19	10	14	4	16	16	11	2	17

Tel die aantal leerders wat van 12 tot 15 kaarte het. Met ander woorde, hoeveel leerders het speelkaarte in die volgende interval: $12 \leq$ aantal speelkaarte ≤ 15? Dit mag handig wees om 'n histogram te trek om die vraag te beantwoord.

Oplossing:
Heel eerste orden ons die tabel in volgorde, beginnende by die kleinste waarde.

2	2	3	4	4	8	9	9	10	11
11	13	14	14	16	16	16	17	17	19

Tweedens trek ons 'n histogram van die data:



Vanaf die histogram kan jy sien dat daar 3 leerders is met speelkaarte in die omvang $12 \leq$ aantal speelkaarte ≤ 15.

4. 'n Groep van **20** leerders tel die klippe wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle bymekaar gemaak het:

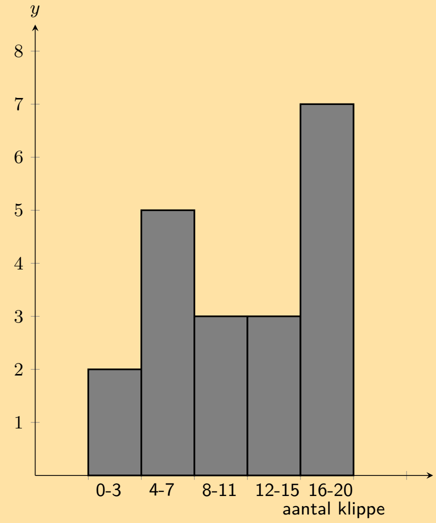
16	6	11	19	20	17	13	1	5	12
5	2	16	11	16	6	10	13	6	17

Tel die aantal leerders wat van 4 tot 7 klippe het. Met ander woorde, hoeveel leerders het 'n aantal klippe in die volgende interval: $4 \leq$ aantal klippe ≤ 7? Dit mag help as jy 'n histogram trek ten einde die vraag te beantwoord.

Oplossing:
Heel eerste orden ons die tabel in volgorde, beginnende by die kleinste waarde.

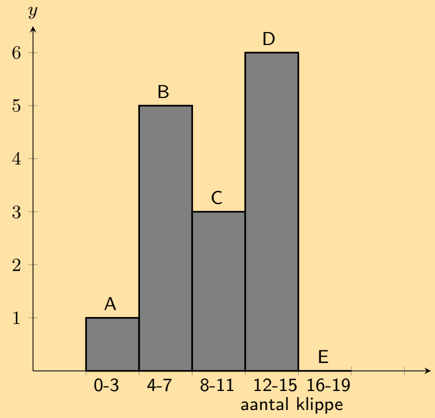
1	2	5	5	6	6	6	10	11	11
12	13	13	16	16	16	17	17	19	20

Tweedens trek ons 'n histogram van die data:



Van die histogram kan jy sien dat daar 5 leerders met klippe in die interval: $4 \leq$ aantal klippe ≤ 7 is.

5. 'n Groep van 20 leerders tel die aantal klippe wat elkeen het. Die leerders trek 'n histogram wat die data beskryf wat hulle bymekaar gemaak het. Maar, hulle het 'n fout gemaak met die trek van die histogram.



Die data hieronder toon die korrekte inligting vir die aantal klippe wat die leerders het. Elke waarde verteenwoordig die aantal klippe vir een leerder.

$$\{4; 12; 15; 14; 18; 12; 17; 15; 1; 6; 6; 12; 6; 8; 6; 8; 17; 19; 16; 8\}$$

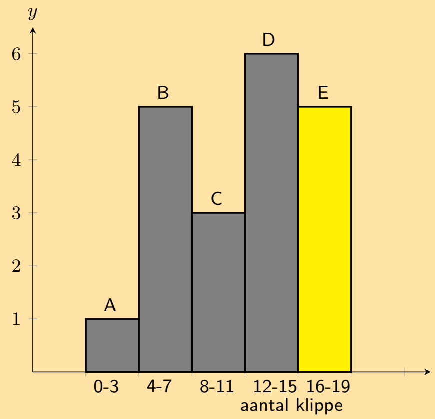
Help hulle om uit te pluis watter **kolom** in die histogram **verkeerd** is.

Oplossing:

Ons moet eers die data orden:

$$\{1; 4; 6; 6; 6; 6; 8; 8; 8; 12; 12; 12; 14; 15; 15; 16; 17; 17; 18; 19\}$$

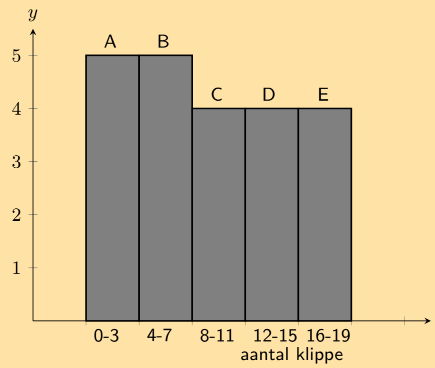
Met gebruik van die geordende datastel, kan ons die data groepeer en die korrekte histogram trek:



Die kolom met die fout in was: E

Die leerders het die verkeerde waarde van **0** gebruik, terwyl die korrekte waarde 5 is.

6. ’n Groep van 20 leerders tel die aantal klippe wat elkeen het. Die leerders trek ’n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het. Maar, hulle het ’n fout gemaak met die trek van die histogram.



Die data hieronder toon die korrekte inligting vir die aantal klippe wat die leerders het. Elke waarde verteenwoordig die aantal klippe vir een leerder.

$$\{19; 11; 5; 2; 3; 4; 14; 2; 12; 19; 11; 14; 2; 19; 11; 5; 17; 10; 1; 12\}$$

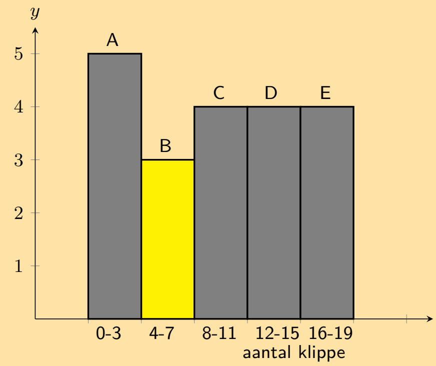
Help hulle om uit te pluis watter **kolom** in die histogram **verkeerd** is.

Oplossing:

Ons moet eers die data orden:

$$\{1; 2; 2; 2; 3; 4; 5; 5; 10; 11; 11; 11; 12; 12; 14; 14; 17; 19; 19; 19\}$$

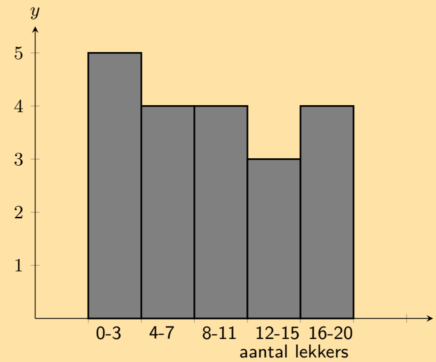
Met gebruik van die geordende datastel, kan ons die data groepeer en die korrekte histogram trek:



Die kolom met die fout in was: B

Die leerders het die verkeerde waarde van **5** gebruik, terwyl die korrekte waarde 3 is.

7. 'n Groep leerders tel die aantal lekkers wat hulle elkeen het. Hier is 'n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het:



'n Kat spring per ongeluk op die tafel en al hulle notas land deurmekaar op die vloer.

Help hulle om uit te vind watter van die volgende datastelle by die histogram pas:

Datastel A

2	1	20	10	5
3	10	2	6	1
2	2	17	3	18
3	7	10	8	18

Datastel B

2	9	12	10	5
9	9	10	13	6
5	11	10	7	7

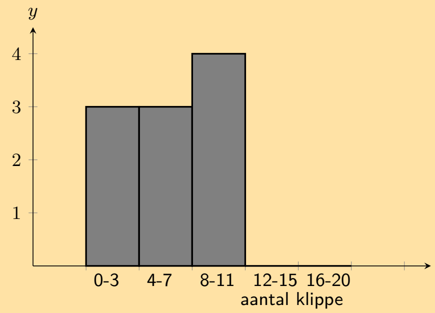
Datastel C

3	12	16	10	15
17	18	2	3	7
11	12	8	2	7
17	3	11	4	4

Oplossing:

Die korrekte antwoord is: Datastel C

8. 'n Groep leerders tel die aantal klippe wat hulle elkeen het. Hier is 'n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het.



'n Skoonmaker stamp per ongeluk hulle tafel om en al hulle notas land in 'n deurmekaarspul op die vloer! Help hulle om uit te vind watter van die volgende datastelle by die histogram pas:

Datastel A

12	4	2	15	10
18	10	16	16	19
1	2	9	10	16
10	11	9	2	13

Datastel B

7	10	4	5	8
7	12	10	14	5
1	9	2	13	3

Datastel C

9	3	8	5	8
5	8	1	4	3

Oplossing:

Die korrekte antwoord is: Datastel C

9. 'n Klaseksperiment is uitgevoer en 50 leerders is gevra om die aantal lekkers in 'n bottel te raai. Die volgende raaiskote is aangeteken:

56	49	40	11	33	33	37	29	30	59
21	16	38	44	38	52	22	24	30	34
42	15	48	33	51	44	33	17	19	44
47	23	27	47	13	25	53	57	28	23
36	35	40	23	45	39	32	58	22	40

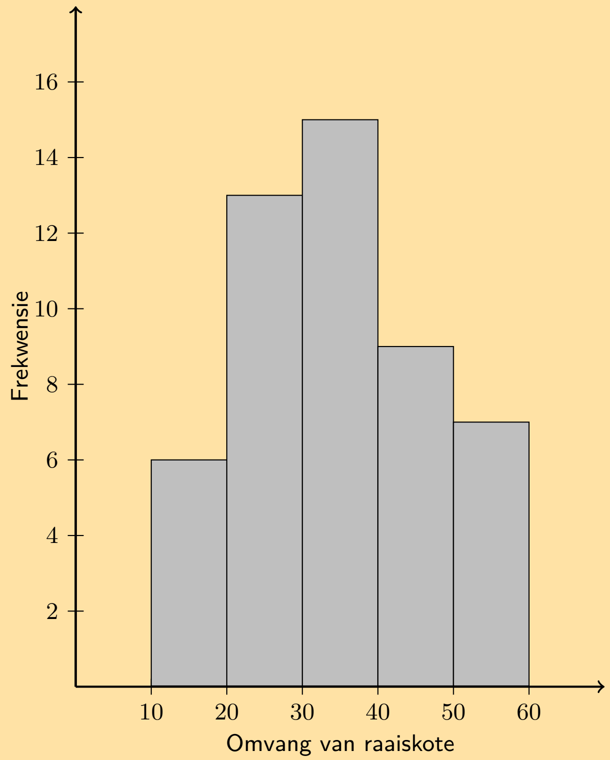
a) Teken 'n gegroepeerde frekwensietabel op deur gebruik te maak van die intervalle $10 < x \leq 20$, $20 < x \leq 30$, $30 < x \leq 40$, $40 < x \leq 50$ en $50 < x \leq 60$.

Oplossing:

Groep	Frekwensie
$10 < x \leq 20$	6
$20 < x \leq 30$	13
$30 < x \leq 40$	15
$40 < x \leq 50$	9
$50 < x \leq 60$	7

b) Trek 'n histogram wat ooreenstem met die frekwensietabel van die gegroepeerde data.

Oplossing:



Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K8G 2. 2K8H 3. 2K8J 4. 2K8K 5. 2K8M 6. 2K8N
7. 2K8P 8. 2K8Q 9. 2K8R

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Maatstawwe van sentrale neiging

Exercise 10 – 4:

1. Oorweeg die volgende stel gegroepeerde data en bereken die gemiddelde, die modale groep en die mediaangroep.

Massa (kg)	Telling
$40 < m \leq 45$	7
$45 < m \leq 50$	10
$50 < m \leq 55$	15
$55 < m \leq 60$	12
$60 < m \leq 65$	6

Oplossing:
Om die gemiddelde te kry, gebruik ons die middelwaarde vir elke groep. Die telling dui dan vir ons aan hoeveel keer daardie waarde voorkom in die datastel. Dus is die gemiddelde:

$$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{7(43)+10(48)+15(53)+12(58)+6(63)}{7+10+15+12+6}\\ &= \frac{2650}{50}\\ &= 53\end{aligned}$$

Die modale groep is die groep met die hoogste aantal datawaardes. Dit is $50 < m \leq 55$ met 15 datawaardes.
Die mediaangroep is die sentrale groep. Daar is 5 groepe en dus is die sentrale groep die derde een: $50 < m \leq 55$.
Gemiddelde: 53; Modale groep: $50 < m \leq 55$; Mediaan groep: $50 < m \leq 55$.

2. Vind die gemiddelde, die modale groep en die mediaangroep van hierdie datastel wat aandui hoeveel tyd mense nodig het om 'n spel klaar te maak.

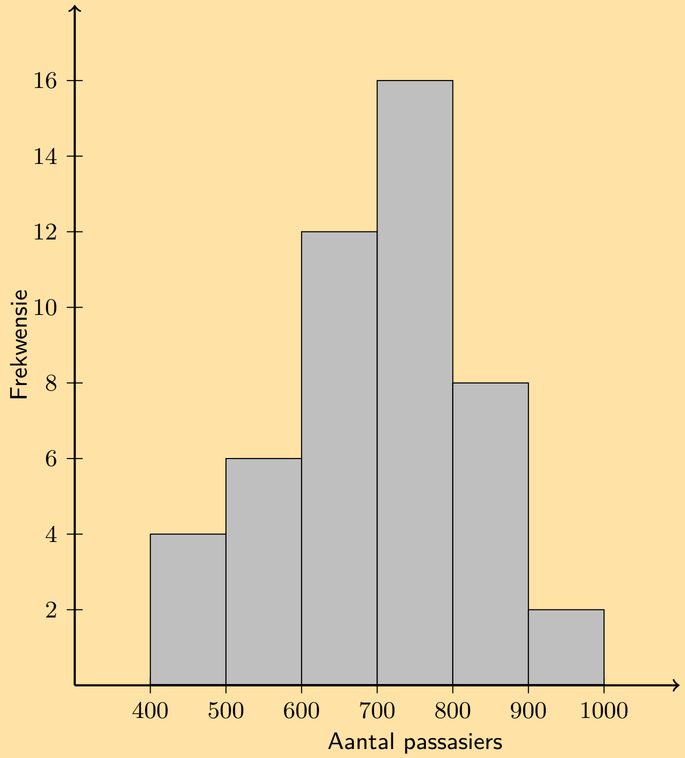
Tyd (s)	**Telling**
$35 < t \leq 45$	5
$45 < t \leq 55$	11
$55 < t \leq 65$	15
$65 < t \leq 75$	26
$75 < t \leq 85$	19
$85 < t \leq 95$	13
$95 < t \leq 105$	6

Oplossing:
Om die gemiddelde te kry, gebruik ons die middelwaarde vir elke groep. Die telling dui dan vir ons aan hoeveel keer daardie waarde voorkom in die datastel. Dus is die gemiddelde:

$$\begin{aligned}
\text{gemiddelde} &= \frac{5(40{,}5) + 11(50{,}5) + 15(60{,}5) + 26(70{,}5) + 19(80{,}5) + 13(90{,}5) + 6(100{,}5)}{5 + 11 + 15 + 26 + 19 + 13 + 6} \\
&= \frac{6807{,}5}{95} \\
&= 71{,}66
\end{aligned}$$

Die modale groep is die groep met die hoogste aantal datawaardes. Dit is $65 < m \leq 75$ met 26 datawaardes.
Die mediaangroep is die sentrale groep. Daar is 7 groepe en die sentrale groep is die vierde een: $65 < m \leq 75$.
Gemiddelde: 70,66; Modale groep: $65 < t \leq 75$; Mediaan groep: $65 < t \leq 75$.

3. Die histogram hieronder toon die aantal passasiers wat elke week in Alfred se minibus taxi reis.



Bereken:

a) die modale interval
Oplossing:
Die modale interval is die interval met die hoogste aantal datawaardes. Vir hierdie datastel is dit: $700 < x \leq 800$ met 16 waardes.

b) die totale aantal passasiers wat in Alfred se taxi ry

Oplossing:

Ons tel die tellings in elke groep bymekaar en vermenigvuldig dan hierdie tellings met die sentrale waarde vir elke groep: $4(450) + 6(550) + 12(650) + 16(750) + 8(850) + 2(950) = 33\ 600$.

c) 'n skatting van die gemiddelde

Oplossing:

Daar is 48 waardes in die datastel. Dus is die gemiddelde $\frac{33\ 600}{48} = 700$.

d) 'n skatting van die mediaan

Oplossing:

Ons kyk eerder na 'n skatting van die mediaan as na die mediaangroep. In hierdie geval let ons op dat daar 48 waardes in die datastel is. Dus sal die mediaan tussen die 24^{ste} en die 25^{ste} waardes lê.

Ons let op dat daar 22 waardes in die eerste 3 groepe en 38 waardes in die eerste 4 groepe is, dus moet die mediaan in die vierde groep lê. Gevolglik kan ons die mediaan skat as die middelwaarde van die vierde groep: 750.

e) as dit beraam word dat elke passasier 'n gemiddelde afstand van 5 km reis, hoeveel geld sou Alfred gemaak het as hy R 3,50 per km gevra het?

Oplossing:

$3{,}50 \times 5 \times 33\ 600 = \text{R}\ 588\ 000$.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2K8S 2. 2K8T 3. 2K8V

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

10.4 Maatstawwe van verspreiding

Omvang

Persentiele

Persentiele vir gegroepeerde data

Omvang

Exercise 10 – 5:

1. 'n Groep van **15** leerders tel die aantal lekkers wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle ingesamel het:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 11 & 14 & 7 & 14 \\ 5 & 8 & 7 & 12 & 12 \\ 5 & 13 & 10 & 6 & 7 \end{array}$$

Bereken die **omvang** van die waardes in die datastel.

Oplossing:

Ons moet eers die datastel orden:

$$\{4; 5; 5; 6; 7; 7; 7; 8; 10; 11; 12; 12; 13; 14; 14\}$$

Vevolgens vind ons die maksimumwaarde in die datastel:

$$\text{maksimum waarde } = 14$$

Dan vind ons die minimumwaarde in die datastel:

$$\text{minimum waarde } = 4$$

Uiteindelik bereken ons die omvang van die datastel:

$$\begin{aligned}\text{omvang } &= (\text{maksimum waarde}) \ - \ (\text{minimum waarde})\\ &= (14) - (4)\\ &= 10\end{aligned}$$

2. 'n Groep van **10** leerders tel die aantal speelkaarte wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle insamel:

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 10 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}$$

   Bereken die **omvang** van die waardes in die datastel.
   Oplossing:
   Ons moet eers die datastel orden:

$$\{1; 1; 1; 3; 3; 3; 4; 4; 5; 10\}$$

   Vevolgens vind ons die maksimumwaarde in die datastel:

$$\text{maksimum waarde } = 10$$

   Dan vind ons die minimumwaarde in die datastel:

$$\text{minimum waarde } = 1$$

   Uiteindelik bereken ons die omvang van die datastel:

$$\begin{aligned}\text{omvang} &= (\text{maksimum waarde}) \ - \ (\text{minimum waarde})\\ &= 10 - 1\\ &= 9\end{aligned}$$

3. Vind die omvang van die datastel:

$$\{1; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 6; 7; 8; 8; 9; 10; 10\}$$

   Oplossing:
   Die datastel is alreeds georden.
   Eerstens vind ons die maksimumwaarde in die datastel:

$$\text{maksimum waarde } = 10$$

   Tweedens vind ons die minimumwaarde in die datastel:

$$\text{minimum waarde } = 1$$

   Uiteindelik bereken ons die omvang van die datastel:

$$\begin{aligned}\text{omvang} &= (\text{maksimum waarde}) \ - \ (\text{minimum waarde})\\ &= 10 - 1\\ &= 9\end{aligned}$$

4. Wat is die kwartiele van hierdie datastel?

$$\{3; 5; 1; 8; 9; 12; 25; 28; 24; 30; 41; 50\}$$

Oplossing:
Eerste orden ons die datastel.

$$\{1; 3; 5; 8; 9; 12; 24; 25; 28; 30; 41; 50\}$$

Volgende vind ons die rangordes van die kwartiele. Deur die persentielformule te gebruik met $n = 12$, kan ons die rangordes vind van die 25ste, 50ste en die 75ste persentiele:

$$\begin{aligned} r_{25} &= \frac{25}{100}(12-1)+1 \\ &= 3{,}75 \\ r_{50} &= \frac{50}{100}(12-1)+1 \\ &= 6{,}5 \\ r_{75} &= \frac{75}{100}(12-1)+1 \\ &= 9{,}25 \end{aligned}$$

Vind die waardes van die kwartiele. Let op dat elkeen van die rangordes 'n breuk is, wat beteken dat die waarde van elke persentiel iewers tussen twee waardes in die datastel lê.
Die rangorde vir die 25ste persentiel is 3,75, wat tussen die derde en vierde waardes lê. Dus die 25ste persentiel is $\frac{5+8}{2} = 6{,}5$.
Die rangorde vir die 50ste persentiel (die mediaan) is 6,5, dit wil sê halfpad tussen die sesde en sewende waardes. Dus die mediaan is $\frac{12+24}{2} = 18$. Die rangorde vir die 75ste persentiel is 9,25, dit wil sê tussen die negende en die tiende waardes. Dus die 75ste persentiel is $\frac{28+30}{2} = 29$.
Gevolglik kry ons die volgende waardes vir die kwartiele: $Q_1 = 6{,}5$; $Q_2 = 18$; $Q_3 = 29$.

5. 'n Klas van 12 leerders skryf 'n toets en die resultaat is as volg:

$$\{20; 39; 40; 43; 43; 46; 53; 58; 63; 70; 75; 91\}$$

Vind die omvang, kwartiele en die interkwartielomvang.
Oplossing:
Die datastel is georden.
Die omvang is:

$$\begin{aligned} \text{omvang} &= (\text{maksimum waarde}) - (\text{minimum waarde}) \\ &= (91) - (20) \\ &= 71 \end{aligned}$$

Om die kwartiele te vind, begin ons om die rangordes van die kwartiele te kry. Deur die gebruik van die persentielformule, met $n = 12$, kan ons die rangordes kry van die 25ste, 50ste en die 75ste persentiele:

$$\begin{aligned} r_{25} &= \frac{25}{100}(12-1)+1 \\ &= 3{,}75 \\ r_{50} &= \frac{50}{100}(12-1)+1 \\ &= 6{,}5 \\ r_{75} &= \frac{75}{100}(12-1)+1 \\ &= 9{,}25 \end{aligned}$$

Vind die waardes van die kwartiele. Let op dat elkeen van die rangordes 'n breuk is, wat beteken dat die waarde van elke persentiel iewers tussen twee waardes in die datastel lê.
Die rangorde vir die 25ste persentiel is 3,75, wat tussen die derde en vierde waardes lê. Dus is die 25ste persentiel $\frac{40+43}{2} = 41{,}5$.

Die rangorde vir die 50^{ste} persentiel (die mediaan) is 6,5, dit wil sê halfpad tussen die sesde en sewende waardes. Dus is die mediaan $\frac{46+53}{2}$ = 49,5. Die rangorde vir die 75^{ste} persentiel is 9,25, dit wil sê tussen die negende en die tiende waardes. Dus is die 75^{ste} persentiel $\frac{63+70}{2}$ = 66,5.

Dus kry ons die volgende waardes vir die kwartiele: Q_1 = 41,5; Q_2 = 49,5; Q_3 = 66,5.

Interkwartielomvang of interkwartielwydte

$$\begin{aligned} \text{interkwartielomvang} &= \text{kwartiel 3} - \text{kwartiel 1} \\ &= 66{,}5 - 41{,}5 \\ &= 25 \end{aligned}$$

6. Drie stelle data word gegee:

Datastel 1: $\{9; 12; 12; 14; 16; 22; 24\}$
Datastel 2: $\{7; 7; 8; 11; 13; 15; 16\}$
Datastel 3: $\{11; 15; 16; 17; 19; 22; 24\}$

Vir elke stel data vind:

a) die omvang

Oplossing:

Al drie datastelle is georden. Om die omvang te vind, trek ons die minimumwaarde van die maksimumwaarde af. As ons dit doen vir elke stel data, gee dit die volgende waardes vir die omvang.

Datastel 1: $24 - 9 = 15$

Datastel 2: $16 - 7 = 9$

Datastel 3: $24 - 11 = 13$

b) die eerste kwartiel

Oplossing:

Vir elke datastel $n = 7$. Dus is die rangorde van die 25^{ste} persentiel dieselfde vir elke datastel: $r_{25} = \frac{25}{100}(7 - 1) + 1 =$ 2,5. Vir elke datastel lê die eerste kwartiel dus tussen die tweede en die derde waardes.

Die eerste kwartiel vir elke datastel is:

Datastel 1: 12

Datastel 2: 7,5

Datastel 3: 15,5

c) die mediaan

Oplossing:

Vir elke datastel $n = 7$. Dus is die rangorde van die 50^{ste} persentiel dieselfde vir elke datastel: $r_{50} = \frac{50}{100}(7 - 1) + 1 = 4$. Vir elke datastel is die mediaan dus die vierde waarde.

Die mediaan vir elke datastel is:

Datastel 1: 14

Datastel 2: 11

Datastel 3: 17

d) die boonste kwartiel

Oplossing:

Vir elke datastel $n = 7$. Dus is die rangorde van die 75^{ste} persentiel dieselfde vir elke datastel: $r_{75} = \frac{75}{100}(7 - 1) + 1 =$ 5,5. Vir elke datastel lê die eerste kwartiel dus tussen die vyfde en die sesde waardes.

Die boonste kwartiel vir elke datastel is:

Datastel 1: 19

Datastel 2: 14

Datastel 3: 20,5

e) die interkwartielwydte

Oplossing:

Die interkwartielomvang word bereken deur die eerste kwartiel af te trek van die derde kwartiel.

Datastel 1: $19 - 12 = 7$

Datastel 2: $14 -$ 7,5 = 6,5

Datastel 3: 20,5 − 15,5 = 5

f) die semi-interkwartielomvang

Oplossing:

Die semi-interkwartielomvang is die helfte van die interkwartielomvang.

Datastel 1: $\frac{7}{2} = 3{,}5$
Datastel 2: $\frac{6{,}5}{2} = 3{,}25$
Datastel 3: $\frac{5}{2} = 2{,}5$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.
1. 2K8W 2. 2K8X 3. 2K8Y 4. 2K8Z 5. 2K92 6. 2K93

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

10.5 Vyfgetal opsomming

Wikihow toon 'n opsomming met kort animasies van hoe om 'n mond-en-snordiagram te trek.

Exercise 10 – 6:

1. Lisa werk in 'n rekenaarwinkel. Sy verkoop die volgende aantal rekenaars elke maand:

$$\{27; 39; 3; 15; 43; 27; 19; 54; 65; 23; 45; 16\}$$

Gee die vyfgetal opsomming en die mond-en-snordiagram van Lisa se verkope.
Oplossing:
Eerste orden ons die datastel.

$$\{3; 15; 16; 19; 23; 27; 27; 39; 43; 45; 54; 65\}$$

Nou kan ons die minimum aflees as die eerste waarde (3) en die maksimum as die laaste waarde (65).
Vervolgens moet ons die kwartiele bepaal.
Daar is 12 waardes in die datastel. Met gebruik van die persentielformule, bepaal ons dat die mediaan tussen die sesde en sewende waardes lê, wat die volgende gee:

$$\frac{27 + 27}{2} = 27$$

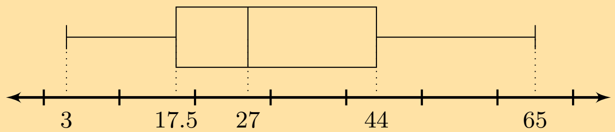
Die eerste kwartiel lê tussen die derde en vierde waardes, wat die volgende gee:

$$\frac{16 + 19}{2} = 17{,}5$$

Die derde kwartiel lê tussen die negende en tiende waardes:

$$\frac{43 + 45}{2} = 44$$

Dit gee die vyfgetal opsomming van die datastel en laat ons toe om die volgende mond-en-snordiagram te teken.
Vyfgetal opsomming:
Minimum: 3
Q_1: 17,5
Mediaan: 27
Q_3: 44
Maksimum: 65
Mond-en-snordiagram:



2. Zithulele werk as 'n televerkoper. Hy hou 'n rekord van sy verkope elke maand. Die data hieronder toon hoeveel hy elke maand verkoop.

$$\{49; 12; 22; 35; 2; 45; 60; 48; 19; 1; 43; 12\}$$

Gee die vyfgetal opsomming en die mond-en-snordiagram van Zithulele se verkope.

Oplossing:

Eerste orden ons die datastel.

$$\{1; 2; 12; 12; 19; 22; 35; 43; 45; 48; 49; 60\}$$

Nou kan ons die minimum aflees as die eerste waarde (1) en die maksimum as die laaste waarde (60).

Vervolgens moet ons die kwartiele bepaal.

Daar is 12 waardes in die datastel. Met gebruik van die persentielformule, bepaal ons dat die mediaan tussen die sesde en sewende waardes lê, wat die volgende gee:

$$\frac{22 + 35}{2} = 28{,}5$$

Die eerste kwartiel lê tussen die derde en vierde waardes, wat die volgende gee:

$$\frac{12 + 12}{2} = 12$$

Die derde kwartiel lê tussen die negende en tiende waardes:

$$\frac{45 + 48}{2} = 46{,}5$$

Die vyfgetal opsomming is:

Minimum: 1

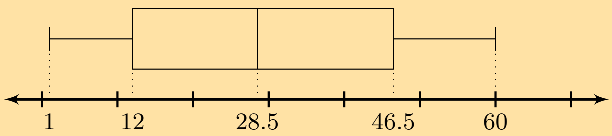
Q_1: 12

Mediaan: 28,5

Q_3: 46,5

Maksimum: 60

Die mond-en-snordiagram is:



3. Nombusa het as 'n bloemis gewerk vir nege maande. Sy verkoop die volgende aantal trouruikers:

$$\{16; 14; 8; 12; 6; 5; 3; 5; 7\}$$

Gee die vyfgetal opsomming vir Nombusa se verkope.

Oplossing:

Eerste orden ons die datastel.

$$\{3; 5; 5; 6; 7; 8; 12; 14; 16\}$$

Nou kan ons die minimum aflees as die eerste waarde (3) en die maksimum as die laaste waarde (16).

Vervolgens moet ons die kwartiele bepaal.

Daar is 9 waardes in die datastel. Met die persentielformule bepaal ons dat die mediaan by die vyfde waarde lê, wat 7 gee.

Die eerste kwartiel lê by die derde waarde, wat dit 5 maak.

Die derde kwartiel lê by die sewende waarde, wat dit 12 maak.

Die vyfgetal opsomming is:

Minimum: 3

Q_1: 5

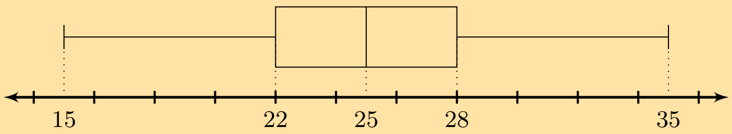
Mediaan: 7

Q_3: 12

Maksimum: 16

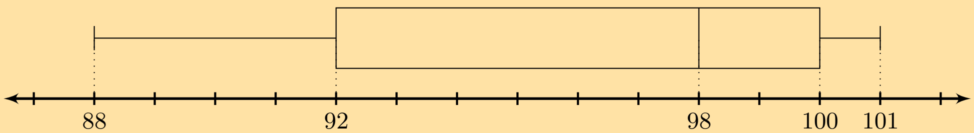
4. Bepaal die vyfgetal opsomming vir elke mond-en-snordiagram hieronder.

   a)



   Oplossing:
   Die boks toon die interkwartielomvang (die afstand tussen Q_1 en Q_3). Die lyn binne-in die boks toon die mediaan. Die lyne wat buitekant die boks uitsteek (die snorre), toon waar die minimum- en maksimumwaardes lê.
   Minimum: 15
   Q_1: 22
   Mediaan: 25
   Q_3: 28
   Maksimum: 35

   b)



   Oplossing:
   Die boks toon die interkwartielomvang (die afstand tussen Q_1 en Q_3). Die lyn binne-in die boks toon die mediaan. Die lyne wat buitekant die boks uitsteek (die snorre), toon waar die minimum- en maksimumwaardes lê.
   Minimum: 88
   Q_1: 92
   Mediaan: 98
   Q_3: 100
   Maksimum: 101

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.
1. 2K95 2. 2K96 3. 2K97 4a. 2K98 4b. 2K99

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

10.6 Hoofstuk opsomming

End of chapter Exercise 10 – 7:

1. Die volgende datastel van lengtes is ingesamel van 'n klas van leerders.
   {1,70 m; 1,41 m; 1,60 m; 1,32 m; 1,80 m; 1,40 m}
   Kategoriseer die datastel.
   Oplossing:
   Die datastel is 'n stel getalle en dus moet dit kwantitatief wees.
   Die datastel is kontinu aangesien dit nie verteenwoordig kan word deur heelgetalle nie.
   Dus is die datastel kwantitatief kontinu.
2. Die volgende datastel van toebroodjiesmere is ingesamel van leerders by middagete.
   {kaas; grondboontjiebotter; konfyt; kaas; heunig}
   Kategoriseer die datastel.

Oplossing:

Die datastel kan nie geskryf word as getalle nie en dit moet dus kwalitatief wees.

Hierdie datastel is kategoriaal aangesien dit afkomstig is van 'n beperkte aantal moontlikhede.

Dus is die datastel kwalitatief diskreet.

3. Bereken die **modus** van die volgende datastel:

   $\{10; 10; 10; 18; 7; 10; 3; 10; 7; 10; 7\}$

   Oplossing:

   Ons sorteer of orden eers die datastel: $\{3; 7; 7; 7; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 18\}$. Die modus is die waarde wat die meeste voorkom in die datastel.

   Die modus is: 10.

4. Bereken die **mediaan** van die volgende datastel:

   $\{5; 5; 10; 7; 10; 2; 16; 10; 10; 10; 7\}$

   Oplossing:

   Ons moet eers die datastel orden:

   $\{2; 5; 5; 7; 7; 10; 10; 10; 10; 10; 16\}$.

   Aangesien daar 'n onewe aantal datawaardes (11) is, lê die mediaan in die sesde plek.

   Die mediaan is: 10.

5. In 'n park het die hoogste 7 bome hoogtes (in meter) van:

   $$\{41; 60; 47; 42; 44; 42; 47\}$$

   Vind die mediaan van hulle hoogtes.

   Oplossing:

   Ons moet eers die datastel orden:

   $\{41; 42; 42; 44; 47; 47; 60\}$.

   Aangesien daar 'n onewe aantal waardes in hierdie datastel is (7), lê die mediaan in die vierde plek.

   Die mediaan is: 44.

6. Die leerders in Ndeme se klas het die volgende ouderdomme:

   $$\{5; 6; 7; 5; 4; 6; 6; 6; 7; 4\}$$

   Vind die modus van hulle ouderdomme.

   Oplossing:

   Ons sorteer of orden eers die datastel: $\{4; 4; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 7; 7\}$. Die modus is die waarde wat die meeste voorkom in die datastel.

   Die modus is: 6.

7. 'n Groep van 7 vriende het elkeen 'n paar lekkers. Hulle werk uit dat die **gemiddelde** aantal lekkers wat hulle het, 6 is. Dan gee 4 vriende pad met 'n onbekende aantal (x) lekkers. Die oorblywende 3 vriende werk uit dat die **gemiddelde** aantal lekkers wat hulle oor het, 10,67 is.

   Toe die 4 vriende padgegee het, hoeveel lekkers het hulle met hulle saamgeneem?

   Oplossing:

   As die **gemiddelde** aantal lekkers wat die groep oorspronklike gehad het **6** was, dan was die totale aantal lekkers:

   $$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{\text{aantal lekkers (voorheen)}}{\text{aantal in groep}}\\ \text{aantal lekkers (voorheen)} &= \text{gemiddelde} \times \text{aantal in groep}\\ &= (6) \times (7)\\ &= 42\end{aligned}$$

   Ons word dan vertel dat **4** vriende vertrek het en daarna is die **gemiddelde** aantal lekkers wat oor is **10,67**. Ons kan die oorblywende aantal lekkers uitwerk.

   $$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{\text{aantal lekkers (agterna)}}{\text{aantal in groep}}\\ \text{aantal lekkers (agterna)} &= \text{gemiddelde} \times \text{aantal in groep}\\ &= (10{,}67) \times (3)\\ &= 32\end{aligned}$$

Ons kan nou uitwerk hoeveel lekkers saamgeneem is deur die 4 vriende wat die groep verlaat het.

$$\begin{aligned}\text{aantal lekkers weggeneem } (x) &= \text{lekkers voorheen} - \text{lekkers agterna}\\ &= (42) - (32)\\ &= 10\end{aligned}$$

8. 'n Groep van 10 vriende het elkeen 'n paar lekkers. Hulle bereken dat die **gemiddelde** aantal lekkers wat hulle het, 3 is. Dan vertrek 5 vriende met 'n onbekende aantal (x) lekkers. Die oorblywende 5 vriende werk uit dat die **gemiddelde** aantal lekkers wat hulle oor het, 3 is.

   Toe die 5 vriende vertrek het, hoeveel lekkers het hulle met hulle saamgeneem?

   Oplossing:

   As die **gemiddelde** aantal lekkers wat die groep oorspronklik gehad het **3** was, dan was die totale aantal lekkers:

$$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{\text{aantal lekkers (voorheen)}}{\text{aantal in groep}}\\ \text{aantal lekkers (voorheen)} &= \text{gemiddelde} \times \text{aantal in groep}\\ &= (3) \times (10)\\ &= 30\end{aligned}$$

   Ons word dan vertel dat **5** vriende vertrek het en daarna is die **gemiddelde** aantal lekkers wat oor is **3**. Ons kan die oorblywende aantal lekkers uitwerk.

$$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{\text{aantal lekkers (agterna)}}{\text{aantal in groep}}\\ \text{aantal lekkers (agterna)} &= \text{gemiddelde} \times \text{aantal in groep}\\ &= (3) \times (5)\\ &= 15\end{aligned}$$

   Ons kan nou bereken hoeveel lekkers geneem is deur die 5 vriende wat die groep verlaat het.

$$\begin{aligned}\text{aantal lekkers weggeneem } (x) &= \text{lekkers voorheen} - \text{lekkers agterna}\\ &= (30) - (15)\\ &= 15\end{aligned}$$

9. Vyf datawaardes word as volg voorgestel: $3x; x+2; x{-}3; x+4; 2x{-}5$, met 'n gemiddelde van 30. Los op vir x.

   Oplossing:

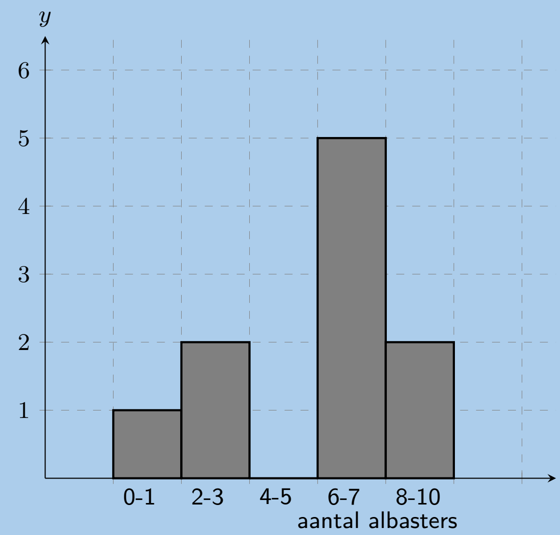
$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{N}\\ 30 &= \frac{3x + x + 2 + x{-}3 + x + 4 + 2x{-}5}{5}\\ 150 &= 8x - 2\\ 152 &= 8x\\ x &= \frac{152}{8}\\ \therefore x &= 19\end{aligned}$$

10. Vyf datawaardes word as volg voorgestel: $p+1; p+2; p+9$. Vind die gemiddelde terme van p.

    Oplossing:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{N}\\ &= \frac{p + 1 + p + 2 + p + 9}{3}\\ &= \frac{3p + 12}{3}\\ \therefore \bar{x} &= p + 4\end{aligned}$$

11. 'n Groep van 10 leerders tel die aantal albasters wat hulle elkeen het. Hierdie histogram beskryf die data wat hulle ingesamel het:

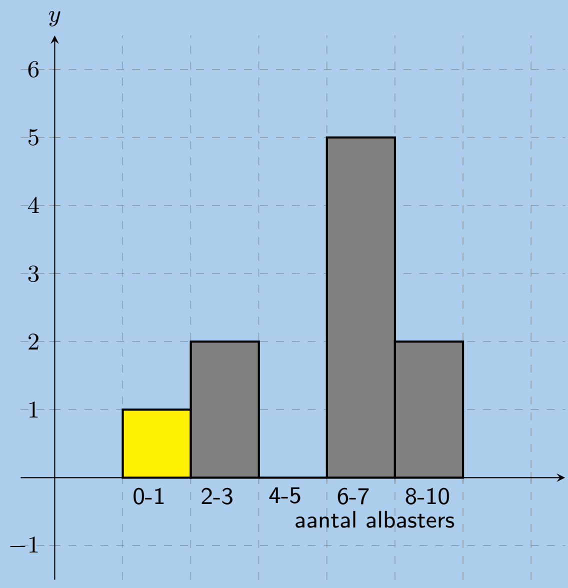


Tel die aantal albasters in die volgende interval: $0 \leq$ aantal albasters ≤ 1

Oplossing:

Vanaf die grafiek is die antwoord: 1

Ons kry ons antwoord van die histogram af deur die hoogte van die spesifieke interval af te lees.



12. 'n Groep van **20** leerders tel die aantal speelkaarte wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle insamel:

12	1	5	4	17
14	7	5	1	3
9	4	12	17	5
19	1	19	7	15

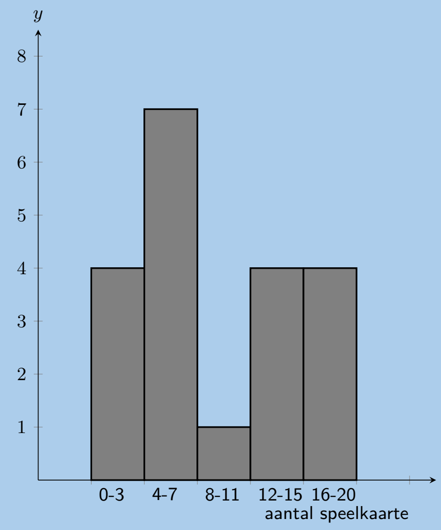
Tel die aantal leerders wat van 0 tot 3 kaarte het. Met ander woorde, hoeveel leerders het speelkaarte in die volgende interval: $0 \leq$ aantal speelkaarte ≤ 3? Dit mag handig wees om 'n histogram te teken om die vraag te beantwoord.

Oplossing:

Heel eerste orden ons die tabel in volgorde, beginnende by die kleinste waarde.

1	1	1	3	4
4	5	5	5	7
7	9	12	12	14
15	17	17	19	19

Tweedens teken ons 'n histogram van die data:



Vanaf die histogram kan jy sien dat 4 leerders speelkaarte in die omvang: $0 \leq$ aantal speelkaarte ≤ 3 het.

13. 'n Groep van **20** leerders tel die muntstukke wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle ingesamel het:

17	11	1	15	14
3	4	18	5	14
18	19	4	18	15
16	13	20	8	18

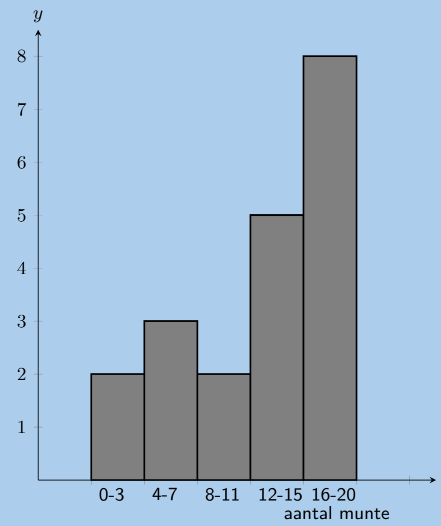
Tel die aantal leerders wat van 4 tot 7 muntstukke het. Met ander woorde, hoeveel leerders het munte in die volgende interval: $4 \leq$ aantal munte ≤ 7? Dit mag help om 'n histogram te teken om hierdie vraag te beantwoord.

Oplossing:

Heel eerste orden ons die tabel in volgorde, beginnende by die kleinste waarde.

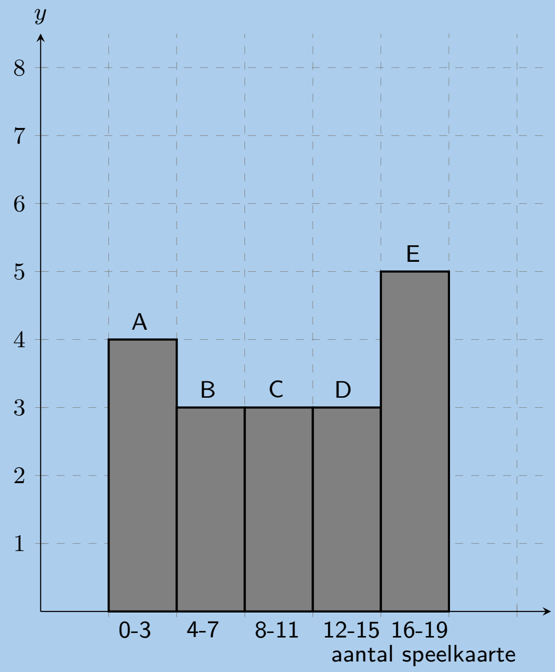
1	3	4	4	5
8	11	13	14	14
15	15	16	17	18
18	18	18	19	20

Tweedens teken ons 'n histogram van die data:



Van die histogram kan jy sien dat 3 leerders munte in die interval: $4 \leq$ aantal munte ≤ 7 het.

14. 'n Groep van 20 leerders tel die aantal speelkaarte wat hulle elkeen het. Die leerders teken 'n histogram wat die data voorstel wat hulle ingesamel het. Maar, hulle het 'n fout gemaak met die teken van die histogram.



Die datastel hieronder toon die korrekte inligting vir die aantal speelkaarte wat die leerders het. Elke waarde verteenwoordig die aantal speelkaarte vir een leerder.

$$\{18; 10; 3; 2; 19; 15; 2; 13; 11; 14; 10; 3; 5; 9; 4; 18; 11; 18; 16; 5\}$$

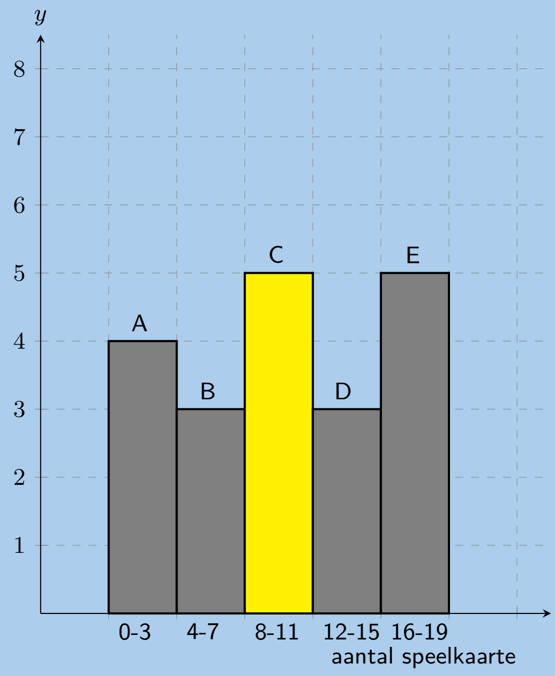
Help hulle om uit te pluis watter **kolom** in die histogram **verkeerd** is.

Oplossing:

Ons moet eers die data orden:

$$\{2; 2; 3; 3; 4; 5; 5; 9; 10; 10; 11; 11; 13; 14; 15; 16; 18; 18; 18; 19\}$$

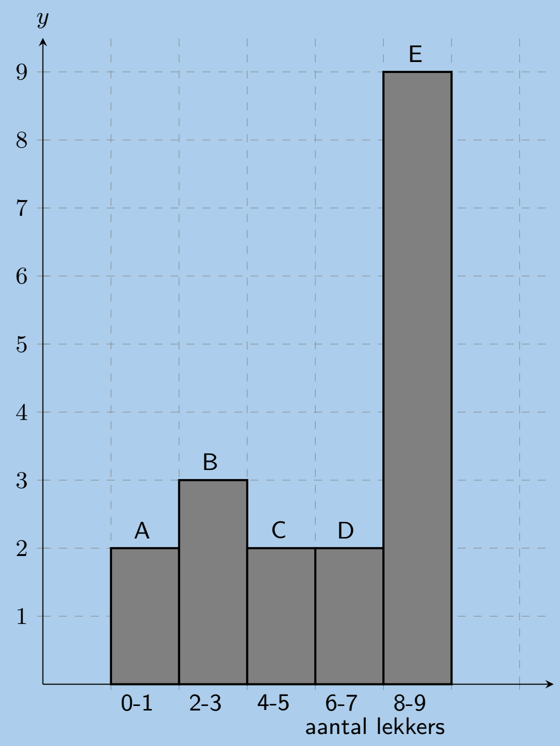
Met gebruik van die geordende datastel, kan ons die data groepeer en die korrekte histogram teken:



Die kolom met die fout in was: C

Die leerders het die verkeerde waarde van **3** gebruik, terwyl die korrekte waarde 5 is.

15. 'n Groep van 10 leerders tel die aantal lekkers wat elkeen het. Hulle teken 'n histogram wat die data voorstel. Hulle maak egter 'n fout in die teken van die histogram.



Die datastel hieronder toon die korrekte inligting vir die aantal lekkers wat die leerders het. Elke waarde verteenwoordig die aantal lekkers vir een leerder.

$$\{1; 3; 7; 4; 5; 8; 2; 2; 1; 7\}$$

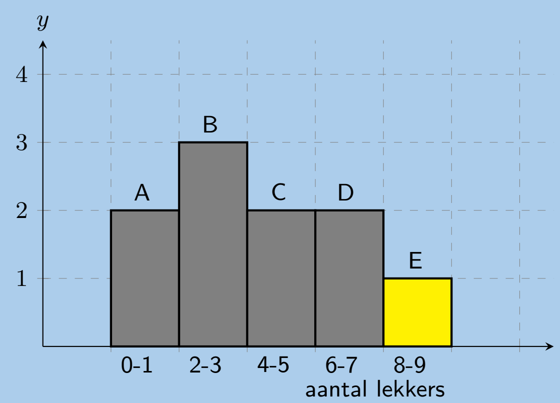
Help hulle om uit te pluis watter **kolom** in die histogram **verkeerd** is.

Oplossing:

Ons moet eers die data orden:

$$\{1; 1; 2; 2; 3; 4; 5; 7; 7; 8\}$$

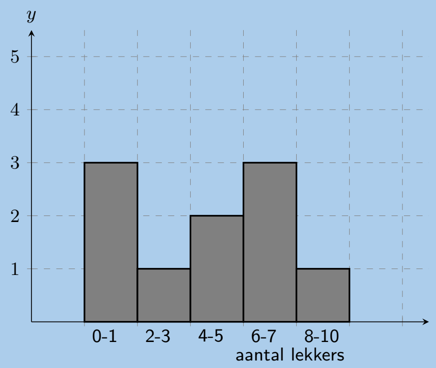
Met gebruik van die geordende datastel, kan ons die data groepeer en die korrekte histogram teken:



Die kolom met die fout in was: E

Die leerders het die verkeerde waarde van **9** gebruik, terwyl die korrekte waarde 1 is.

16. 'n Groep leerders tel die aantal lekkers wat hulle elkeen het. Hier is 'n histogram wat die data beskryf wat hulle ingesamel het:



'n Skoonmaker stamp per ongeluk hulle tafel om en al hulle notas land in 'n deurmekaarspul op die vloer! Help hulle om uit te vind watter van die volgende datastelle pas by die histogram:

Datastel A

$$1 \quad 8 \quad 4 \quad 8 \quad 8 \quad 6 \quad 1 \quad 5 \quad 7 \quad 5$$

Datastel B

$$5 \quad 6 \quad 9 \quad 2 \quad 1 \quad 6 \quad 6 \quad 4 \quad 4 \quad 6$$

Datastel C

$$7 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 5 \quad 1 \quad 1 \quad 7 \quad 8 \quad 6$$

Oplossing:

Ten einde vas te stel watter datastel reg is, moet ons elke datastel orden.

Datastel A

$$1 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 8 \quad 8$$

Datastel B

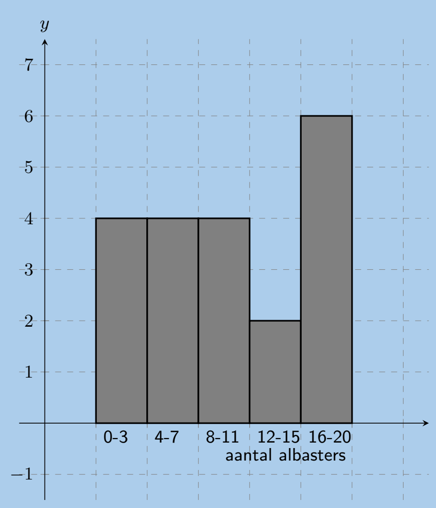
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 9$$

Datastel C

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 7 \quad 8$$

Ons kan nou die data vir elke datastel groepeer en vergelyk dan die gegroepeerde data met die histogram. Deur dit te doen, vind ons datastel C is die korrekte datastel.

17. 'n Groep leerders tel die albasters wat hulle het. Hier is 'n histogram wat die data beskryf.



'n Kat spring per ongeluk op die tafel en al hulle notas land deurmekaar op die vloer. Help hulle om uit te vind watter van die volgende datastelle pas by die histogram:
Datastel A

7	13	15	13	12	13	8	14
3	15	1	7	4	11	1	

Datastel B

17	1	5	4	11	13	6	19	6	20
19	1	14	9	17	3	16	3	10	10

Datastel C

10	3	5	5	6	5	2	1	4	3

Oplossing:
Ten einde vas te stel watter datastel reg is, moet ons elke datastel orden.
Datastel A

1	1	3	4	7	7	8	11
12	13	13	13	14	15	15	

Datastel B

1	1	3	3	4	5	6	6	9	10
10	11	13	14	16	17	17	19	19	20

Datastel C

1	2	3	3	4	5	5	5	6	10

Ons kan nou die data vir elke datastel groepeer en vergelyk dan die gegroepeerde data met die histogram. Deur dit te doen, vind ons datastel B is die korrekte datastel.

18. 'n Groep van **20** leerders tel die hoeveelheid albasters wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle insamel.

11	8	17	13	9	12	2	6	15	7
14	15	1	6	6	13	19	9	6	19

Bereken die **omvang** van die waardes in die datastel
Oplossing:
Ons moet die datastel orden:

1	2	6	6	6	6	7	8	9	9
11	12	13	13	14	15	15	17	19	19

Nou vind ons die maksimumwaarde in die datastel

$$\text{maksimum waarde} = 19$$

Vervolgens vind ons die minimumwaarde in die datastel:

$$\text{minimum waarde} = 1$$

Uiteindelik bereken ons die omvang van die datastel.

$$\begin{aligned}\text{omvang} &= (\text{maksimum waarde}) - (\text{minimum waarde})\\ &= 19 - 1\\ &= 18\end{aligned}$$

19. 'n Groep van**15** leerders tel die aantal lekkers wat hulle elkeen het. Hier is die data wat hulle ingesamel het:

5	13	4	15	5
6	1	3	13	13
15	14	7	2	4

Bereken die **omvang** van die waardes in die datastel

Oplossing:

Ons moet eers die datastel orden:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 13 \\ 13 & 13 & 14 & 15 & 15 \end{array}$$

Vervolgens vind ons die maksimumwaarde in die datastel.

$$\text{maksimum waarde} = 15$$

Dan vind ons die minimumwaarde in die datastel.

$$\text{minimum waarde} = 1$$

Uiteindelik bereken ons die omvang van die datastel.

$$\begin{aligned} \text{omvang} &= (\text{maksimum waarde}) - (\text{minimum waarde}) \\ &= 15 - 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

20. 'n Ingenieursfirma het twee verskillende tipes enjins vir motorfietse ontwerp. Die twee verskillende motorfietse word getoets vir die tyd (in sekondes) wat dit neem om te versnel van 0 km·h^{-1} tot 60 km·h^{-1}.

Toets	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Motorfiets 1	1,55	1,00	0,92	0,80	1,49	0,71	1,06	0,68	0,87	1,09
Motorfiets 2	0,9	1,0	1,1	1,0	1,0	0,9	0,9	1,0	0,9	1,1

a) Watter maatstaf van sentrale neiging behoort mens te gebruik vir hierdie inligting?

Oplossing:

Gemiddelde en modus. Die gemiddelde gee vir ons die gemiddelde versnellingstyd terwyl die modus vir ons die tyd gee wat die meeste voorkom.

As ons die mediaan gebruik sal ons geen nuttige inligting kry nie aangesien die mediaan slegs vir ons aandui wat die sentrale waarde is. Die gemiddelde en die modus verskaf meer inligting oor die datastel in geheel.

b) Bereken die maatstaf van sentrale neiging wat jy gekies het in die vorige vraag, vir elke motorfiets.

Oplossing:

Ons orden eers die data.

Motorfiets 1: $\{0{,}68; 0{,}71; 0{,}80; 0{,}87; 0{,}92; 1{,}00; 1{,}06; 1{,}09; 1{,}49; 1{,}55\}$.

Motorfiets 2: $\{0{,}9; 0{,}9; 0{,}9; 0{,}9; 1{,}0; 1{,}0; 1{,}0; 1{,}0; 1{,}1; 1{,}1\}$.

Vervolgens kan ons die gemiddelde bereken vir elke motorfiets:

$$\begin{aligned} \text{gemiddelde motorfiets 1} &= \frac{0{,}68 + 0{,}71 + 0{,}80 + 0{,}87 + 0{,}92 + 1{,}00 + 1{,}06 + 1{,}09 + 1{,}49 + 1{,}55}{10} \\ &= 1{,}02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{gemiddelde motorfiets 2} &= \frac{0{,}9 + 0{,}9 + 0{,}9 + 0{,}9 + 1{,}0 + 1{,}0 + 1{,}0 + 1{,}0 + 1{,}1 + 1{,}1}{10} \\ &= 1{,}0 \end{aligned}$$

Vir motorfiets 1 is die gemiddelde 1,02 s en daar is geen modus nie, want daar is geen waarde wat meer as een keer voorkom nie.

Vir motorfiets 2 is die gemiddelde 1,0 s en daar is twee modusse, 1,0 en 0,9.

c) Watter motorfiets sal jy kies, gebaseer op hierdie inligting? Let op die akkuraatheid van die getalle van elke stel toetse.

Oplossing:

Dit sou moeilik wees om te kies. Alhoewel motorfiets 1 skynbaar beter doen as motorfiets 2, volgens die gemiddelde, is die data vir motorfiets 2 minder akkuraat as die data vir motorfiets 1 (dit het net 1 desimale plek). As ons die gemiddelde vir motorfiets 1 sou bereken deur slegs 1 desimale plek te gebruik, kry ons 0,9 s. Dit maak motorfiets 2 beter. Motorfiets 2 gee ook meer volgehoue resultate. Dus sou motorfiets 2 waarskynlik 'n goeie keuse wees, maar meer inligting of meer akkurate inligting moet verkry word.

21. In 'n verkeersopname word 'n willekeurige monster van 50 motoriste gevra watter afstand hulle elke dag werk toe ry. Hierdie inligting word getoon in die tabel hieronder.

Afstand (km)	Telling
$0 < d \leq 5$	4
$5 < d \leq 10$	5
$10 < d \leq 15$	9
$15 < d \leq 20$	10
$20 < d \leq 25$	7
$25 < d \leq 30$	8
$30 < d \leq 35$	3
$35 < d \leq 40$	2
$40 < d \leq 45$	2

a) Vind die benaderde gemiddelde van die data.

Oplossing:

Om die benaderde gemiddelde te vind, moet ons die sentrale waarde van elke groep gebruik. Dit word gesê dat 50 motoriste ondervra is en dus is die totale aantal datawaardes 50.

$$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{4(3)+5(8)+9(13)+10(18)+7(23)+8(28)+3(33)+2(38)+2(43)}{50} \\ &= 19{,}9\end{aligned}$$

b) Watter persentasie motoriste het 'n afstand van

i. minder as of gelyk aan 15 km?

ii. meer as 30 km?

iii. tussen 16 km en 30 km?

Oplossing:

i. Die eerste drie groepe ry almal minder as of gelyk aan 15 km. Ons kan die aantal motoriste in hierdie drie groepe bymekaartel en dan hierdie antwoord deel deur die aantal motoriste om die persentasie motoriste te vind: $\frac{18}{50} \times 100 = 38\%$.

ii. Die laaste drie groepe ry almal meer as 30 km. Ons kan die motoriste in hierdie drie groepe bymekaartel en die totaal dan deel deur die totale aantal motoriste om die persentasie motoriste te vind: $\frac{6}{50} \times 100 = 12\%$.

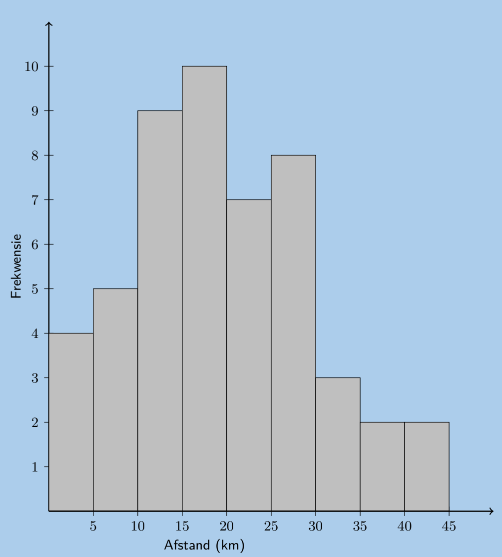
iii. Die drie middelgroepe val in hierdie interval. Ons kan die aantal motoriste in hierdie drie groepe bymekaartel en dan die totaal deel deur die aantal motoriste om die persentasie van die motoriste te kry: $\frac{25}{50} \times 100 = 50\%$.

Let daarop dat die drie persentasies wat ons nou net bereken het, saam optel tot 100%.

c) Teken 'n histogram om die data voor te stel.

Oplossing:

Ons word die groeperings en die tellings vir elke groep gegee. Dus kan ons die volgende histogram teken om die data voor te stel.



22. 'n Maatskappy wil die opleidingsprogram in sy fabriek evalueer. Hulle gee dieselfde taak aan opgeleide en onopgeleide werknemers en neem elkeen se tyd in sekondes.

Opgeleide	121	137	131	135	130
	128	130	126	132	127
	129	120	118	125	134
Onopgeleide	135	142	126	148	145
	156	152	153	149	145
	144	134	139	140	142

a) Vind die mediane en die kwartiele vir beide stelle data.

Oplossing:

Orden heel eerste die datastelle vir beide die opgeleide en die onopgeleide werknemers.

Opgeleide: $118, 120, 121, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 130, 131, 132, 134, 135, 137$.

Onopgeleide: $126, 134, 135, 139, 140, 142, 142, 144, 145, 145, 148, 149, 152, 153, 156$.

Daar is 15 waardes in elke datastel.

Deur die persentielformules te gebruik met $n = 15$, kan ons die rangordes of posisies vind van die 25^{ste}, 50^{ste} en 75^{ste} persentiele:

$$
\begin{aligned}
r_{25} &= \frac{25}{100}(15-1)+1 \\
&= 4{,}5 \\
r_{50} &= \frac{50}{100}(15-1)+1 \\
&= 8 \\
r_{75} &= \frac{75}{100}(15-1)+1 \\
&= 11{,}5
\end{aligned}
$$

Vir die 25^{ste} persentiel is die rangorde 4,5, wat tussen die vierde en die vyfde waardes lê. Die rangorde vir die 50^{ste} persentiel (die mediaan) is 8. Dus lê die mediaan by die agtste waarde. Die rangorde vir die 75^{ste} persentiel is 11,5, wat beteken tussen die elfde en twaalfde waardes.

Vir die opgeleide werknemers kry ons:

25^{ste} persentiel: 125,5; mediaan: 129; 75^{ste} persentiel: 131,5.

Vir die onopgeleide werknemers kry ons:

25^{ste} persentiel: 139,5; mediaan: 144; 75^{ste} persentiel: 148,5.

b) Vind die interkwartielomvang vir beide stelle data.

Oplossing:

Interkwartielomvang vir die opgeleide werknemers: $Q_3 - Q_1 = 6$.

Interkwartielomvang vir die onopgeleide werknemers: $Q_3 - Q_1 = 9$.

c) Lewer kommentaar op die resultate.

Oplossing:

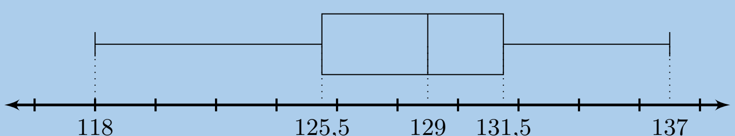
Die mediaan van die onopgeleide werknemers is hoër as die mediaan van die opgeleide werknemers. Die onopgeleide werknemers het ook 'n groter interkwartielomvang as die opgeleide werknemers. Daar is bewyse wat aandui dat die opleidingsprogram mag werk.

d) Trek 'n mond-en-snordiagram vir elke datastel om die vyfgetal opsomming te illustreer.

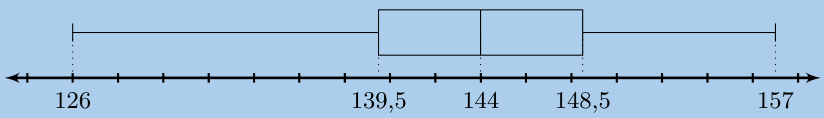
Oplossing:

'n Mond-en-snordiagram toon die vyfgetal opsomming. Die boks toon die interkwartielomvang (die afstand tussen Q_1 en Q_3). Die lyn binne-in die boks toon die mediaan. Die lyne wat uitsteek buite die boks (die snorre) toon waar die minimum en die maksimum lê.

Opgeleide werknemers:



Onopgeleide werknemers:



23. 'n Klein firma neem 9 mense in diens. Die jaarlikse salarisse van die werknemers is:

R 600 000	R 250 000	R 200 000
R 120 000	R 100 000	R 100 000
R 100 000	R 90 000	R 80 000

a) Vind die gemiddelde van hierdie salarisse.
Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{600\ 000 + 250\ 000 + 200\ 000 + 120\ 000 + 3(100\ 000) + 90\ 000 + 80\ 000}{9} \\ &= \frac{1\ 640\ 000}{9} \\ &= \text{R } 182\ 222{,}22\end{aligned}$$

b) Vind die modus.
Oplossing:
Die modus is R 100 000 (hierdie waarde kom 3 keer in die datastel voor).

c) Vind die mediaan.
Oplossing:
Orden die data heel eerste. Om die getalle makliker te maak om mee te werk, deel ons elkeen met 100 000.
Die geordende stel is $\{80; 90; 100; 100; 100; 120; 200; 250; 600\}$.
Die mediaan is by posisie 5 en is R 100 000.

d) Watter een van hierdie drie syfers sal jy gebruik vir onderhandelings vir salarisverhogings as jy 'n vakbond beampte was? Hoekom?
Oplossing:
Die modus of die mediaan. Die gemiddelde is skeef (geskuif) deur die een salaris van R 600 000. Die modus gee vir ons 'n beter benadering van wat die werknemers werklik verdien. Die mediaan is ook 'n redelik akkurate verteenwoordiging van wat die werknemers verdien.

24. Die stingel-en-blaardiagram hieronder dui die polsslag per minuut van tien Graad 10 leerders aan.

7	|	8			
8	|	1	3	5	5
9	|	0	1	1	
10	|	3	5		

Sleutel: $7|8 = 78$.

a) Bepaal die gemiddelde en die omvang van die data.
Oplossing:
Die datastel is $\{78; 81; 83; 85; 85; 90; 91; 91; 103; 105\}$.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{N} \\ &= \frac{892}{10} \\ \bar{x} &= 89{,}2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{omvang} &= \text{maksimum} - \text{minimum} \\ &= 105 - 78 \\ \text{omvang} &= 27\end{aligned}$$

Die gemiddelde en die omvang is 89,2 en 27 onderskeidelik.

b) Gee die vyfgetal opsomming en teken 'n mond-en-snordiagram vir die data.
Oplossing:

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{100}(n-1)+1 \\ r_{25} &= \frac{25}{100}(10-1)+1 \\ &= 3{,}25 \end{aligned}$$

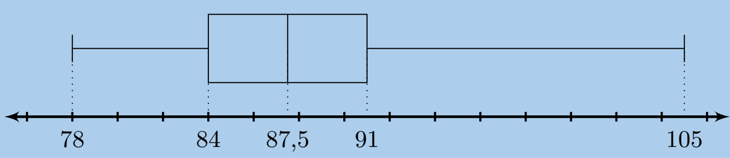
$$\begin{aligned} \therefore Q_1 &= \frac{83+85}{2} \\ &= 84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{50} &= \frac{50}{100}(10-1)+1 \\ &= 5{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore Q_2 &= \frac{85+90}{2} \\ &= 87{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{75} &= \frac{75}{100}(10-1)+1 \\ &= 7{,}75 \\ \therefore Q_3 &= \frac{91+91}{2} \\ &= 91 \end{aligned}$$

Die vyfgetal opsomming is: 78; 84; 87,5; 91; 105.
Met die gebruik hiervan kan ons ’n mond-en-snordiagram trek.



25. Die volgende is ’n lys van data: $3; 8; 8; 5; 9; 1; 4; x$
In elke afsonderlike geval, bepaal die waarde van x as die:

a) omvang = 16
Oplossing:
Die versameling is: $\{1; 3; 4; 5; 8; 8; 9; x\}$. Ons het al die getalle georden en toe x by die einde bygevoeg omdat ons nie weet wat die waarde van x is nie..
Ons weet die omvang is 16. As $x < 9$ sal die omvang $9 - 1 = 8$ wees. Dus $x > 9$ en gevolglik moet die maksimumwaarde x wees.

$$\begin{aligned} \text{omvang} &= \text{maksimum} - \text{minimum} \\ 16 &= x - 1 \\ \therefore x &= 17 \end{aligned}$$

b) modus = 8
Oplossing:
8 is alreeds die modus as ons x uitsluit. Om 8 as modus te behou is x enige heelgetal met $x \neq \{1; 3; 4; 5; 9\}$ te behou.

c) mediaan = 6
Oplossing:
Beskou eers die versameling sonder x: $\{1; 3; 4; 5; 8; 8; 9\}$. Die mediaan in hierdie datastel is 5 (daar is ’n onewe aantal waardes in die stel en die mediaan lê in posisie 4).
Volgende oorweeg ons die volle versameling: $\{1; 3; 4; 5; 8; 8; 9; x\}$. Daar is ’n ewe getal (8) waardes in die volle versameling. Dus moet die mediaan tussen die vierde en die vyfde waardes lê.

Nou moet ons dink waar x in die versameling kan inpas. x kan die vierde waarde wees, die vyfde waarde of iewers anders in die versameling. As x die vierde of die vyfde waarde is, sal ons dieselfde mediaan kry.

Probeer eers die geval waar x die vierde of die vyfde waarde is:

$$\begin{aligned} 6 &= \frac{5+x}{2} \\ x+5 &= 12 \\ \therefore x &= 7 \end{aligned}$$

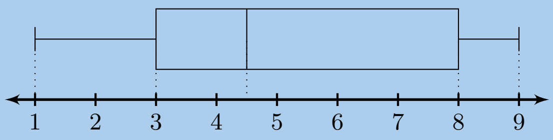
Vervolgens kontroleer ons die geval waar x nie die vierde of die vyfde waarde is nie. In hierdie geval is die mediaan $\frac{5+8}{2}$ = 6,5. Dus kan ons sê $x = 7$.

d) gemiddelde = 6

Oplossing:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{N} \\ 6 &= \frac{x+38}{8} \\ x+38 &= 48 \\ \therefore x &= 10 \end{aligned}$$

e) mond-en-snordiagram



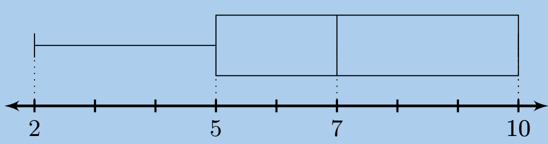
Oplossing:

In vraag a het ons uitgevind dat as die omvang 8 is, dan is $x < 9$. Die omvang hier is 8, dus $x < 9$.

Dus sal ons die mediaan gebruik om ons te help om x te kry. Die mediaan op die mond-en-snordiagram is 4,5. Van ons redenasie in vraag c, weet ons dat dit beteken x is die vierde of vyfde waarde. Dus kan ons x as volg bereken:

$$\begin{aligned} 4{,}5 &= \frac{5+x}{2} \\ x+5 &= 9 \\ \therefore x &= 4 \end{aligned}$$

26. Skryf een lys van getalle neer wat die mond-en-snordiagram hieronder bevredig:



Oplossing:

Van die mond-en-snordiagram kry ons die vyfgetal opsomming. $2; 5; 7; 10; 10$. Let daarop dat die derde kwartiel ook die maksimumwaarde in hierdie geval is.

Hiervan kan ons sê die data moet 'n minimumwaarde van 2 hê en 'n maksimumwaarde van 10.

Die datastel kan enige aantal getalle hê in die omvang $2 \leq x \leq 10$, byvoorbeeld die eerste kwartiel is 5, die mediaan is 7 en die derde kwartiel is 10. Daar is ook geen beperking op die aantal waardes in die datastel nie.

Een moontlike versameling wat hierdie stel getalle bevredig, is $\{2; 5; 7; 10; 10\}$. Jy kan kontroleer dat hierdie versameling werk deur die kwartiele te bereken.

27. Gegee Φ (wat verteenwoordig die goue verhouding) tot 20 desimale plekke: 1,61803398874989484820

a) Vir die eerste 20 desimale plekke vir (Φ), bepaal die:

i. mediaan

ii. modus

iii. gemiddelde

Oplossing:

i. Die geordende versameling is: $\{0; 0; 1; 2; 3; 3; 4; 4; 4; 6; 7; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9\}$

$$\begin{aligned} r_{50} &= \frac{50}{100}(20-1)+1 \\ &= 10{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mediaan} &= \frac{6+7}{2} \\ &= 6{,}5 \end{aligned}$$

ii. Die modus is 8.

iii.

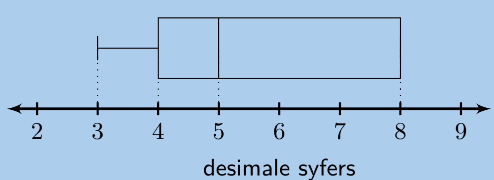
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1+x_2+...x_n}{N} \\ &= \frac{109}{20} \\ \bar{x} &= 5{,}45 \end{aligned}$$

b) As die gemiddeld van die eerste 21 desimale syfers van (Φ), 5,38095 is, bepaal die 21^{ste} desimale syfer.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1+x_2+...x_n}{N} \\ 5{,}38095 &= \frac{109+\phi_{21}}{21} \\ \phi_{21} &= 21(5{,}38095)-109 \\ \phi_{21} &= 4 \end{aligned}$$

c) Hieronder is 'n mond-en-snordiagram van die 21^{ste} - 27^{ste} desimale syfers. Skryf een lys van getalle neer wat hierdie mond-en-snordiagram bevredig.



Oplossing:

Van die mond-en-snordiagram kry ons die vyfgetal opsomming. $3; 4; 5; 8; 8$. Let daarop dat die derde kwartiel ook die maksimumwaarde in hierdie geval is.

Hiervan kan ons aflei dat die data 'n minimumwaarde van 3 moet hê en 'n maksimumwaarde van 8.

Die datastel kan enige getalle bevat in die omvang $3 \leq x \leq 8$, sodat die eerste kwartiel 4 is, die mediaan 5 en die derde kwartiel 8. Maar ons weet die datastel bestaan uit die 21^{ste} - 27^{ste} desimale syfers van Φ en dus moet die datastel 7 waardes bevat.

Die mediaan sal by die vierde posisie wees en dus is die vierde getal in die versameling 5. Die eerste kwartiel sal tussen die tweede en die derde waarde lê, terwyl die derde kwartiel tussen die vyfde en die sesde waardes sal lê.

Laat die datastel $\{3; x; y; 5; a; b; 8\}$ wees.

Die eerste kwartiel is:

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{x+y}{2} \\ 8 &= x+y \end{aligned}$$

x en y kan enige heelgetalle wees waarvan die som 8 is. Maar, x en y moet groter of gelyk wees aan 3 en kleiner of gelyk aan 5. Dus die moontlike waardes is 3 en 5 of 4 en 4.

Die derde kwartiel is:

$$\begin{aligned}8 &= \frac{a+b}{2} \\ 16 &= a+b\end{aligned}$$

a en b kan enige heelgetalle wees waarvan die som 16 is. Maar, a en b moet groter of gelyk aan 5 wees en kleiner of gelyk aan 8. Dus, die enigste moontlik waardes is: 8 en 8.

Daar is twee moontlike versamelings: $\{3; 3; 5; 5; 8; 8; 8\}$ of $\{3; 4; 4; 5; 8; 8; 8\}$.

28. Daar werk 14 mans by 'n fabriek. Hulle ouderdomme is: $22; 25; 33; 35; 38; 48; 53; 55; 55; 55; 55; 56; 59; 64$

a) Skryf die vyfgetal opsomming neer.

Oplossing:

$$\begin{aligned}r &= \frac{p}{100}(n-1)+1 \\ r_{25} &= \frac{25}{100}(14-1)+1 \\ &= 4{,}25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore Q_1 &= \frac{35+38}{2} \\ &= 36{,}5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{50} &= \frac{50}{100}(14-1)+1 \\ &= 7{,}5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore Q_2 &= \frac{53+55}{2} \\ &= 54\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{75} &= \frac{75}{100}(14-1)+1 \\ &= 10{,}75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore Q_3 &= \frac{55+55}{2} \\ &= 55\end{aligned}$$

Die vyfgetal opsomming is: 22; 36,5; 50; 55; 64

b) As 3 mans afgedank moet word, maar die mediaan moet dieselfde bly, toon die ouderdomme van die 3 mans wat jy sou afdank.

Oplossing:

As jy 3 mans afdank, sal daar 11 mans oorbly. Vir 'n onewe stel getalle, moet die mediaan dieselfde wees as een van die ouderdomme. Geeneen van die mans is 54 jaar oud nie.

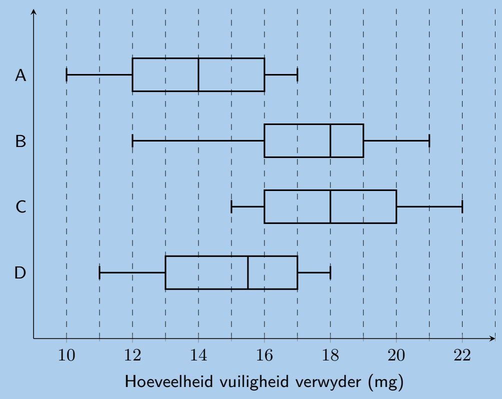
Dus geen man kan afgedank word nie om die mediaan dieselfde te hou.

c) Vind die gemiddelde ouderdom van die mans in die fabriek deur die oorspronklike data te gebruik.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{N} \\ &= \frac{597}{14} \\ \therefore \bar{x} &= 42{,}643\end{aligned}$$

29. Die voorbeeld toon 'n vergelyking tussen die hoeveelheid vuiligheid wat verwyder word deur vier verskillende soorte skoonmaakmiddels (tipes A tot D).



a) Watter tipes het die grootste omvang en wat is hierdie omvang?

Oplossing:

A: omvang $= 17 - 10 = 7$

B: omvang $= 21 - 12 = 9$

C: omvang $= 22 - 15 = 7$

D: omvang $= 18 - 11 = 7$

B het die grootste reikwydte of omvang. Die omvang is 9.

b) Wat verteenwoordig die getal 18 mg vir tipe C?

Oplossing:

18 mg verteenwoordig die mediaan.

c) Gee die interkwartielwydte vir tipe B.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{interkwartielomvang} &= Q_3 - Q_1\\ &= 19 - 16\\ &= 3\end{aligned}$$

d) Watter soort skoonmaakmiddel sou jy koop? Verduidelik jou antwoord.

Oplossing:

Ons moet verskeie waardes vergelyk om ons te help besluit. Hierdie waardes word getoon in die tabel hieronder.

Tipe	Minimumwaarde	Maksimumwaarde	Omvang	Interkwartielomvang
A	10	17	7	4
B	12	21	9	3
C	15	22	7	4
D	11	18	7	4

Hier sien ons dat tipe C die hoogste minimumwaarde het. Tipe B het die kleinste interkwartielwydte maar die grootste omvang. Dit is moontlik dat die minimumwaarde vir tipe B 'n uitskieter is wat tipe B 'n beter keuse sou maak as tipe C.

Met inagneming van die data beskikbaar, sou dit moeilik wees om te kies tussen tipe C en tipe B. Ons kan egter sê dat tipes A en D nie goeie keuses sal wees nie omdat hulle albei lae minimum- en maksimumwaardes het .

Aangesien tipe C nie 'n potensiële uitskieter het nie, mag dit die beste tipe wees om te kies.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2K9C 2. 2K9D 3. 2K9F 4. 2K9G 5. 2K9H 6. 2K9J
7. 2K9K 8. 2K9M 9. 2K9N 10. 2K9P 11. 2K9Q 12. 2K9R
13. 2K9S 14. 2K9T 15. 2K9V 16. 2K9W 17. 2K9X 18. 2K9Y
19. 2K9Z 20. 2KB2 21. 2KB3 22. 2KB4 23. 2KB5 24. 2KB6
25. 2KB7 26. 2KB8 27. 2KB9 28. 2KBB 29. 2KBC

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 11

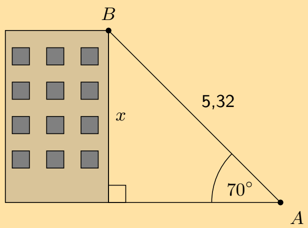
Trigonometrie

- Hierdie hoofstuk dek die oplos van probleme in twee dimensies deur die gebruik van trigonometrie.
- Beklemtoon die waarde en belangrikheid van die maak van sketse waar van toepassing.
- Voor jy met hierdie hoofstuk begin, mag dit goed wees om gou die vorige inhoud van trigonometrie te hersien.

11.1 Twee-dimensionele probleme

Exercise 11 – 1:

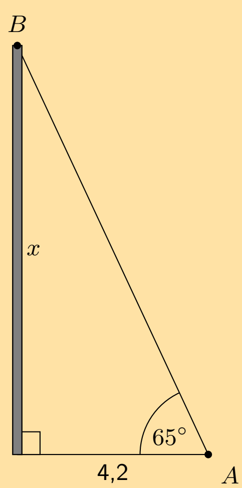
1. 'n Persoon staan by punt A, en kyk op na 'n voëltjie wat bo-op 'n gebou, by punt B, sit.
   Die hoogte van die gebou is x meter, die lengte van die lyn van sig vanaf punt A na die bopunt van die gebou (punt B) is 5,32 meter, en die hoogtehoek na die bopunt van die gebou is $70°$.
   Bereken die hoogte van die gebou (x) soos getoon in die diagram hieronder:

   Oplossing:

   $$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}\\ \sin 70° &= \frac{x}{5{,}32}\\ x &= 4{,}99916...\\ &\approx 5\end{aligned}$$

   Die hoogte van die gebou is 5 m.
2. 'n Persoon staan by punt A, en kyk op na 'n voëltjie wat op die bopunt van 'n paal sit (punt B).
   Die hoogte van die paal is x meter, punt A is 4,2 meter weg van die voet van die paal en die hoogtehoek na die bopunt van die paal is $65°$.
   Bereken die hoogte van die paal (x), tot die naaste meter.

Oplossing:

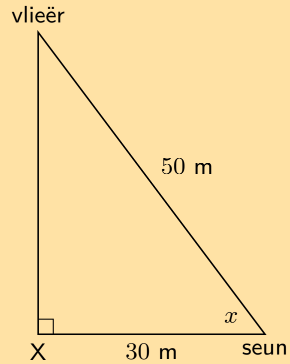
$$\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$$
$$\tan 65^\circ = \frac{x}{4{,}2}$$
$$x = 9{,}0069...$$
$$\approx 9$$

Die hoogte van die paal is 9 m.

3. 'n Seun wat 'n vlieër vlieg, staan 30 m vanaf 'n punt direk onder die vlieër. As die vlieër se tou 50 m lank is, vind die hoogtehoek van die vlieër.

   Oplossing:

   Teken eers 'n skets:



   Ons kan die cosinus verhouding gebruik om die hoogtehoek (x) te vind:

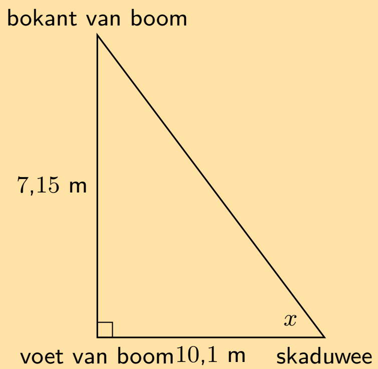
$$\cos x = \frac{30}{50}$$
$$x = 53{,}1301...$$
$$\approx 53{,}13^\circ$$

   Die hoogtehoek van die vlieër is 53,13°.

4. Wat is die hoogtehoek van die son wanneer 'n boom, wat 7,15 m hoog is, 'n skaduwee van 10,1 m lank gooi?

   Oplossing:

   Teken eers 'n skets:



   Ons kan die tangensverhouding gebruik om die hoogtehoek (x) te vind:

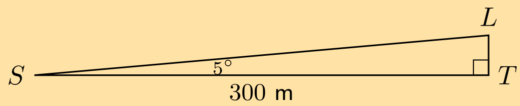
$$\tan x = \frac{7{,}15}{10{,}1}$$
$$x = 35{,}2954...$$
$$\approx 35{,}30^\circ$$

Die hoogtehoek van die son is 35,30°.

5. Susan kyk op na die top van 'n vuurtoring van 'n afstand van 300 m. Die hoogtehoek is 5°. Bepaal die hoogte van die vuurtoring tot die naaste meter.

Oplossing:

Teken eers 'n skets:



Ons moet LT vind. Ons kan die tangensverhouding gebruik:

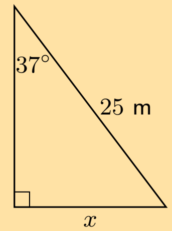
$$\begin{aligned} \tan \hat{S} &= \frac{LT}{ST} \\ LT &= 300 \tan 5° \\ &= 26{,}2465... \\ &\approx 26 \text{ m} \end{aligned}$$

Die hoogte van die vuurtoring is 26 m.

6. 'n Leer wat 25 m lank is, rus teen 'n muur en maak 'n hoek van 37° met die muur. Vind die afstand tussen die muur en die voet van die leer tot die naaste meter.

Oplossing:

Teken eers 'n skets:



Let op dat ons weet wat die hoek is wat die leer met die muur maak, nie die hoek wat die leer met die grond maak nie.

Nou kan ons die sinusverhouding gebruik om x te vind:

$$\begin{aligned} \sin 37° &= \frac{x}{25} \\ x &= 25 \sin 37° \\ &= 15{,}04537... \\ &\approx 15 \text{ m} \end{aligned}$$

Die basis van die leer is 15 m weg van die muur.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KBD 2. 2KBF 3. 2KBG 4. 2KBH 5. 2KBJ 6. 2KBK

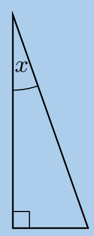
 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

End of chapter Exercise 11 – 2:

1. 'n Leer van 15 m rus teen 'n muur en die voet van die leer is 5 m van die muur af. Vind die hoek tussen die muur en die leer.

   Oplossing:

   Teken eers 'n skets:

   Let daarop dat ons die hoek wil vind wat die leer met die muur maak, nie die hoek wat die leer met die grond maak nie.

   Nou gebruik ons $\sin x = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}$:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{5}{15} \\ &= 0{,}3333... \\ x &= 19{,}4712... \\ &\approx 19{,}47° \end{aligned}$$

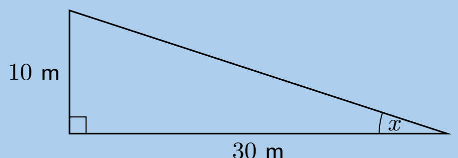
   Die hoek tussen die leer en die muur is 19,47°.

2. Kaptein Jack seil in die rigting van 'n krans met 'n hoogte van 10 m.

   a) Die afstand vanaf die boot na die voet van die krans is 30 m. Bereken die hoogtehoek vanaf die boot na die bopunt van die krans (korrek tot die naaste graad).

      Oplossing:

      Teken eers 'n skets:

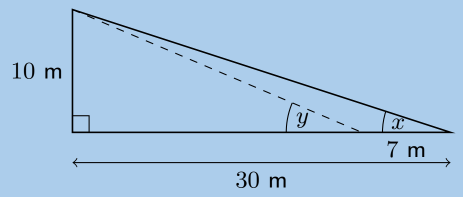
$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{10}{30} \\ x &= 18{,}4349...° \\ &= 18° \end{aligned}$$

      Die hoogtehoek is 18°.

   b) As die boot 7 m nader aan die krans seil, wat is die nuwe hoogtehoek vanaf die boot na die bopunt van die krans?

      Oplossing:

      Ons teken die skets oor met die nuwe inligting:

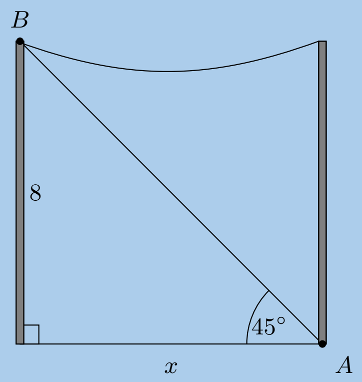


Die nuwe afstand vanaf die boot na die krans is $30\text{ m} - 7\text{ m} = 23\text{ m}$. Die hoogte van die krans het nie verander nie.

$$\begin{aligned}\tan y &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}\\ &= \frac{10}{23}\\ y &= 23{,}49856...^\circ\\ &= 23^\circ\end{aligned}$$

Die nuwe hoogtehoek is 23°.

3. Jim staan by punt A by die voet van 'n telefoonpaal en kyk op na 'n voëltjie wat op die bopunt van 'n ander telefoonpaal sit (punt B).
   Die hoogte van elk van die telefoonpale is 8 meter, en die hoogtehoek na die top van die telefoonpaal is 45°.
   Bereken die afstand tussen die telefoonpale (x) soos getoon in die diagram hieronder:

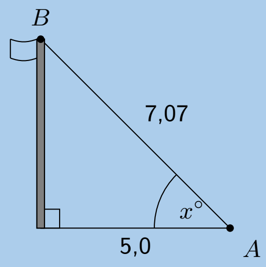


Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}\\ \tan 45^\circ &= \frac{8}{x}\\ x &= \frac{8}{\tan 45^\circ}\\ &= 8\end{aligned}$$

Die afstand tussen die telefoonpale is 8 m.

4. Alfred staan by punt A en kyk op na 'n vlag aan 'n paal (punt B).
   Punt A is 5,0 meter weg van die voet van die vlagpaal, die afstand van die lyn van sig vanaf punt A na die bopunt van die vlagpaal (punt B) is 7,07 meter, en die hoogtehoek na die bopunt van die vlagpaal is x°.
   Bereken die hoogtehoek na die bopunt van die vlagpaal (x) soos getoon in die diagram hieronder:

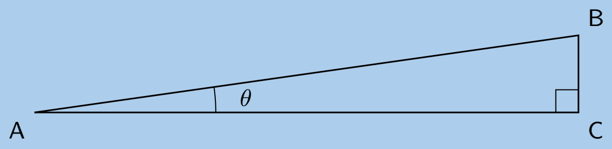


Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}} \\
\cos x^\circ &= \frac{5{,}0}{7{,}07} \\
x &= 44{,}9913... \\
&\approx 44{,}99^\circ
\end{aligned}$$

Die hoogtehoek is 44,99°.

5. ’n Rugbyspeler probeer ’n bal oor die dwarsbalk en tussen die pale deurskop. Die dwarsbalk is 3,4 m hoog. Die bal word reg voor die pale, 24 m vanaf die pale gestel. Wat is die minimumhoek waarteen hy die bal moet lig om dit oor die dwarsbalk te skop?
Oplossing:

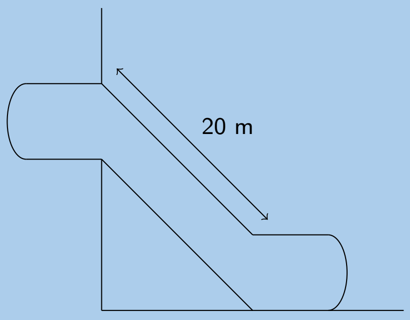


CA is die afstand vanaf die pale, 24 m; BC is die dwarsbalkhoogte 3,4 m. Die minimum hoek is die hoogtehoek.

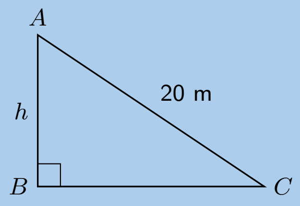
$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{BC}{CA} \\
&= \frac{3{,}4}{24} \\
\theta &= 8{,}0632... \\
&\approx 8^\circ
\end{aligned}$$

Dus moet hy die bal skop teen ’n minimum hoek van 8°.

6. Die roltrap by ’n inkopiesentrum is gebou teen ’n hoek van 30° en is 20 m lank



Deur watter vertikale hoogte sal ’n persoon opwaarts gelig word met die roltrap?
Oplossing:
Ons het die volgende reghoekige driehoek:



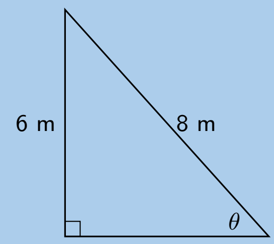
Ons kan die sinusverhouding gebruik om die hoogte te vind.

$$\begin{aligned}\sin 30° &= \frac{h}{20}\\ h &= 20\sin 30°\\ &= 10 \text{ m}\end{aligned}$$

'n Persoon wat met die roltrap opry, sal deur 'n vertikale hoogte van 10 m opwaarts beweeg.

7. 'n Leer is 8 meter lank. Dit leun teen die muur van 'n huis en kom tot by 'n hoogte van 6 meter teen die muur op.

   a) Teken 'n skets van die situasie.
   Oplossing:



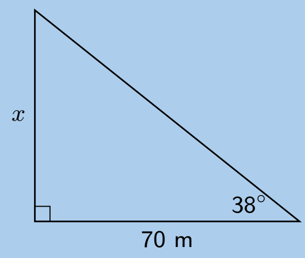
   b) Bereken die hoek wat die leer maak met die plat (gelyk) grond.
   Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{6}{8}\\ \theta &= 48{,}5903...\\ \theta &\approx 48{,}59°\end{aligned}$$

   Die leer maak 'n hoek van 48,59° met die grond.

8. Nandi staan op plat grond 70 meter weg van 'n hoë toring. Van haar posisie is die hoogtehoek na die bopunt van die toring 38°.

   a) Teken 'n skets van die situasie.
   Oplossing:

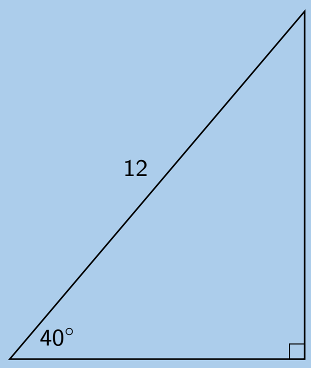


   b) Wat is die hoogte van die toring?
   Oplossing:
   Ons kan die tangensverhouding gebruik om die hoogte van die toring te bepaal.

$$\begin{aligned}\tan 38 &= \frac{x}{70}\\ x &= 70\tan 38\\ &= 54{,}6899...\\ &\approx 54{,}69 \text{ m}\end{aligned}$$

Die hoogte van die toring is 54,69 m.

9. Die bopunt van 'n paal is geanker met 'n 12 m kabel wat 'n hoek van 40 grade maak met die horisontaal. Hoe hoog is die paal?



Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin 40 &= \frac{h}{12}\\ h &= 12\sin 40\\ &= 7{,}713...\\ &\approx 7{,}71 \text{ m}\end{aligned}$$

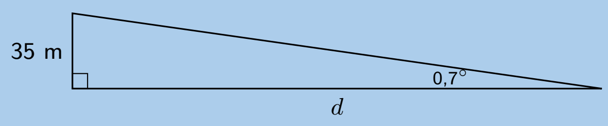
Die hoogte van die paal is 7,71 m.

10. 'n Skip se navigator kyk na 'n vuurtoring op 'n krans. Volgens die navigasiekaarte is die bopunt van die vuurtoring 35 meter bokant seevlak. Sy meet dat die hoogtehoek na die bopunt van die vuurtoring 0,7° is.

Skepe word aangeraai om ten minste 4 km van die kus af te bly. Is hierdie skip veilig?

Oplossing:

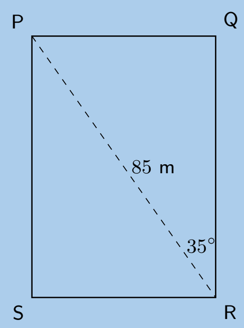
Teken eers 'n skets:



$$\begin{aligned}\tan 0{,}7 &= \frac{35}{d}\\ d &= \frac{35}{\tan 0{,}7}\\ &= 2864{,}6464...\\ &\approx 2864{,}65 \text{ m}\\ &\approx 2{,}86 \text{ km}\end{aligned}$$

Dus is die skip nie veilig nie.

11. Bepaal die omtrek van die reghoek $PQRS$:



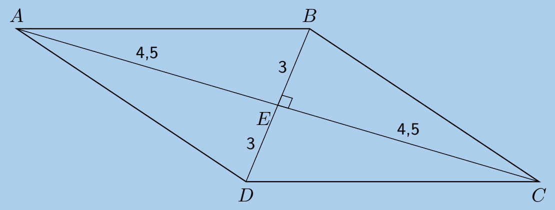
Oplossing:
Deur die gebruik van trigonometrie verhoudings kan ons QR en PQ bereken.

$$QR = 85\cos 35$$
$$PQ = 85\sin 35$$

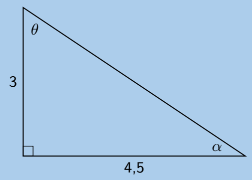
$$\begin{aligned} P &= 2 \times (h + b) \\ &= 2(85\cos 35 + 85\sin 35) \\ &= 2(85(\cos 35 + \sin 35)) \\ &= 2(236{,}76 \text{ m}) \\ &= 473{,}52 \text{ m} \end{aligned}$$

Dus is die omtrek 473,52 m.

12. 'n Ruit se hoeklyne is 6 cm en 9 cm lank. Bereken die groottes van die binnehoeke.



Oplossing:
Daar is vier klein reghoekige driehoeke in die ruit: $\triangle ABE$, $\triangle BEC$, $\triangle CED$ and $\triangle DEA$. Aangesien die hoeklyne mekaar halveer en ons die lengtes van die hoeklyne het, weet ons hoe lank die sye van die driehoeke is:



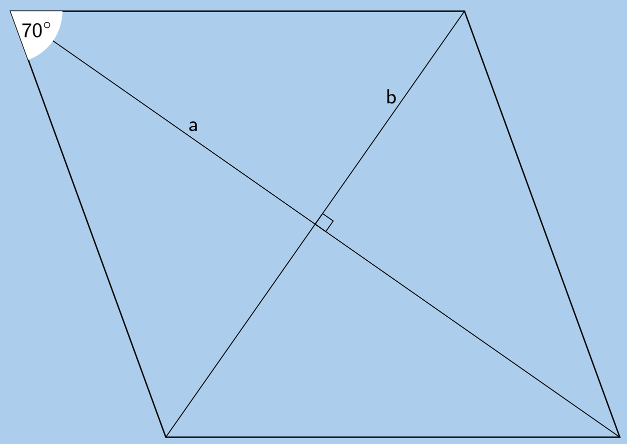
Ons kan die twee hoeke bereken:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{4{,}5}{3} \\ &= 41{,}9872... \\ \theta &\approx 53{,}31° \end{aligned}$$

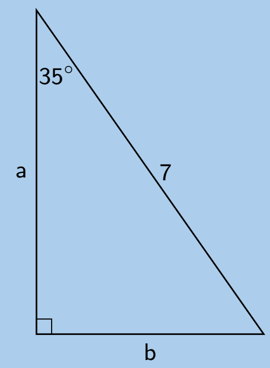
$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{3}{4{,}5} \\ &= 33{,}6900... \\ \alpha &\approx 33{,}69° \end{aligned}$$

Nou let ons op dat daar twee verskillende binnehoeke is. Een van hierdie hoeke is 2α en die ander een is 2θ. Dus is die twee hoeke 106,62° en 67,38°

13. 'n Ruit het sylengtes van 7 cm. Die skerp binnehoeke is elk 70°. Bereken die lengtes van beide die hoeklyne.



Oplossing:

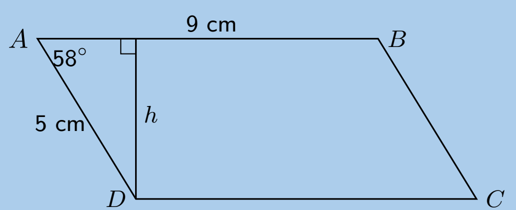


$$
\begin{aligned}
\cos 35° &= \frac{a}{7} \\
a &= 7\cos 35° \\
&= 5{,}734... \\
\text{hoeklyn 1} &= 11{,}47 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin 35° &= \frac{b}{7} \\
b &= 7\sin 35° \\
&= 4{,}015... \\
\text{hoeklyn 2} &= 8{,}03 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Dus is die twee hoeklyne 11,47 cm en 8,03 cm

14. 'n Parallelogram het sye van 5 cm en 9 cm onderskeidelik, en 'n hoek van 58° tussen hulle. Bereken die loodregte afstand tussen die twee langer sye.

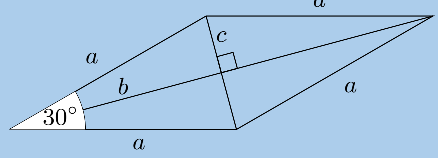


Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin 58^\circ &= \frac{h}{5}\\ h &= 5\sin 58^\circ\\ &= 4{,}24 \text{ cm}\end{aligned}$$

15. Een van die hoeke van 'n ruit met omtrek 20 cm is 30°.

    a) Vind die lengte van sye van die ruit.
    Oplossing:
    Teken eers 'n skets:



Die omtrek word gekry deur al die sye bymekaar te tel. Al die sye is ewe lank, dus is die omtrek $= 4a$.

$$\begin{aligned}20 &= 4a\\ a &= 5\end{aligned}$$

Dus is die sye almal 5 cm in lengte.

    b) Vind die lengtes van beide hoeklyne.
    Oplossing:
    Die hoeklyne van 'n ruit halveer die hoek, dus, as ons in een van die klein driehoeke werk, kan ons die trigonometriese verhoudings gebruik om b te vind:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \frac{b}{5}\\ b &= 5\cos 15^\circ\\ &= 4{,}83\end{aligned}$$

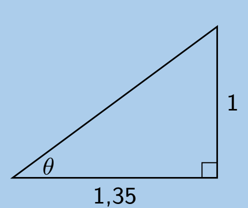
Met Pythagoras $c^2 = a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned}c^2 &= (5)^2 - (4{,}83)^2\\ &= 25 - 23{,}33\\ &= 1{,}67\\ c &= 1{,}29\end{aligned}$$

Aangesien die hoeklyne mekaar halveer, weet ons dat die totale lengte van elke hoeklyn is $2b$ of $2c$, afhangende van watter hoeklyn ons ondersoek.
Die een hoeklyn is $2(4{,}83) = 9{,}66$ cm en die ander hoeklyn is $2(1{,}29) = 2{,}58$ cm.

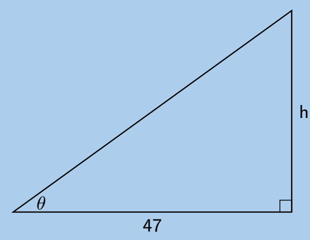
16. Regop stokke en die skaduwees wat hulle gooi, kan gebruik word om die benaderde hoogte van die son in die lug (die hoek wat die son maak met die horisontaal) en die hoogte van voorwerpe te bepaal.

    a) 'n Regop stok, 1 meter hoog, gooi 'n skaduwee van 1,35 meter. Wat is die hoogtehoek van die son?
    Oplossing:



$$\tan\theta = \frac{1}{1{,}35}$$
$$\theta = 36{,}53°$$

b) Die skaduwee van 'n gebou is 47 meter lank, op dieselfde tydstip. Hoe hoog is die gebou?
Oplossing:
Ons weet die hoek wat die son maak met die horisontaal en nou kan ons gebruik om die hoogte van die gebou te vind.

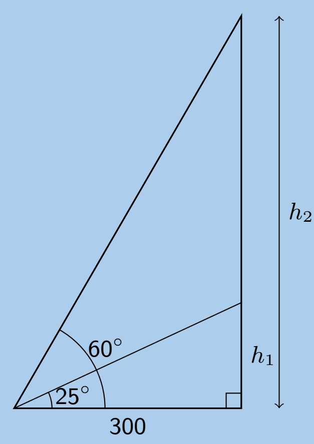


In die figuur hierbo is θ die hoek wat die son maak met die horisontaal.

$$\tan 36{,}53° = \frac{h}{47}$$
$$h = 47\tan 36{,}53°$$
$$= 34{,}82 \text{ m}$$

17. Die hoogtehoek van 'n warmlugballon, wat vertikaal klim, verander van 25 grade teen 11:00 vm tot 60 grade teen 11:02 vm. Die waarnemingspunt waarvandaan die hoogtehoek gemeet word, is 300 meter van die punt waar die lugballon begin opstyg het.

a) Teken 'n skets van die situasie.
Oplossing:



b) Bereken die toename in hoogte tussen 11:00 en 11:02 vm.
Oplossing:

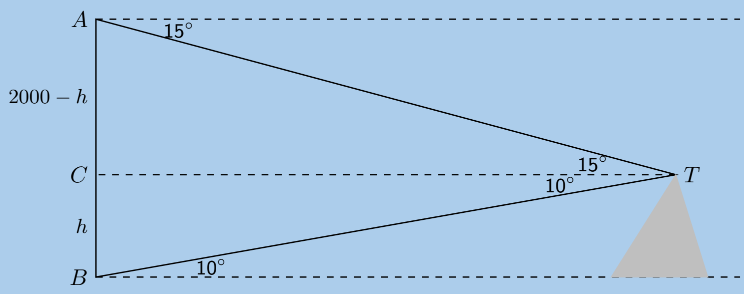
$$\tan 25° = \frac{h_1}{300}$$
$$h_1 = 300\tan 25°$$
$$= 139{,}89 \text{ m}$$

$$\tan 60° = \frac{h_2}{300}$$
$$h_2 = 300\tan 60°$$
$$= 519{,}62 \text{ m}$$

Die verskil is:

$$519{,}62 \text{ m} - 129{,}89 \text{ m} = 379{,}73 \text{ m}$$

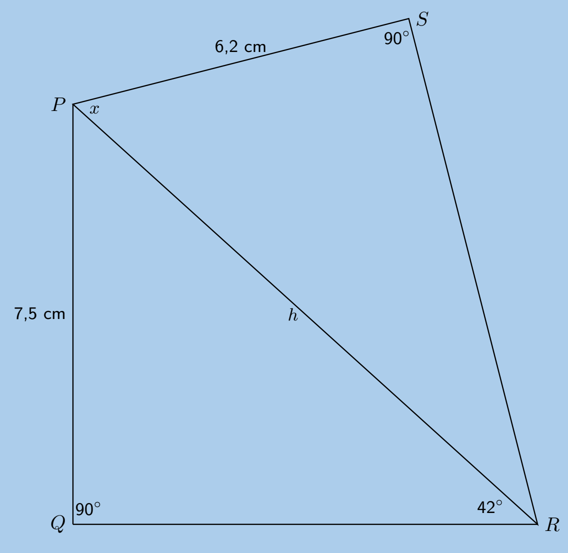
18. Wanneer die toppunt van 'n berg, T, beskou word vanaf punt A, 2000 m van die grond af, is die dieptehoek (a) 15°. Wanneer dit beskou word vanaf B op die grond, is die hoogtehoek (b) 10°. As punte A en B in dieselfde vertikale vlak lê, vind h, die hoogte van die berg. Rond jou antwoord af tot een desimale plek.
Oplossing:



$$\tan 10° = \frac{h}{CT}$$
$$CT = \frac{h}{\tan 10°}$$
$$\tan 15° = \frac{2000 - h}{CT}$$
$$CT = \frac{2000 - h}{\tan 15°}$$

$$\therefore \frac{h}{\tan 10°} = \frac{2000 - h}{\tan 15°}$$
$$h = 793{,}77 \text{ m}$$

19. Die diagram hieronder toon vierhoek $PQRS$, met $PQ = 7{,}5$ cm, $PS = 6{,}2$ cm, en hoek $R = 42°$, en hoeke S en Q is regte hoeke.



a) Vind PR, korrek tot 2 desimale plekke.
Oplossing:

$$\frac{7{,}5}{PR} = \sin 42°$$
$$\frac{7{,}5}{\sin 42°} = PR$$
$$\therefore PR = 11{,}21 \text{ cm}$$

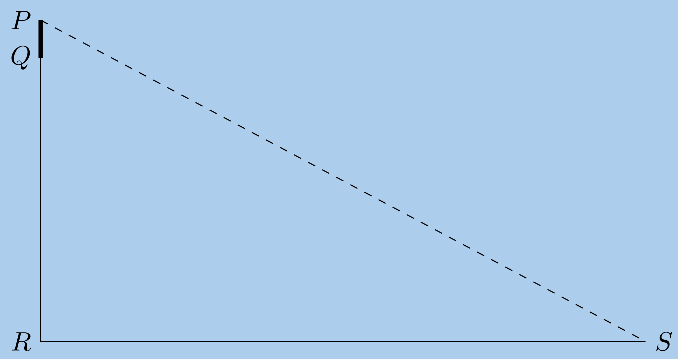
b) Vind die grootte van hoek x, korrek tot een desimale plek.
Oplossing:

$$\cos x = \frac{6{,}2}{11{,}21}$$
$$\therefore x = 56{,}4°$$

20. Vanaf (S), 'n boot op die see, is die hoogtehoek na die bopunt van 'n vuurtoring PQ op 'n rots, QR, 27°. Die vuurtoring is 10 m hoog en die rotspunt is 75 m bokant seevlak. Hoe ver is die boot vanaf die basis van die rots, tot die naaste meter?

Oplossing:

Teken 'n skets:



Die afstand PR is gelyk aan die hoogte van die vuurtoring, PQ, plus die hoogte van die kranse, QR.

$$\frac{85}{RS} = \tan 27°$$
$$\frac{85}{\tan 27°} = RS$$
$$\therefore RS = 167 \text{ m}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KBN	2. 2KBP	3. 2KBQ	4. 2KBR	5. 2KBS	6. 2KBT
7. 2KBV	8. 2KBW	9. 2KBX	10. 2KBY	11. 2KBZ	12. 2KC2
13. 2KC3	14. 2KC4	15. 2KC5	16. 2KC6	17. 2KC7	18. 2KC8
19. 2KC9	20. 2KCB				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 12

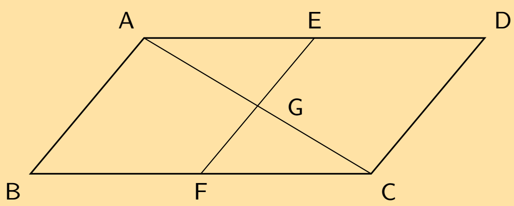
Euklidiese meetkunde

- Hierdie hoofstuk fokus op die oplos van probleme in Euklidiese meetkunde en die bewys van meetkunde probleemsomme.
- Dit moet verduidelik word dat 'n enkele teen-voorbeeld 'n vermoede kan weerlê maar 'n aantal spesifieke voorbeelde wat 'n vermoede ondersteun, nog nie 'n algemene bewys bevestig nie.
- Om te bewys dat 'n vierhoek een van die spesiale vierhoeke is, moet leerders leer om te toon dat 'n unieke eienskap van daardie vierhoek waar is. Byvoorbeeld, om te bewys 'n vierhoek is 'n parallelogram, is dit nie genoeg om te wys dat beide pare sye ewewydig is nie, leerders moet ook wys dat of die teenoorstaande hoeke ewe groot is of dat beide pare teenoorstaande sye ewe lank is.

12.1 Bewyse en vermoedens

Exercise 12 – 1:

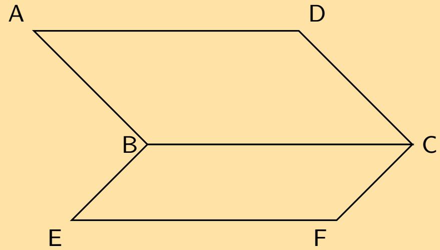
1. In die diagram hieronder, halveer AC en EF mekaar by G. E is die middelpunt van AD, en F is die middelpunt van BC.
   a) Bewys $AECF$ is 'n parallelogram.



   Oplossing:
   AC en EF halveer mekaar (gegee).
   $AECF$ is 'n parallelogram (hoeklyne halveer mekaar).

   b) Bewys $ABCD$ is 'n parallelogram.
   Oplossing:
   $AD \parallel BC (AE \parallel CF,\ AECF$ is 'n parallelogram)
   $AD = 2AE$ (middelpunt, gegee)
   $CF = AE$ ($AECF$ is 'n parallelogram)
   $\therefore AD = 2AE = 2CF = BC$
   $ABCD$ is 'n parallelogram (een paar teenoorstaande sye is ewewydig en gelyk)

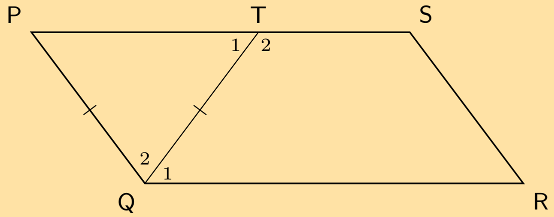
2. Parallelogram $ABCD$ en $BEFC$ word hieronder getoon. Bewys $AD = EF$.



   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
AD &= BC \text{ (teenoorst. sye van parm)}\\
BC &= EF \text{ (teenoorst. sye van parm)}\\
\therefore AD &= EF
\end{aligned}
$$

3. $PQRS$ is 'n parallelogram. $PQ = TQ$. Bewys $\hat{Q}_1 = \hat{R}$.

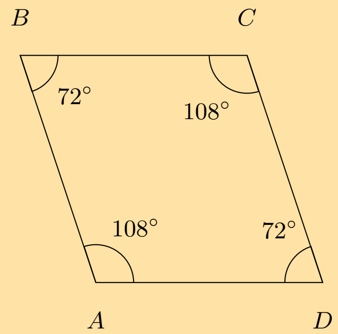


Oplossing:

$$\hat{P} = \hat{T}_1 (\angle\text{e teenoor gelyke sye})$$
$$\hat{T}_1 = \hat{Q}_1 (\text{verw } \angle\text{e; } (PS \parallel QR))$$
$$\hat{P} = \hat{Q}_1$$

$$\hat{P} = \hat{R} \text{ (teenoorst. hoeke van parm)}$$
$$\therefore \hat{Q}_1 = \hat{R}$$

4. Bestudeer die vierhoek $ABCD$ met teenoorstaande hoeke $\hat{A} = \hat{C} = 108°$ en hoeke $\hat{B} = \hat{D} = 72°$ noukeurig. Vul die ontbrekende redes en stappe in om te bewys dat vierhoek $ABCD$ 'n parallelogram is.

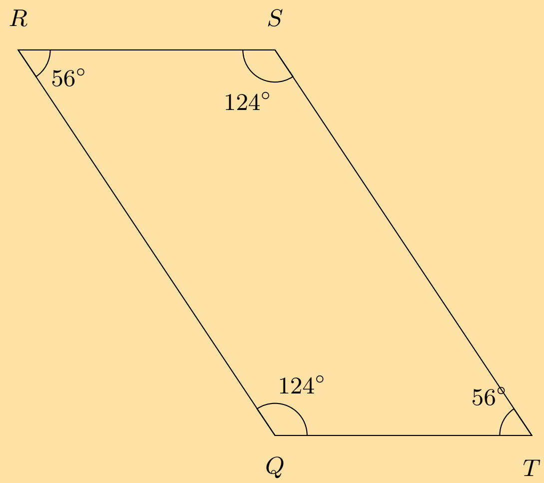


Stappe	Rede
?	gegee beide $\angle$'e $= 108°$
$A\hat{B}C = A\hat{D}C$	gegee beide$\angle$'e $= 72°$
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$	$\angle$e van vierhoek
$B\hat{A}D + A\hat{D}C = 180°$	gegee $108° + 72° = 180°$
$\therefore AB \parallel DC$	?
$\therefore BC \parallel AD$	?
$\therefore ABCD$ is 'n parallelogram	beide pare teenoorst. sye $\parallel$

Oplossing:
Hier is die voltooide bewys met die korrekte stappe en redes.

Stappe	Rede
$B\hat{A}D = B\hat{C}D$	gegee beide $\angle$'e $= 108°$
$A\hat{B}C = A\hat{D}C$	gegee beide $\angle$'e $= 72°$
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$	$\angle$e van vierhoek
$B\hat{A}D + A\hat{D}C = 180°$	gegee $108° + 72° = 180°$
$\therefore AB \parallel DC$	ko-binne $\angle$e; $AB \parallel DC$
$\therefore BC \parallel AD$	ko-binne $\angle$e; $BC \parallel AD$
$\therefore ABCD$ is 'n parallelogram	beide pare teenoorst. sye $\parallel$

5. Bestudeer die vierhoek $QRST$ met teenoorstaande hoeke $Q = S = 124°$ en hoeke $R = T = 56°$ noukeurig. Vul die ontbrekende redes en stappe in om te bewys dat vierhoek $QRST$ 'n parallelogram is.



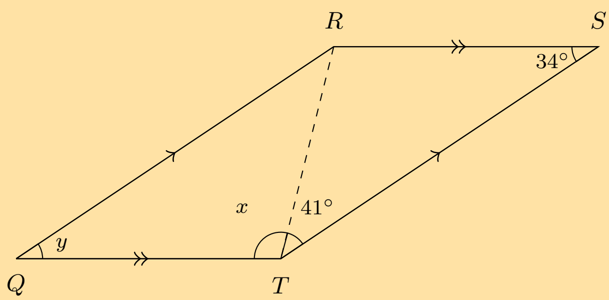
Stappe	Rede
$R\hat{Q}T = R\hat{S}T$	gegee beide $\angle$e $= 124°$
?	gegee beide $\angle$e $= 56°$
$\hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} + \hat{T} = 360°$	?
$R\hat{Q}T + Q\hat{T}S = 180°$	?
$\therefore QR \parallel TS$	ko-binne hoeke; $QR \parallel TS$
$\therefore RS \parallel QT$	ko-binne hoeke; $RS \parallel QT$
?	beide pare teenoorst. sye $\parallel$

Oplossing:

Hier is die voltooide bewys met die korrekte stappe en redes.

Stappe	Rede
$R\hat{Q}T = R\hat{S}T$	gegee beide $\angle$e $= 124°$
$Q\hat{R}S = Q\hat{T}S$	gegee beide $\angle$e $= 56°$
$\hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} + \hat{T} = 360°$	$\angle$e van 'n vierhoek
$R\hat{Q}T + Q\hat{T}S = 180°$	gegee $124° + 56° = 180°$
$\therefore QR \parallel TS$	ko-binne hoeke; $QR \parallel TS$
$\therefore RS \parallel QT$	ko-binne hoeke; $RS \parallel QT$
$\therefore QRST$ is 'n parallelogram	beide pare teenoorst. sye $\parallel$

6. a) Vierhoek $QRST$ met sye $QR \parallel TS$ en $QT \parallel RS$ word gegee. Dit word ook gegee dat: $\hat{Q} = y$ en $\hat{S} = 34°$; $Q\hat{T}R = x$ en $R\hat{T}S = 41°$. Bewys $QRST$ is 'n parallelogram.



Oplossing:

Stappe	Rede
$Q\hat{T}R = T\hat{R}S$	verw $\angle$e; $QT \parallel RS$
$S\hat{T}R = Q\hat{R}T$	verw $\angle$e; $QR \parallel TS$
In$\triangle QRT$ en $\triangle RST$ sy $RT = RT$	gemene sy
$\therefore \triangle QRT \equiv \triangle STR$	kongruente (HHS)
$\hat{Q} = \hat{S}$	kongruente driehoeke (HHS)
$QR = TS$ en $RS = QT$	kongruente driehoeke (HHS)
$\therefore QRST$ is 'n parallelogram	beide pare teenoorst sye gelyke

b) Vind die waarde van y.

Oplossing:

$QRST$ is 'n parallelogram (hierbo bewys).

$\hat{Q} = \hat{S}$ en $\hat{R} = \hat{T}$ (teenoorstaande $\angle$e van parm gelyk).

Dus, $y = 34°$.

c) Vind die waarde van x.

Oplossing:

Ons kan hierdie probleem op twee maniere oplos: gebruik die som van die hoeke in 'n driehoek of gebruik die som van die binnehoeke in 'n vierhoek.

Opsie 1: som van die hoeke van 'n driehoek.

$\hat{Q} + Q\hat{R}T + Q\hat{T}R = 180°$ ($\angle$e van $\triangle$).

Ons weet dat $\hat{Q} = \hat{S} = 34°$ en dat $R\hat{T}S = 41°$.

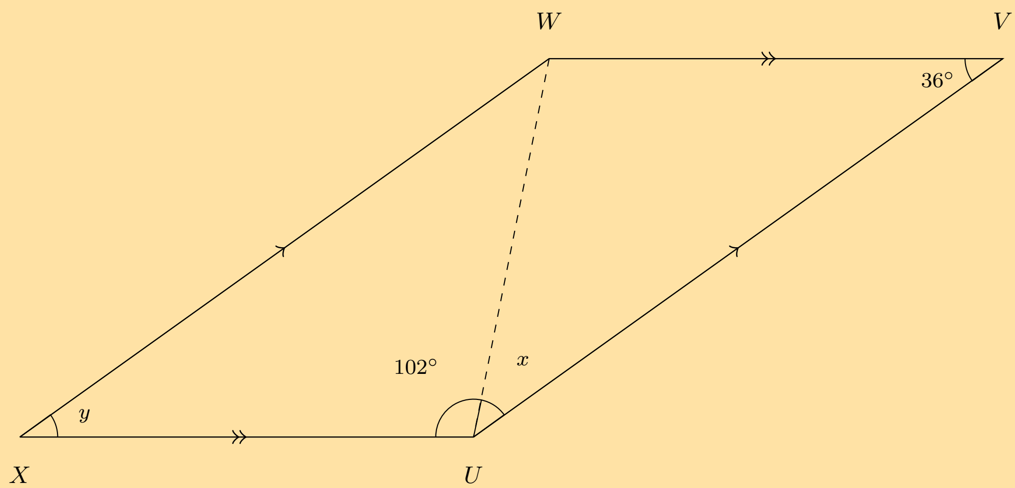
$\therefore x = 180° - 34° - 41° = 105°$.

Opsie 2: som van die hoeke in 'n vierhoek.

Die som van die binne $\angle$'e in 'n vierhoek is $360°$.

$$\begin{aligned}
\therefore \hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} + \hat{T} &= 360° \quad (\angle\text{e van vierhoek}) \\
34° + 34° + \hat{R} + \hat{T} &= 360° \\
\hat{R} &= \hat{T} \quad \text{teenoor } \angle\text{e van parm} \\
68° + 2\hat{R} &= 360° \\
\hat{R} &= \frac{292}{2} \\
&= 146° \\
x &= 146° - 41° = 105°
\end{aligned}$$

7. a) Vierhoek $XWVU$ met sye $XW \parallel UV$ en $XU \parallel WV$ is gegee. Dit is ook gegee dat $\hat{X} = y$ en $\hat{V} = 36°$; $X\hat{U}W = 102°$ en $W\hat{U}V = x$. Bewys $XWVU$ is 'n parallelogram.



Oplossing:

Stappe	Rede
$X\hat{U}W = U\hat{W}V$	verw $\angle$e; $XU \parallel WV$
$V\hat{U}W = X\hat{W}U$	verw $\angle$e; $XW \parallel UV$
In$\triangle XWU$ en $\triangle WVU$ sy $WU = WU$	gemene sy
$\therefore \triangle XWU \equiv \triangle VUW$	kongruente (HHS)
$\therefore XW = UV$ en $XU = WV$	kongruente driehoeke (HHS)
$\hat{X} = \hat{V}$	kongruente driehoeke (HHS)
$\therefore XWVU$is 'n parallelogram	beide pare teenoorst sye gelyk

b) Bepaal die waarde van y.

Oplossing:

$XWVU$ is 'n parallelogram, $\therefore \hat{X} = \hat{V}$.

Teenoorstaande $\angle$'e van 'n parallelogram is ewe groot: $\hat{X} = \hat{V}$ en $\hat{W} = \hat{U}$.

Dus, $y = 36°$.

c) Bepaal die waarde van x.

Oplossing:

Ons kan hierdie probleem op twee maniere oplos: deur die gebruik van die som van die hoeke in 'n driehoek of deur die gebruik van die som van die binnehoeke van 'n vierhoek.

Opsie 1: som van die hoeke van 'n driehoek.

$\angle$'e in 'n $\triangle = 180°$

$\therefore \hat{X} + X\hat{W}U + X\hat{U}W = 180°$

Nou weet ons dat $\hat{X} = \hat{V} = 36°$ en dat $X\hat{U}W = 42°$.

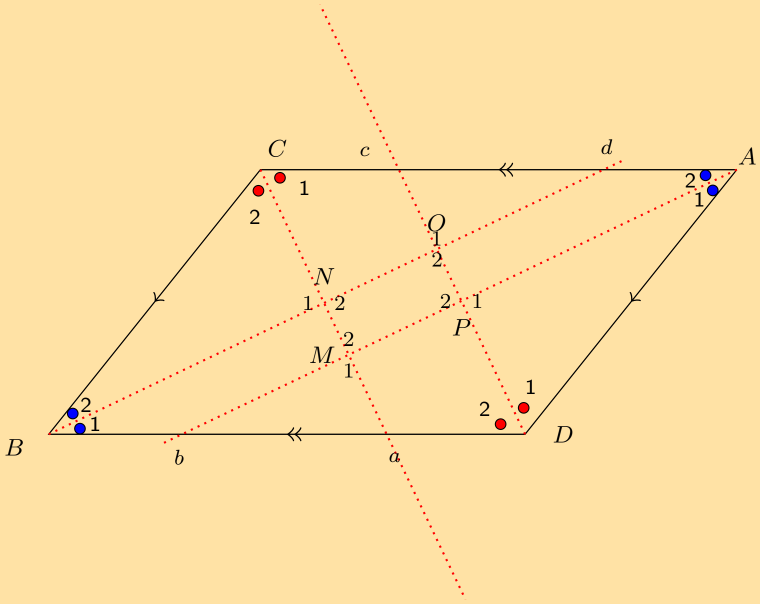
$\therefore \hat{x} = 180° - 36° - 102° = 42°$.

Opsie 2: som van die binnehoeke in 'n vierhoek.

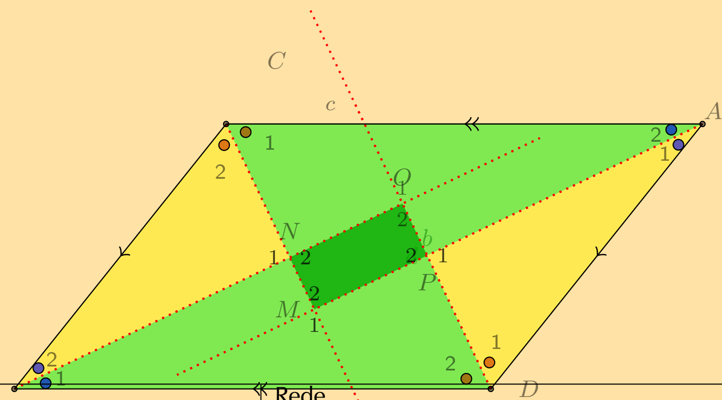
Die som van die binne $\angle$'e in 'n vierhoek is $360°$.

$$
\begin{aligned}
\therefore \hat{X} + \hat{W} + \hat{V} + \hat{U} &= 360° \quad (\angle\text{e van vierhoek}) \\
36° + 36° + \hat{U} + \hat{W} &= 360° \\
\hat{U} &= \hat{W} \quad \text{teenoor } \angle\text{e van parm} \\
72° + 2\hat{U} &= 360° \\
\hat{U} &= \frac{298}{2} \\
&= 149° \\
x &= 149° - 102° = 42°
\end{aligned}
$$

8. In parallelogram $ADBC$, is die halveerlyne van die hoeke (A, D, B, C) gekonstrueer en dit is aangedui met die rooi lyne hieronder. Dit word ook gegee: $AD = CB$, $DB = AC$, $AD \parallel CB$, $DB \parallel AC$, $\hat{A} = \hat{B}$ en $\hat{D} = \hat{C}$.
   Bewys vierhoek $MNOP$ is 'n parallelogram.
   Let op dat die diagram op skaal geteken is.

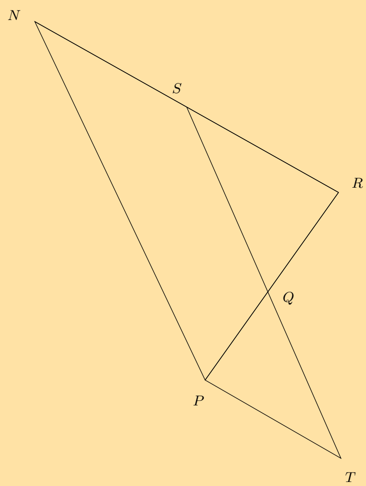


Oplossing:



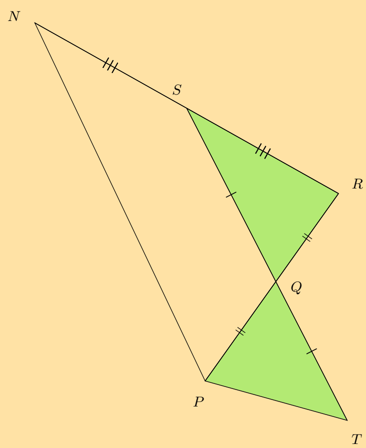
Stappe	Rede
In $\triangle AMC$ en $\triangle BOD \hat{D}_2 = \hat{C}_1$	(gegee)
In $\triangle AMC$ en $\triangle DOB \hat{A}_2 = \hat{B}_1$	(gegee)
In $\triangle AMC$ en $\triangle DOB$ sy $AC = DB$	(gegee)
$\therefore \triangle AMC \equiv \triangle DOB$	(HHS)
$\therefore \hat{M}_2 = \hat{O}_2$	ooreenstemmende $\angle$e bewys deur $\triangle AMC \equiv \triangle DOB$
In $\triangle ADP$ en $\triangle CBN \hat{A}_1 = \hat{B}_2$	(gegee)
In $\triangle ADP$ en $\triangle CBN \hat{D}_1 = \hat{C}_2$	(gegee)
In $\triangle ADP$ en $\triangle CBN$ sye $AD = CB$	(gegee)
$\therefore \triangle ADP \equiv \triangle CBN$	(HHS)
$\therefore \hat{P}_1 = \hat{N}_1$	ooreenstemmende $\angle$e bewys deur $\triangle ADP \equiv \triangle CBN$
maar $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ en $\hat{N}_1 = \hat{N}_2$	regoorst. $\angle$'e
$\therefore MNOP$ is 'n parallelogram	(teenorst $\angle$e gelyk)

9. Bestudeer die diagram hieronder; dit is nie noodwendig op skaal geteken nie. Twee driehoeke in die figuur is kongruent: $\triangle QRS \equiv \triangle QPT$. Verder is $SN = SR$. Jy moet bewys dat $NPTS$ 'n parallelogram is.



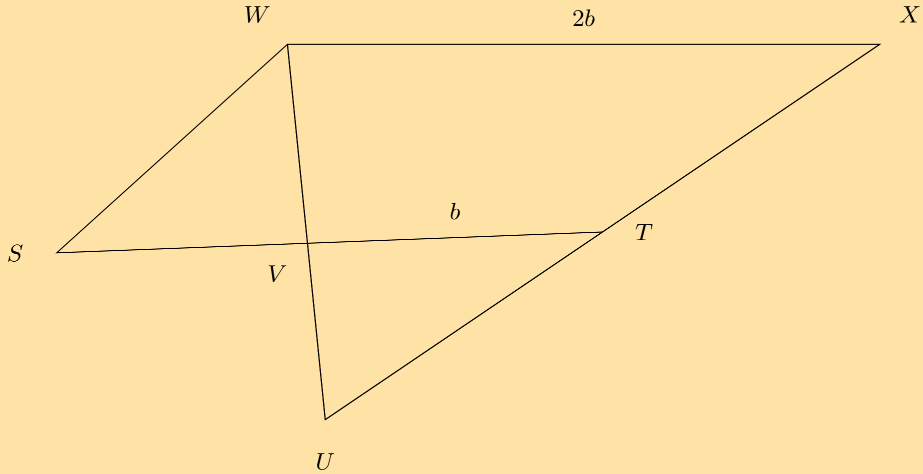
Oplossing:

Teken die diagram oor en merk al die gegewe en bekende inligting daarop:

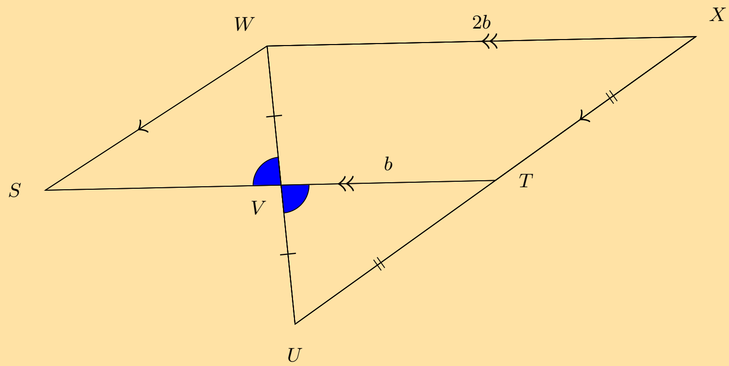


Stappe	Rede
$QR = PQ$	ooreenstemmende sye van kongruente driehoeke
Q is die middelpt van PR	Midpt.-stelling
$S$is 'n middelpt	gegee $SN = SR$
$ST \parallel NP$	Midpt.-stelling
$R\hat{S}Q = P\hat{T}Q$	ooreenstemmende $\angle$'e in kongruente driehoeke
$NR \parallel PT$	verw $\angle$e gelyk
$NPTS$ is 'n parallelogram	teenoorst. sye ewewydig

10. Bestudeer die diagram hieronder; dit is nie noodwendig op skaal geteken nie. Vierhoek $XWST$ is 'n parallelogram en TV en XW het lengtes b en $2b$ onderskeidelik, soos getoon. Jy moet bewys dat $\triangle TVU \equiv \triangle SVW$.



Oplossing:
Teken die diagram oor en vul al die gegewe en bekende inligting in.



T en V is middelpunte

Stappe	Rede
$WV = VU$	definisie van middelpt
$T\hat{V}U = S\hat{V}W$	regoorst $\angle$e
$TV + VS = XW$	teenoorst sye parm is gelyk
$b + VS = 2b$	stel gegewe waardes in: $TV = b$ en $XW = 2b$
$VS = b = VT$	los op vir VS; let op dat $VS = VT$
$\triangle TVU \equiv \triangle SVW$	SHS

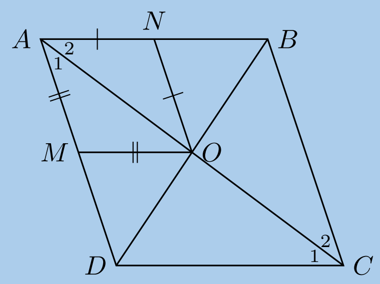
Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KCF 2. 2KCG 3. 2KCH 4. 2KCJ 5. 2KCK 6. 2KCM
7. 2KCN 8. 2KCP 9. 2KCQ 10. 2KCR

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

End of chapter Exercise 12 – 2:

1. $ABCD$ is 'n ruit met $AM = MO$ en $AN = NO$. Bewys $ANOM$ is ook 'n ruit.



Oplossing:

In $\triangle AMO$ en $\triangle ANO$

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (gegee ruit $ABCD$, hoeklyn AC halveer $\hat{A}$)

$\therefore \hat{A}_1 = A\hat{O}M$ ($\angle$e teenoor gelyke sye)

net so $\hat{A}_2 = A\hat{O}N$

$\therefore \hat{A}_2 = A\hat{O}M$ en $\hat{A}_1 = A\hat{O}N$

maar hierdie is verwisselende $\angle$e

$\therefore AN \parallel MO$ en $AM \parallel NO$

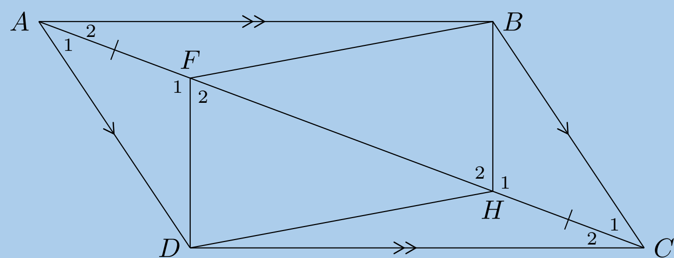
$\therefore ANOM$ is 'n parallelogram

$\therefore AM = NO$ (teenoorstaande sye van parm gelyk)

$\therefore AM = MO = ON = NO$

$\therefore ANOM$ is 'n ruit (alle sye gelyk en twee pare sye ewewydig)

2. $ABCD$ is 'n parallelogram met hoeklyn AC. Gegewe dat $AF = HC$, toon dat:



a) $\triangle AFD \equiv \triangle CHB$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \hat{C}_1 && \text{(verw } \angle\text{e; } AD \parallel BC\text{)} \\ AD &= BC && \text{(teenoorst sye van parm)} \\ AF &= HC && \text{(gegee)} \\ \therefore \triangle AFD &\equiv \triangle CHB && \text{(SHS)} \end{aligned}$$

b) $DF \parallel HB$

Oplossing:

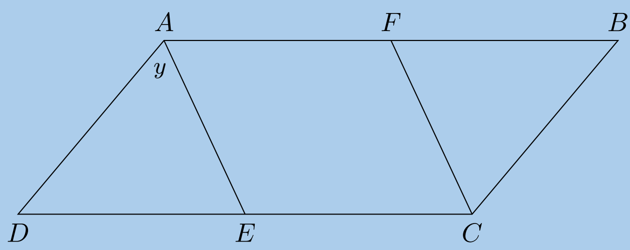
$$\hat{F}_1 = \hat{H}_1 \qquad (\triangle AFD \equiv \triangle CHB)$$
$$\therefore \hat{F}_1 + \hat{F}_2 = 180° \qquad (\angle\text{e op reguitlyn})$$
$$\text{en } \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180° \qquad (\angle\text{e op reguitlyn})$$
$$\therefore \hat{F}_1 = 180° - \hat{F}_2$$
$$\text{en } \hat{H}_1 = 180° - \hat{H}_2$$
$$\therefore 180° - \hat{F}_2 = 180° - \hat{H}_2$$
$$\therefore \hat{F}_2 = \hat{H}_2$$
$$\therefore DF \parallel HB \qquad (\text{verw } \angle\text{e gelyk})$$

c) $DFBH$ is 'n parallelogram

Oplossing:

$$FD = HB \qquad (\triangle AFD \equiv \triangle CHB)$$
$$\text{en } DF \parallel HB \qquad (\text{bewys hierbo})$$
$$\therefore DFBH \text{ is 'n parallelogram (een paar teenoorst sye gelyk en ewewydig)}$$

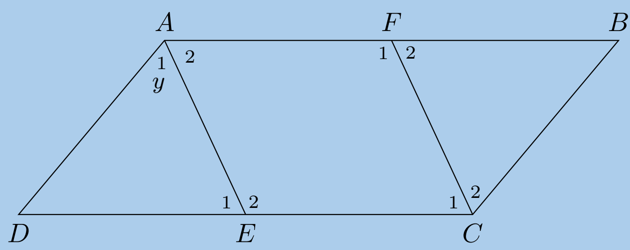
3. Gegewe parallelogram $ABCD$ met AE wat $\hat{A}$ halveer en FC wat $\hat{C}$ halveer.



a) Skryf alle binnehoeke in terme van y.

Oplossing:

Benoem eers die hoeke:



$$\hat{A}_2 = y \qquad (\text{gegee dat } AE \text{ halveer } \hat{A})$$
$$\hat{E}_1 = y \qquad (\text{verw } \angle\text{e; } AB \parallel DC)$$
$$\therefore \hat{E}_2 = 180° - y \qquad (\angle\text{e op reguitlyn})$$

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 \qquad (\text{gegee dat } FC \text{ halveer } \hat{C})$$
$$\text{and } \hat{A} = \hat{C} \qquad (\text{tenoorst } \angle\text{e parm})$$
$$\therefore \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = y$$

$$\therefore \hat{F}_2 = \hat{C}_1 = y \qquad (\text{verw } \angle\text{e; } AB \parallel DC)$$
$$\therefore \hat{F}_1 = 180° - y$$

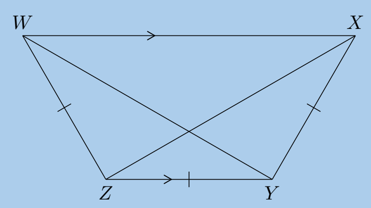
$$\begin{aligned}
&\text{In } \triangle ADE \\
\hat{D} + \hat{A}_1 + \hat{E}_1 &= 180^\circ \qquad (\angle\text{e van } \triangle) \\
\therefore \hat{D} + y + y &= 180^\circ \\
\hat{D} &= 180^\circ - 2y \\
&= 90^\circ - y \\
\therefore \hat{B} &= 90^\circ - y \qquad (\text{teenoorst } \angle\text{e parm})
\end{aligned}$$

b) Bewys dat $AFCE$ 'n parallelogram is.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
AF &\parallel EC \qquad (\text{teenoorst sye van parm }) \\
\text{en } \hat{C}_1 + \hat{E}_2 &= y + (180^\circ - y) \\
&\therefore \text{ die som van die ko-binne hoeke is } 180^\circ \\
\therefore AE &\parallel FC \\
\therefore AFCE &\text{ is 'n parallelogram (beide pare teenoorst sye ewewydig)}
\end{aligned}$$

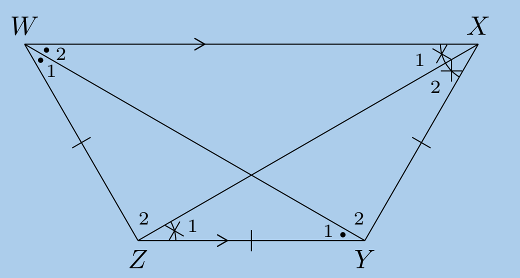
4. Gegewe dat $WZ = ZY = YX$, $\hat{W} = \hat{X}$ en $WX \parallel ZY$, bewys dat:



a) XZ halveer $\hat{X}$

Oplossing:

Benoem eers die hoeke:



$$\begin{aligned}
&\text{In } \triangle XYZ \\
&\hat{X}_2 = \hat{Z}_2 \ (\angle\text{e teenoor gelyke sye}) \\
\text{en } &\hat{X}_1 = \hat{Z}_2 \ (\text{verw } \angle\text{e; } WX \parallel ZY) \\
\therefore\ &\hat{X}_1 = \hat{X}_2 \\
\therefore\ &XZ \text{ halveer } \hat{X}
\end{aligned}$$

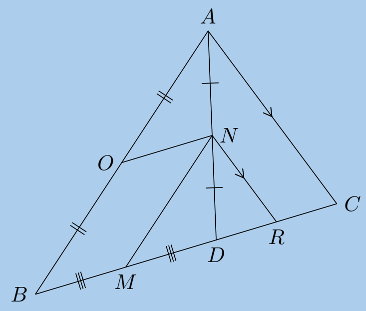
b) $WY = XZ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\text{Net so, } WY \text{ halveer } \hat{W} \\
&\therefore \hat{W}_1 = \hat{W}_2 \\
&\text{en } \hat{W} = \hat{X} \text{ (gegee)} \\
&\therefore \hat{W}_1 = \hat{W}_2 = \hat{X}_1 = \hat{X}_2 \\
&\text{en } \hat{W}_1 = \hat{Y}_1 \ (\angle\text{e teenoor gelyke sye})
\end{aligned}$$

In $\triangle WZY$ en $\triangle XYZ$
$WZ = XY$ (gegee)
ZY is 'n gemene sy
$\hat{Z} = \hat{Y}$(derde $\angle$ in $\triangle$)
$\therefore \triangle WZY \equiv \triangle XYZ$ (SHS)
$\therefore WY = XZ$

5. D is 'n punt op BC, in $\triangle ABC$. N is die middelpunt van AD. O is die middelpunt van AB en M is die middelpunt van BD. $NR \parallel AC$.



a) Bewys dat $OBMN$ 'n parallelogram is.

Oplossing:

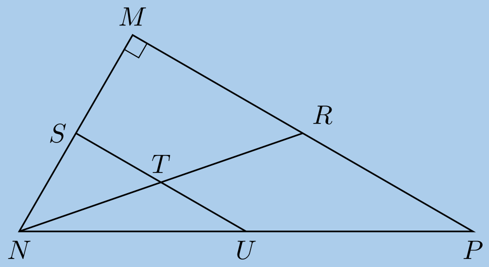
$AO = OB$ (gegee)
$AN = ND$ (gegee)
$\therefore ON \parallel BD$ (Midpt.-stelling)
$BM = MD$ (gegee)
$AN = ND$ (gegee)
$\therefore MN \parallel AB$ (Midpt.-stelling)
$\therefore OBMN$ is 'n parallelogram (beide pare teenoorstaande sye ewewydig)

b) Bewys dat $BC = 2MR$.

Oplossing:

$AN = NC$ (gegee)
$NR \parallel AC$ (gegee)
$\therefore DR = RC$ (Midpt.-stelling)
$\therefore DR = \frac{1}{2}DC$
$MD = \frac{1}{2}BD$ (gegee)
$\therefore MD + DR = \frac{1}{2}(BD + DC)$
$MR = \frac{1}{2}BC$
$\therefore BC = 2MR$

6. In $\triangle MNP$, $\hat{M} = 90°$, S is die middelpunt van MN en T is die middelpunt van NR.



a) Bewys U is die middelpunt van NP.

Oplossing:

$NS = SM$ (gegee)
$NT = TR$ (gegee)
$\therefore ST \parallel MR$ (Midpt.-stelling)
$\therefore U$ is die middelpt van NP (omgekeerde van Midpt.-stelling)

b) As $ST = 4$ cm en die oppervlakte van $\triangle SNT$ is 6 cm^2, bereken die oppervlakte van $\triangle MNR$.

Oplossing:

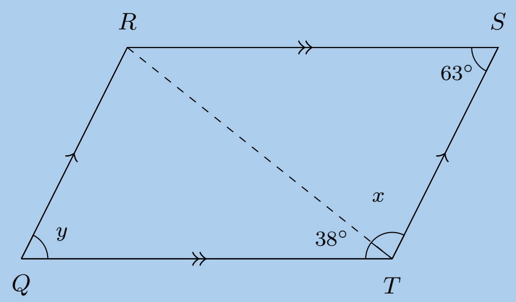
$$\begin{aligned}
N\hat{S}T &= 90° \text{ (ooreenk } \angle\text{e; } ST \parallel MR) \\
\therefore \text{ oppervlakte } \triangle SNT &= \frac{1}{2}ST \times SN \\
6 &= \frac{1}{2}(4)SN \\
\therefore SN &= 3 \text{ cm} \\
\therefore MN &= 6 \text{ cm} \\
MR &= 2ST = 8 \text{ cm} \\
\text{oppervlakte } \triangle MNR &= \frac{1}{2}MR \times MN \\
&= \frac{1}{2}(8)(6) \\
&= 24 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

c) Bewys dat die oppervlakte van $\triangle MNR$ altyd viermaal die oppervlakte van $\triangle SNT$ sal wees; laat $ST = x$ eenhede en $SN = y$ eenhede.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\text{Laat } STx \text{ eenhede wees} \\
&\therefore MR \text{ sal dan } 2x \text{ wees} \\
&\text{Laat } SNy \text{ eenhede wees} \\
&\therefore MN \text{ sal dan } 2y \text{ wees} \\
\text{oppervlakte } \triangle SNT &= \frac{1}{2}xy \\
\text{oppervlakte } \triangle MNR &= \frac{1}{2}(2x)(2y) \\
&= 2xy \\
\therefore \text{ oppervlakte } \triangle MNR &= 4\left(\frac{1}{2}xy\right) \\
&= 4(\text{oppervlakte } \triangle SNT)
\end{aligned}$$

7. a) Gegee vierhoek $QRST$ met sye $QR \parallel TS$ en $QT \parallel RS$. Ook gegee: $\hat{Q} = y$ en $\hat{S} = 63°$; $Q\hat{T}R = 38°$ en $R\hat{T}S = x$. Voltooi die bewys hieronder om te bewys dat $QRST$ 'n parallelogram is.



Stappe	Rede
$Q\hat{T}R = T\hat{R}S$	verw $\angle$e; $QT \parallel RS$
$S\hat{T}R = Q\hat{R}T$	verw $\angle$e; $QR \parallel TS$
?	?
$\therefore \triangle QRT \equiv \triangle STR$	(HHS)
?	kongruente driehoeke
$\hat{Q} = \hat{S}$	kongruente driehoeke
$\therefore QRST$ is 'n parallelogram	?

Oplossing:

Die voltooide bewys lyk so:

Stappe	Rede
$Q\hat{T}R = T\hat{R}S$	verw $\angle$e; $QT \parallel RS$
$S\hat{T}R = Q\hat{R}T$	verw $\angle$e; $QR \parallel TS$
In $\triangle QRT$ en $\triangle RST$ sy $RT = RT$	gemene sy
$\therefore \triangle QRT \equiv \triangle STR$	kongruente (HHS)
$\therefore QR = TS$ en $QT = RS$	kongruente driehoeke
$\hat{Q} = \hat{S}$	kongruente driehoeke
$\therefore QRST$ is 'n parallelogram	teenoorst. sye is gelyk

b) Bereken die waarde van y.

Oplossing:

$QRST$ is 'n parallelogram, $\therefore \hat{Q} = \hat{S}$.

Teenoorstaande $\angle$'e van 'n parallelogram is gelyk. $\hat{Q} = \hat{S}$ en $\hat{R} = \hat{T}$.

Dus, $y = 63°$.

c) Bereken die waarde van x.

Oplossing:

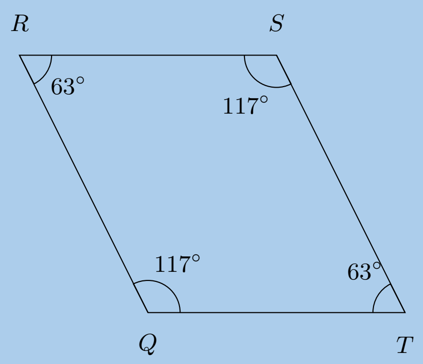
$\angle$e in 'n $\triangle = 180°$

$\therefore \hat{Q} + Q\hat{R}T + Q\hat{T}R = 180°$

Nou weet ons dat $\hat{Q} = \hat{S} = 63°$ en dat $R\hat{T}S = 79°$.

$\therefore \hat{x} = 180° - 63° - 79° = 79°$.

8. Bestudeer die vierhoek $QRST$ met teenoorstaande hoeke $\hat{Q} = \hat{S} = 117°$ en hoeke $\hat{R} = \hat{T} = 63°$ noukeurig. Vul die korrekte redes of stappe in om te bewys vierhoek $QRST$ is 'n parallelogram.

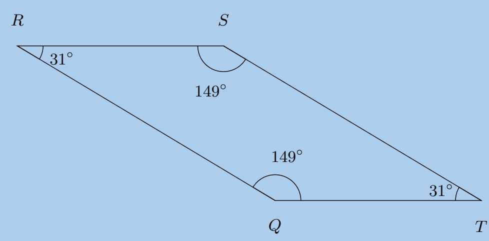


Stappe	Rede
?	gegee beide $\angle$e $= 117°$
$Q\hat{R}S = Q\hat{T}S$	gegee beide $\angle$e $= 63°$
?	$\angle$e van vierhoek
$R\hat{Q}T + Q\hat{T}S = 180°$	$117° + 63° = 180°$
$\therefore QR \parallel TS$	ko-binne $\angle$e; $QR \parallel TS$
$\therefore RS \parallel QT$	?
$\therefore QRST$ is 'n parallelogram	?

Oplossing:

Stappe	Rede
$R\hat{Q}T = R\hat{S}T$	gegee beide $\angle$e $= 117°$
$Q\hat{R}S = Q\hat{T}S$	gegee beide $\angle$e $= 63°$
$\hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} + \hat{T} = 360°$	$\angle$e van vierhoek
$R\hat{Q}T + Q\hat{T}S = 180°$	$117° + 63° = 180°$
$\therefore QR \parallel TS$	ko-binne $\angle$e; $QR \parallel TS$
$\therefore RS \parallel QT$	ko-binne $\angle$e; $RS \parallel QT$
$\therefore QRST$ is 'n parallelogram	teenoorst. sye ewewydig

9. Bestudeer die vierhoek $QRST$ met $\hat{Q} = \hat{S} = 149°$ en $\hat{R} = \hat{T} = 31°$ noukeurig. Vul die korrekte redes of die stappe in om te bewys vierhoek $QRST$ is 'n parallelogram.

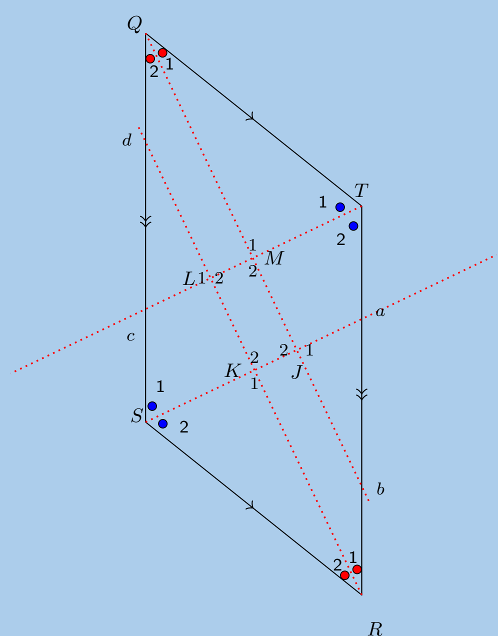


Stappe	Rede
$R\hat{Q}T = R\hat{S}T$	gegee beide $\angle$e $= 149^\circ$
$Q\hat{R}S = Q\hat{T}S$	?
$\hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} + \hat{T} = 360^\circ$	$\angle$e van vierhoek
$R\hat{Q}T + Q\hat{T}S = 180^\circ$	?
?	ko-binne $\angle$e; $QR \parallel TS$
?	ko-binne $\angle$e; $RS \parallel QT$
$\therefore QRST$ is 'n parallelogram	teenoorst. sye ewewydig

Oplossing:

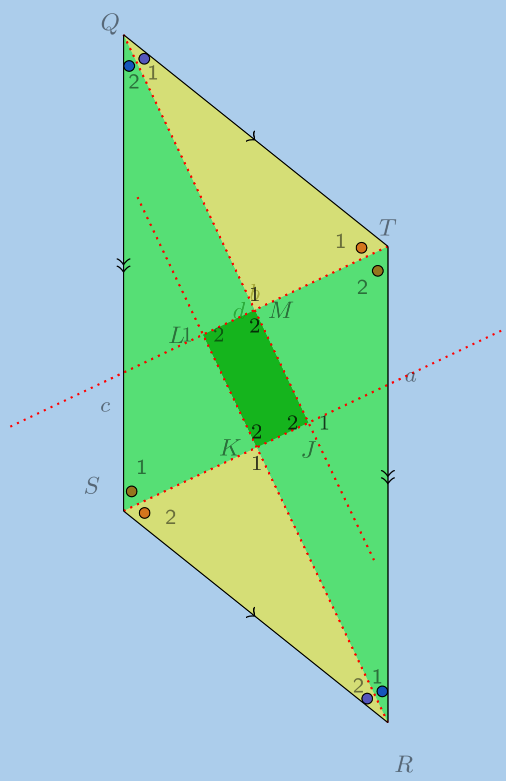
Stappe	Rede
$R\hat{Q}T = R\hat{S}T$	gegee beide $\angle$e $= 149^\circ$
$Q\hat{R}S = Q\hat{T}S$	gegee beide $\angle$e $= 31^\circ$
$\hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} + \hat{T} = 360^\circ$	$\angle$e van vierhoek
$R\hat{Q}T + Q\hat{T}S = 180^\circ$	$149^\circ + 31^\circ = 180^\circ$
$\therefore QR \parallel TS$	ko-binne $\angle$e; $QR \parallel TS$
$\therefore RS \parallel QT$	ko-binne $\angle$e; $RS \parallel QT$
$\therefore QRST$ is 'n parallelogram	beide pare teenoorst. sye ewewydig

10. In parallelogram $QTRS$ is die halveerlyne van die hoeke gekonstrueer en dit word aangedui met die rooi lyne hieronder. Jy word ook $QT = SR$, $TR = QS$, $QT \parallel SR$, $TR \parallel QS$, $\hat{Q} = \hat{R}$ en $\hat{T} = \hat{S}$ gegee.
    Bewys vierhoek $JKLM$ is 'n parallelogram.
    Let op dat die diagram op skaal geteken is.



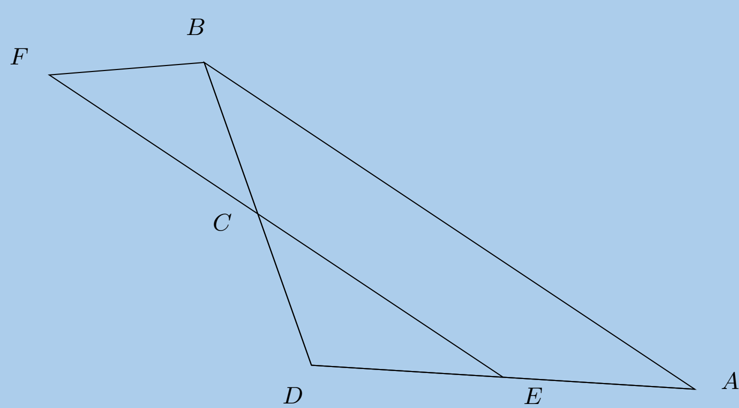
Oplossing:

Teken die diagram oor en merk al die bekende inligting:



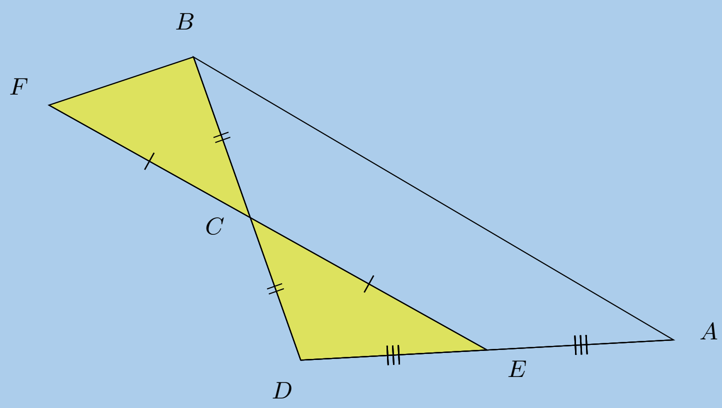
Stappe	Rede
In $\triangle QJS$ en $\triangle RLT$	
$\hat{T}_2 = \hat{S}_1$	(gegee)
$\hat{Q}_2 = \hat{R}_1$	(gegee)
$QS = TR$	(gegee)
$\therefore \triangle QJS \equiv \triangle TLR$	(HHS)
$\therefore \hat{J}_2 = \hat{L}_2$	ooreenstemmende $\angle$'e bewys deur $\triangle QJS \equiv \triangle TLR$
In $\triangle QTM$ en $\triangle SRK$	
$\hat{Q}_1 = \hat{R}_2$	(gegee)
$\hat{T}_1 = \hat{S}_2$	(gegee)
$QT = SR$	(gegee)
$\therefore \triangle QTM \equiv \triangle SRK$	(HHS)
$\therefore \hat{M}_1 = \hat{K}_1$	ooreenstemmende $\angle$'e bewys deur $\triangle QTM \equiv \triangle SRK$
maar $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ en $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$	regoorst $\angle$e
$\therefore JKLM$ is 'n parallelogram	(teenoorst $\angle$e is gelyk)

11. Bestudeer die diagram hieronder; dit is nie noodwendig op skaal geteken nie. Twee driehoeke in die figuur is kongruent: $\triangle CDE \equiv \triangle CBF$. Verder is $EA = ED$. Jy moet bewys dat $ABFE$ 'n parallelogram is.



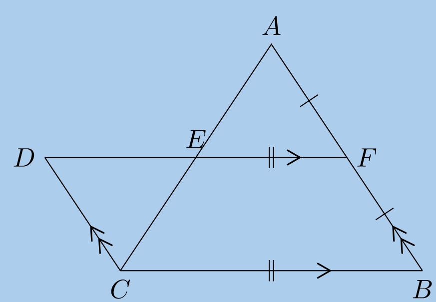
Oplossing:

Teken die diagram en merk al die bekende en gegewe inligting:



Stappe	Rede
$CD = BC$	ooreenstemmende sye van kongruente driehoeke
C is die middelpt van BD	definisie van middelpt
$E$is 'n middelpt	gegee: $EA = ED$
$EF \parallel AB$	Midpt.-stelling
$D\hat{E}C = B\hat{F}C$	ooreenstemmende$\angle$e in kongruente driehoeke
$AD \parallel BF$	verw $\angle$e gelyk
$ABFE$ is 'n parallelogram	beide pare teenoorst sye ewewydig

12. Gegee die volgende diagram:



a) Toon dat $BCDF$ 'n parallelogram is.

Oplossing:

$$DF \parallel CB \text{ (gegee)}$$
$$DC \parallel FB \text{ (gegee)}$$
$$\therefore BCDF \text{ is 'n parallelogram (beide pare teenoorst. sye } \parallel \text{)}$$

b) Toon dat $ADCF$ 'n parallelogram is.

Oplossing:

In $\triangle DEC$ en $\triangle FEA$

$$C\hat{A}F = A\hat{C}D \text{ (verw } \angle\text{e; } AB \parallel DC\text{)}$$
$$A\hat{F}D = C\hat{D}F \text{ (verw } \angle\text{e; } AB \parallel DC\text{)}$$
$$DC = FB \text{ (teenoorst sye van parm)}$$
$$\therefore DC = FA = FB$$
$$\therefore \triangle DEC \equiv \triangle FEA \text{ (HSH)}$$
$$\therefore DE = EF \text{ en } CE = EA$$

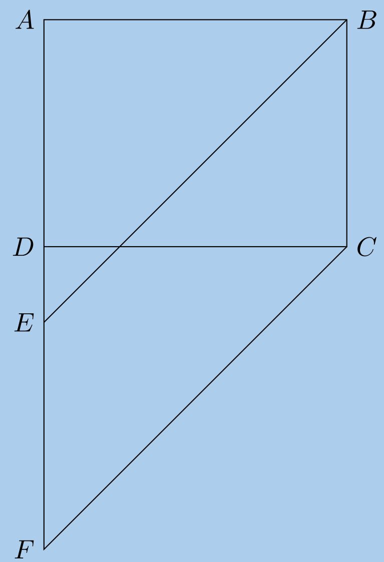
Maar AE en DF is hoeklyne van $ADCF$, $\therefore ADCF$ is 'n parallelogram (hoeklyne halveer mekaar).

c) Bewys dat $AE = EC$.

Oplossing:

$AE = EC$ (hierbo bewys).

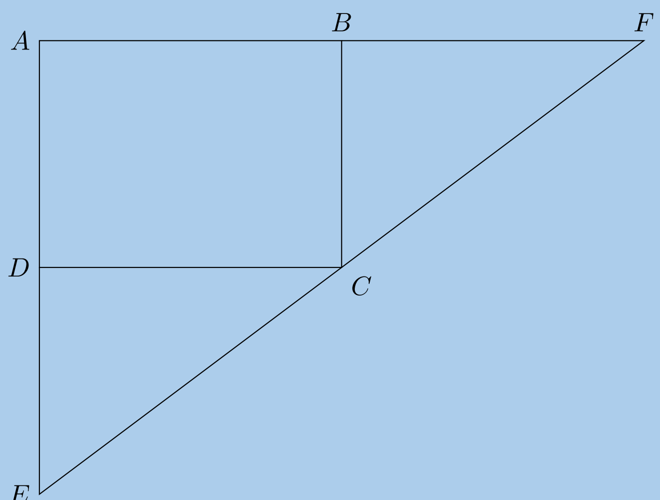
13. $ABCD$ is 'n parallelogram. $BEFC$ is 'n parallelogram. $ADEF$ is 'n reguitlyn. Bewys dat $AE = DF$.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
BC &= EF \text{ (teenoorst sye van parm)}\\
BC &= AD \text{ (teenoorst sye van parm)}\\
\therefore EF &= ED\\
AD + DE &= AE\\
EF + DE &= DF\\
\text{maar } DE &\text{ is gemeen}\\
\therefore AE &= DF
\end{aligned}
$$

14. In die figuur hieronder $AB = BF$, $AD = DE$. $ABCD$ is 'n parallelogram. Bewys EF is 'n reguitlyn.



Oplossing:

Ons sien dat:

$$B\hat{A}D = B\hat{C}D \text{ (teenoorst } \angle\text{e van parm)}$$
$$C\hat{D}E = B\hat{C}D \text{ (verw } \angle\text{e; } AE \parallel BC\text{)}$$
$$F\hat{B}C = B\hat{C}D \text{ (verw } \angle\text{e; } AF \parallel DC\text{)}$$
$$\therefore C\hat{D}E = F\hat{B}C$$

Ons sien ook dat:

$$AD = BC \text{ (teenoorst sye van parm)}$$
$$AB = DC \text{ (teenoorst sye van parm)}$$

Nou kan ons bewys dat $\triangle DEC$ kongruent is aan $\triangle BCF$:

$$\text{in } \triangle DEC \text{ en } \triangle BCF$$
$$C\hat{D}E = F\hat{B}C \qquad \text{(bewys hierbo)}$$
$$DC = AB = BF \qquad \text{(gegee)}$$
$$DE = AD = BC \qquad \text{(gegee)}$$
$$\therefore \triangle DEC \equiv \triangle BCF \text{ (SHS)}$$

Uiteindelik kan ons toon dat ECF 'n reguitlyn is:

$$\therefore B\hat{F}C = D\hat{C}E \; (\triangle DEC \equiv \triangle BCF)$$
$$B\hat{C}F = D\hat{E}C \; (\triangle DEC \equiv \triangle BCF)$$
$$\text{maar } F\hat{B}C + B\hat{F}C + B\hat{C}F = 180° \angle\text{e van } \triangle)$$
$$\therefore D\hat{C}E + B\hat{C}F + B\hat{C}D = 180°$$
$$\therefore ECF \text{ is 'n reguitlyn}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KCV 2. 2KCW 3. 2KCX 4. 2KCY 5. 2KCZ 6. 2KD2
7. 2KD3 8. 2KD4 9. 2KD5 10. 2KD6 11. 2KD7 12. 2KD8
13. 2KD9 14. 2KDB

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 13

Meting

- Inhoud gedek in hierdie hoofstuk sluit in die hersiening van volume en buite-oppervlakte vir regte prismas en silinders. Die werk word dan uitgebrei na sfere, regte piramides en keëls, ook genoem kegels of konusse. Uiteindelik ondersoek leerders die effek daarvan om enige van die afmetings te vermenigvuldig met 'n konstante faktor k.
- Beperk piramides tot voorbeelde met vierkantige of gelyksydige driehoeke as basisse.
- Saamgestelde figure moet ingesluit word, soos byvoorbeeld 'n vierkantige piramide bo-op 'n kubus, of twee keëls teen mekaar.

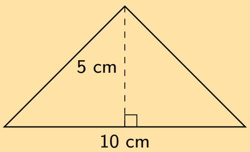
Vir hersiening van werk behandel in vorige grade, kan inhoude oor buite-oppervlakte en omtrek aangevul word deurdat leerders die regulasies opsoek vir die groottes van verskillende sportvelde en die omtrek en oppervlakte van verskillende dele van die velde bereken.

13.1 Area van 'n veelhoek

Exercise 13 – 1:

1. Vind die area van elk van die veelhoeke hieronder:

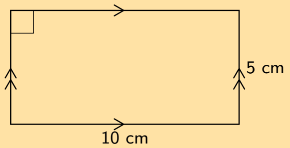
a)



Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}b \times h \\ &= \frac{1}{2}(10)(5) \\ &= 25 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

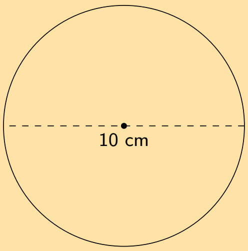
b)



Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= b \times h \\ &= (10)(5) \\ &= 50 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

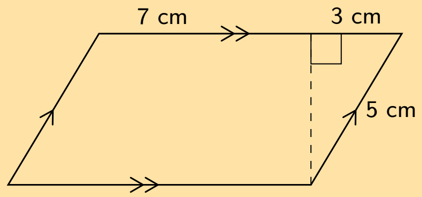
c)



Oplossing:
Die radius is die helfte van die middellyn, dus is die radius 5 cm.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi(5)^2 \\ &= 78{,}5398... \\ &\approx 78{,}54 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

d)



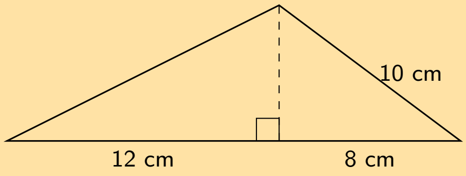
Oplossing:
Ons moet eers die hoogte uitwerk deur die stelling van Pythagoras te gebruik:

$$\begin{aligned} h^2 &= 5^2 - 3^2 \\ &= 16 \\ \therefore h &= 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Nou kan ons die area bereken:

$$\begin{aligned} A &= b \times h \\ &= (10)(4) \\ &= 40 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

e)



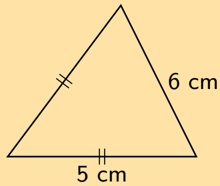
Oplossing:
Ons moet eers die hoogte uitwerk deur die stelling van Pythagoras te gebruik:

$$\begin{aligned} h^2 &= 10^2 - 8^2 \\ &= 36 \\ \therefore h &= 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

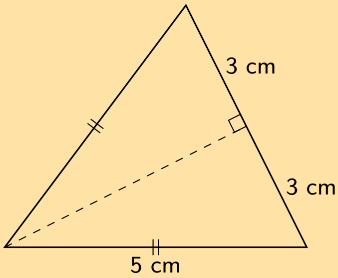
Nou kan ons die area bereken:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} b \times h \\ &= \frac{1}{2}(6)(20) \\ &= 60 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

f)



Oplossing:
Ons moet eers die vertikale (of loodregte) hoogte konstrueer. Vir 'n gelykbenige driehoek as ons die loodregte hoogte konstrueer tussen die twee gelyke sye dan sal hierdie lyn die derde sy halveer.



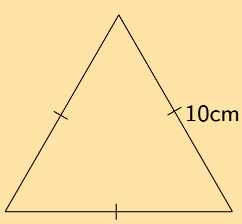
Nou kan ons die hoogte bereken met die gebruik van die stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned} h^2 &= 5^2 - 3^2 \\ &= 16 \\ \therefore h &= 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

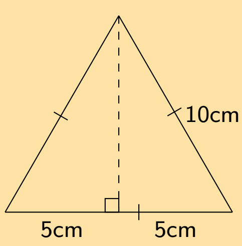
Nou kan ons die area bereken:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} b \times h \\ &= \frac{1}{2}(6)(4) \\ &= 12 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

g)



Oplossing:
Eers konstrueer ons die vertikale (loodregte) hoogte. Vir 'n gelyksydige driehoek sal die loodregte hoogte van die derde sy halveer.



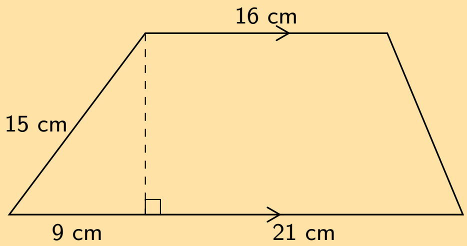
Nou kan ons die hoogte bereken met die gebruik van die stelling van Pythagoras:

$$h^2 = 10^2 - 5^2$$
$$= 75$$
$$\therefore h = \sqrt{75} \text{ cm}$$

Nou kan ons die area bereken:

$$A = \frac{1}{2}\text{basis} \times \text{hoogte}$$
$$A = \frac{1}{2}(10)(\sqrt{75})$$
$$A = 43{,}30 \text{ cm}^2$$

h)



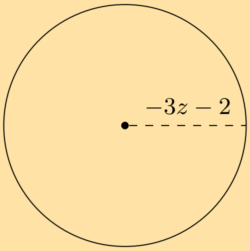
Oplossing:
Ons vind eers die hoogte deur gebruik te maak van die stelling van Pythagoras:

$$h^2 = 15^2 - 9^2$$
$$= 144$$
$$h = 12$$

Nou kan ons die area bereken:

$$A = \frac{1}{2}(a+b)h$$
$$= \frac{1}{2}(16 + (21+9))(12)$$
$$= \frac{1}{2}(46)(12)$$
$$A = 276 \text{ cm}^2$$

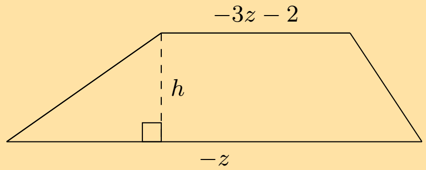
2. a) Vind 'n uitdrukking vir die area van hierdie figuur in terme van z en π. Die sirkel het 'n radius van $-3z - 2$. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



Oplossing:

$$A = \pi r^2$$
$$= \pi(-3z-2)^2$$
$$= 9\pi z^2 + 12\pi z + 4\pi$$

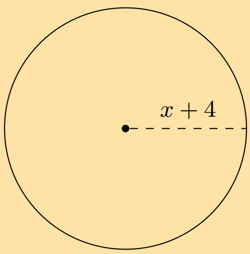
b) Vind 'n uitdrukking vir die area van hierdie figuur in terme van z en h. Die hoogte van die figuur is h, en twee sye word benoem as $-3z-2$ en $-z$. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= \frac{h}{2}(a+b) \\ &= \frac{h}{2}((-3z-2)+(-z)) \\ &= -2hz-h \end{aligned}$$

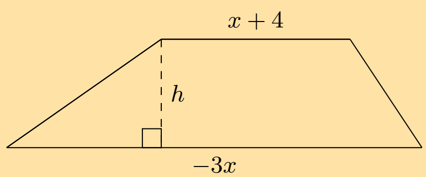
3. a) Vind 'n uitdrukking vir die area van hierdie figuur in terme van x en π. Die sirkel het 'n radius van $x+4$. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi(x+4)^2 \\ &= \pi x^2 + 8\pi x + 16\pi \end{aligned}$$

b) Vind 'n uitdrukking vir die area van hierdie figuur in terme van x en h. Die hoogte van die figuur is h, en twee sye word benoem as $x+4$ en $-3x$. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= \frac{h}{2}(a+b) \\ &= \frac{h}{2}((x+4)+(-3x)) \\ &= -hx+2h \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2KDF 1b. 2KDG 1c. 2KDH 1d. 2KDJ 1e. 2KDK 1f. 2KDM
1g. 2KDN 1h. 2KDP 2. 2KDQ 3. 2KDR

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Buite-oppervlakte van prismas en silinders

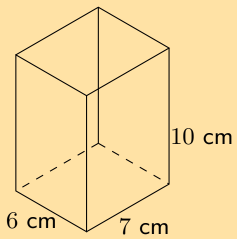
Dit mag handig wees om 'n aantal nette van verskillende veelvlakke beskikbaar te hê vir leerders sodat hulle kan sien hoe hulle opvou om die veelvlakke te vorm.

Jy kan nette vir verskillende veelvlakke van senteacher aflaai en druk en dit gebruik dit in jou klaskamer.

Exercise 13 – 2:

1. Bereken die buite-oppervlakte van die volgende prismas:

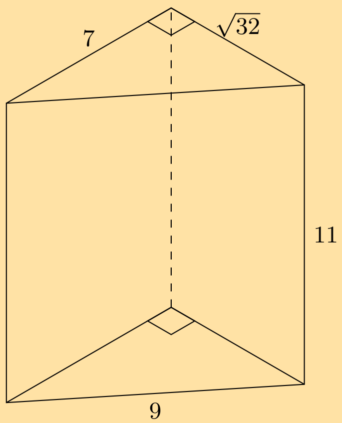
a)



Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Oppervlakte groot reghoek} &= \text{omtrek van klein reghoek} \times \text{lengte}\\ &= (10+7+10+7)\times 6\\ &= 34\times 6\\ &= 204\text{ cm}^2\\ \text{Oppervlakte van } 2\times \text{ klein reghoek} &= 2(7\times 10)\\ &= 2(70)\\ &= 140\text{ cm}^2\\ \text{Oppervlakte van groot reghoek} + 2\times(\text{klein reghoek}) &= 204+140 = 344\text{ cm}^2\end{aligned}$$

b)

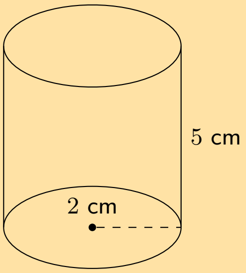


Oplossing:

Daar is drie reghoeke, van verskillende groottes, wat die sykante vorm van hierdie driehoekige prisma. Ons moet die oppervlakte vind van elkeen van die reghoeke. Al die reghoeke het 'n hoogte van 11 eenhede, maar elke reghoek het 'n verskillende basis.

$$\begin{aligned}
\text{oppervlakte van } 2\times \text{ driehoek} &= 2\left(\frac{1}{2}b \times h\right)\\
&= (\sqrt{32})(7)\\
&= 39{,}5979...\\
\text{oppervlakte van reghoek 1} &= b \times h\\
&= (7)(11)\\
&= 77\\
\text{oppervlakte van reghoek 2} &= b \times h\\
&= (9)(11)\\
&= 99\\
\text{oppervlakte van reghoek 3} &= b \times h\\
&= (\sqrt{32})(11)\\
&= 62{,}2253...\\
A_{\text{driehoekige prisma}} &= 39{,}5979... + 77 + 99 + 62{,}2253...\\
&= 277{,}82 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

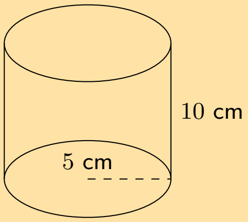
c)



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Oppervlakte groot reghoek} &= \text{omtrek van sirkel} \times \text{lengte}\\
&= 2\pi \times r \times l\\
&= 2\pi \times (2) \times 5\\
&= 20\pi\\
\text{Oppervlakte van sirkel} &= \pi r^2\\
&= \pi(2)^2\\
&= 4\pi\\
\text{Buite-oppervlakte} &= \text{oppervlakte van groot reghoek} + 2(\text{oppervlakte van sirkel})\\
&= 20\pi + 2(4\pi)\\
&= 28\pi\\
&\approx 87{,}96 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

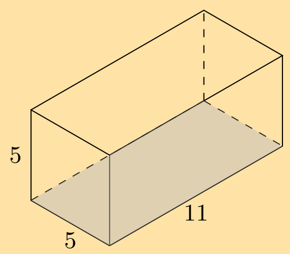
d)



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{Oppervlakte van groot reghoek} &= \text{omtrek van sirkel} \times \text{lengte}\\
&= 2\pi \times r \times l\\
&= 2\pi \times (5) \times 10\\
&= 100\pi\\
\text{Oppervlakte van sirkel} &= \pi r^2\\
&= \pi(5)^2\\
&= 25\pi\\
\text{Buite-oppervlakte} &= \text{oppervlakte van groot reghoek} + 2(\text{oppervlakte van sirkel})\\
&= 100\pi + 2(25\pi)\\
&= 150\pi\\
&\approx 471{,}24 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

e)

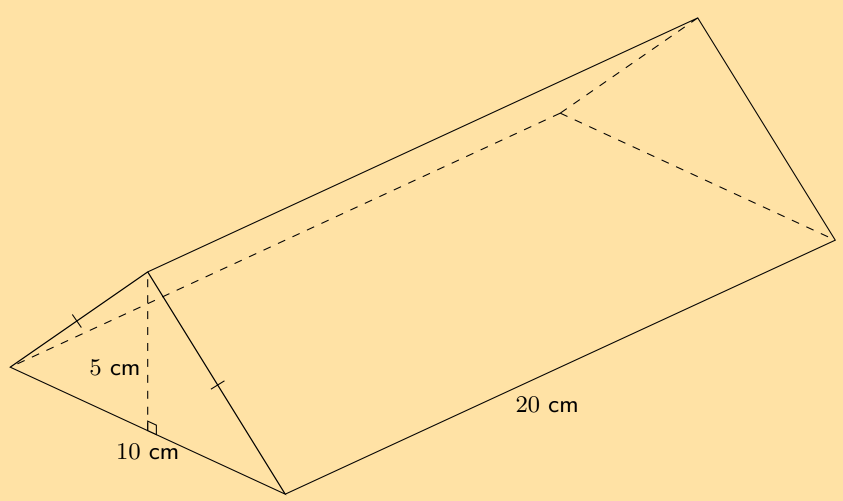


Oplossing:

Daar is 4 reghoeke en 2 vierkante wat die reghoekige prisma uitmaak. Die vierkant het 'n sylengte van 5 eenhede. Die reghoeke het 'n basis van 5 eenhede en 'n hoogte van 11 eenhede.

$$
\begin{aligned}
A_{\text{reghoekige prisma}} &= 4 \times \text{oppervlakte van reghoek} + 2 \times \text{oppervlakte van vierkant}\\
&= 4(b \times h) + 2(s^2)\\
&= 4(11 \times 5) + 2(5^2)\\
&= 4(55) + 2(25)\\
&= 270
\end{aligned}
$$

f)



Oplossing:

Ons moet eers die ontbrekende sy van die driehoek vind. Ons kan dit doen met die gebruik van die stelling van Pythagoras.

$$x^2 = 5^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$
$$x^2 = 5^2 + 5^2$$
$$= 25 + 25$$
$$x = \sqrt{50}$$

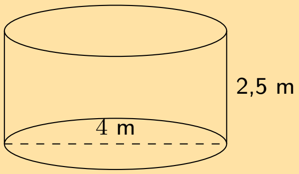
Nou kan ons die oppervlakte van die driehoekige prisma vind:

$$\begin{aligned}
\text{omtrek van driehoek} &= 10 + \sqrt{50} + \sqrt{50} \\
&= 24{,}1421... \\
\text{oppervlakte van groot reghoek} &= \text{omtrek van driehoek} \times \text{lengte} \\
&= 24{,}1421... \times 20 \\
&= 482{,}8427... \\
\text{oppervlakte van driehoek} &= \frac{1}{2} b \times h \\
&= \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \\
&= 25 \\
\text{buite-oppervlakte} &= \text{oppervlakte van groot reghoek} + 2(\text{oppervlakte van driehoek}) \\
&= 482{,}8427... + 2(25) \\
&= 532{,}84 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

2. As 'n liter verf genoeg is vir 'n area van 2 m^2, hoeveel verf het 'n verwer nodig vir:
   a) 'n reghoekige swembad met afmetings 4 m $\times$ 3 m $\times$ 2,5 m (slegs die binnemure en vloer);
   Oplossing:
   Ons moet die binne-oppervlakte van die swembad vind. In hierdie geval het ons 'n reghoekige prisma maar met een reghoek wat ontbreek (dit sou die bokant van die swembad gewees het).

$$\begin{aligned}
\text{binne-oppervlakte} &= \text{oppervlakte van vloer van swembad} + 2(\text{oppervlakte van lang sye}) \\
&\quad + 2(\text{oppervlakte van kort sye}) \\
&= (4 \times 3) + 2(4 \times 2{,}5) + 2(3 \times 2{,}5) \\
&= 12 + 20 + 15 \\
&= 47 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

   Die verwer het een liter verf nodig vir elke 2 m^2 van die oppervlakte. Dus moet ons die buite-oppervlakte verdeel deur 2 om die totale hoeveelheid verf wat hy benodig, te vind. Dus, die verwer sal $\frac{47}{2} = 24$ l verf benodig (opgerond tot die naaste liter).
   b) die binnemure en die vloer van 'n sirkelvormige tenk met middellyn 4 m en hoogte 2,5 m.



   Oplossing:
   Ons moet die buite-oppervlakte van die tenk vind. In hierdie geval het ons 'n silinder met een sirkel, want die bokant van die tenk ontbreek.
   Ons weet wat is die middellyn van die tenk. Die radius is die helfte van die middellyn en dus $r = 2$ m.

$$\begin{aligned}
\text{buite-oppervlakte} &= \text{oppervlakte van vloer van tenk} + \text{oppervlakte van binnekant van tenk} \\
&= (\pi r^2) + (\text{omtrek van basis} \times \text{hoogte van tenk}) \\
&= (\pi(2)^2) + (2(\pi)(2) \times 2{,}5) \\
&= 14\pi \\
&\approx 44 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

Die verwer het een liter verf nodig vir elke 2 m^2 van die oppervlakte. Dus moet ons die buite-oppervlakte verdeel deur 2 om die totale hoeveelheid verf wat hy benodig, te vind. Dus, die verwer sal $\frac{44}{2} = 22$ l verf benodig (opgerond tot die naaste liter).

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1a. 2KDT 1b. 2KDV 1c. 2KDW 1d. 2KDX 1e. 2KDY 1f. 2KDZ
2. 2KF2

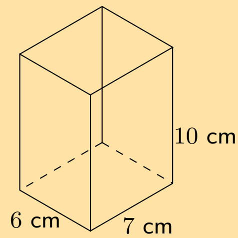
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Volume van prismas en silinders

Exercise 13 – 3:

Bereken die volumes van die volgende prismas (korrek tot 1 desimale plek):

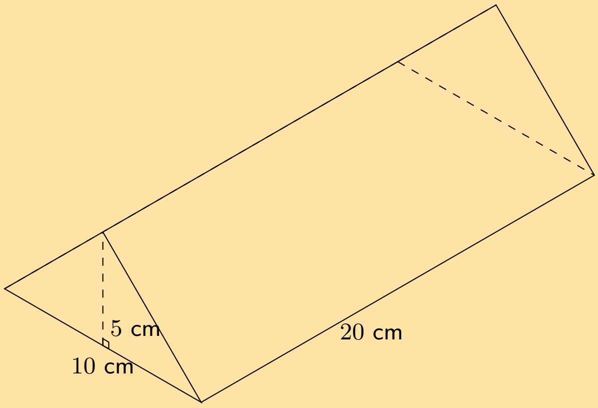
1.



Oplossing:

$$\begin{aligned} V &= l \times b \times h \\ &= 6 \times 7 \times 10 \\ &= 420 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

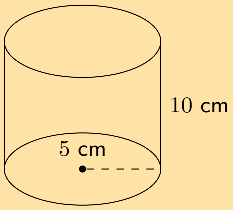
2.



Oplossing:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \times b \times h \times H \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \times 20 \\ &= 500 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

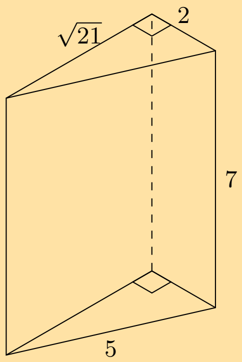
3.



Oplossing:

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi(5)^2(10) \\ &= 250\pi \\ &\approx 785{,}4 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

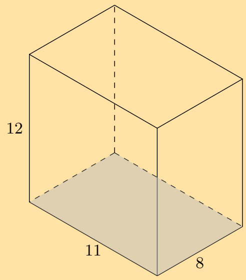
4. Die figuur hieronder is 'n driehoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 7 eenhede; die driehoeke, wat beide reghoekig is, het sye wat 2, $\sqrt{21}$ en 5 eenhede lank is. Bereken die volume van die figuur. Rond af tot twee desimale plekke indien nodig.



Oplossing:

$$\begin{aligned} V &= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte} \\ &= \left[\frac{1}{2} b_{\triangle} h_{\triangle}\right](H) \\ &= \left[\frac{1}{2}(2)(\sqrt{21})\right](7) \\ &= (\sqrt{21})(7) \\ &\approx 32{,}06 \end{aligned}$$

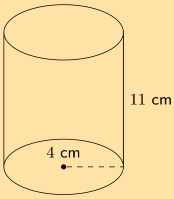
5. Die figuur hieronder is 'n reghoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 12 eenhede; die ander afmetings van die prisma is 11 en 8 eenhede. Vind die volume van die figuur.



Oplossing:

$$\begin{aligned} V_{\text{reghoekige prisma}} &= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte} \\ &= (bh)(H) \\ &= (8 \times 11)(12) \\ &= 1056 \end{aligned}$$

6. Die prentjie hieronder toon 'n silinder. Die hoogte van die silinder is 11 eenhede; die radius van die silinder is $r = 4$ eenhede. Bepaal die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



Oplossing:

$$\begin{aligned} V_{\text{silinder}} &= (\text{oppervlakte van sirkel})(H) \\ &= \left[\pi r^2\right](H) \\ &= \left[\pi(4)^2\right](11) \\ &= [16\pi](11) \\ &= 176\pi \\ &\approx 552{,}92 \end{aligned}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KF4 2. 2KF5 3. 2KF6 4. 2KF7 5. 2KF8 6. 2KF9

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

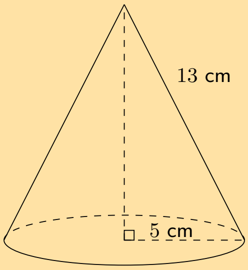
13.3 Regte piramides, regte keëls en sfere

Buite-oppervlakte van piramides, keëls en sfere

Exercise 13 – 4:

1. Vind die totale buite-oppervlakte van die volgende voorwerpe (korrek tot 1 desimale plek indien nodig):

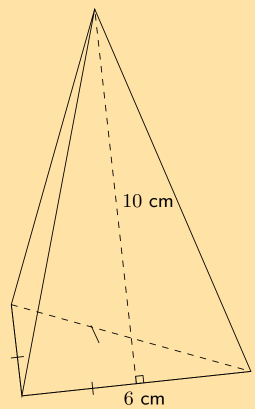
a)



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{buite-oppervlakte} &= \text{basisoppervlakte} + \text{geboë oppervlakte}\\
&= \pi r(r + h_s)\\
&= \pi(5)(5+13)\\
&\approx 282{,}7\text{cm}^2
\end{aligned}$$

b)



Oplossing:

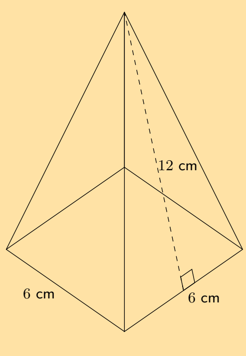
Ons moet eers h_b vind deur die vertikale (loodregte) hoogte te konstrueer en die stelling van Pythagoras te gebruik:

$$\begin{aligned}
(h_b)^2 &= (b)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\\
&= 6^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2\\
&= 36 - 9\\
&= 27\\
h_b &= \sqrt{27}\text{ cm}
\end{aligned}$$

Nou kan ons die buite-oppervlakte vind:

$$\begin{aligned}
\text{buite-oppervlakte} &= \text{basisoppervlakte} + \text{oppervlakte van driehoekige syvlakke}\\
&= \frac{1}{2}b(h_b + 3h_s)\\
&= \frac{1}{2}(6)(\sqrt{27} + 10)\\
&\approx 45{,}6\text{ cm}^2
\end{aligned}$$

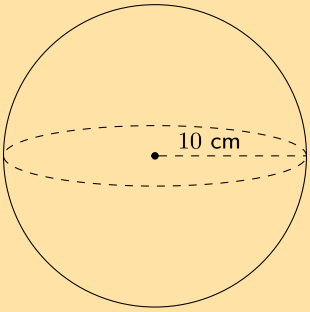
c)



Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{buite-oppervlakte} &= \text{basisoppervlakte} + \text{oppervlakte van driehoekige syvlakke}\\ &= b(b + 2h_s)\\ &= 6(6 + 2(12))\\ &= 180 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

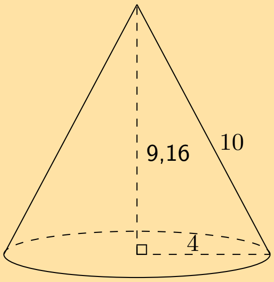
d)



Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{buite-oppervlakte} &= 4\pi r^2\\ &= 4\pi(10)^2\\ &\approx 1256{,}6 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

2. Hierdie figuur is 'n keël. Die vertikale hoogte van die keël is $H = 9{,}16$ eenhede en die skuinshoogte van die keël is $h = 10$ eenhede; die radius van die keël word getoon, $r = 4$ eenhede. Bereken die buite-oppervlakte van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

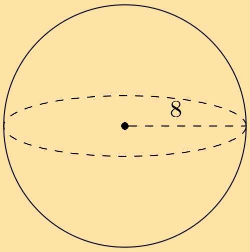


Oplossing:

$$\begin{aligned}A_{\text{kegel}} &= \pi r(r + h)\\ &= \pi(4)(4 + 10)\\ &= 56\pi\\ &= 175{,}9291...\end{aligned}$$

Dus is die buite-oppervlakte vir die keël 175,93 vierkante eenhede.

3. Die figuur hieronder is 'n sfeer. Die radius van die sfeer is $r = 8$ eenhede. Bereken die buite-oppervlakte van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

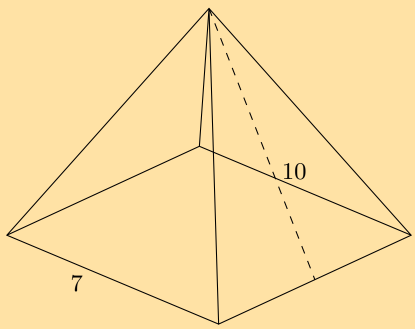


Oplossing:

$$\begin{aligned} A_{\text{sfere}} &= 4\pi r^2 \\ &= 4\pi(8)^2 \\ &= 256\pi \\ &= 804{,}2477... \end{aligned}$$

Dus is die buite-oppervlakte 804,25 vierkant eenhede.

4. Die figuur hieronder toon 'n piramide met 'n vierkantige basis. Die sye van die basis is almal 7 eenhede lank. Die vertikale hoogte van die piramide is 9,36 eenhede en die skuinshoogte van die piramide is 10 eenhede. Bepaal die buite-oppervlakte van die piramide.



Oplossing:

$$\begin{aligned} A_{\text{vierkantige piramide}} &= b(b + 2h_s) \\ &= (7)(7 + 2(10)) \\ &= 189 \end{aligned}$$

Die buite-oppervlakte van die piramide is 189 vierkant eenhede.

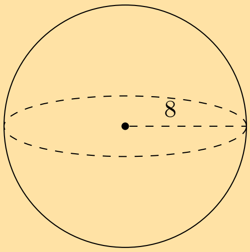
Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.
1a. 2KFB 1b. 2KFC 1c. 2KFD 1d. 2KFF 2. 2KFG 3. 2KFH 4. 2KFJ

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Volume van piramides, keëls en sfere

Exercise 13 – 5:

1. Die figuur hieronder toon 'n sfeer. Die radius van die sfeer is $r = 8$ eenhede. Bepaal die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

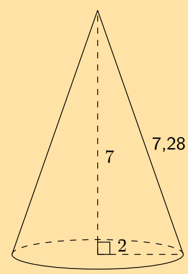


Oplossing:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{sfere}} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi(8)^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi(512) \\
&= \frac{2048}{3}\pi \\
&= 2144{,}6605\ldots
\end{aligned}
$$

Dus is die volume van die sfeer 2144,66 eenhede^3.

2. Die figuur is 'n konus. Die vertikale hoogte van die konus is $H = 7$ eenhede en die skuinshoogte is $h = 7{,}28$ eenhede; die radius van die konus is getoon, $r = 2$ eenhede. Bereken die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

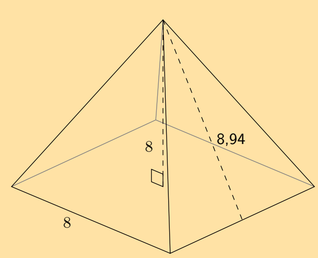


Oplossing:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{konus}} &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 H \\
&= \frac{1}{3} \times \pi(2)^2(7) \\
&= \frac{1}{3}\pi(4)(7) \\
&= \frac{28}{3}\pi \\
&= 29{,}3215\ldots
\end{aligned}
$$

Dus die volume van die konus is 29,32 eenhede^3.

3. Die figuur hieronder is 'n piramide met 'n vierkantige basis. Die vertikale hoogte van die piramide is $H = 8$ eenhede en die skuinssy is $h = 8{,}94$ eenhede; die lengte van die sy van die piramide is $b = 8$ eenhede. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



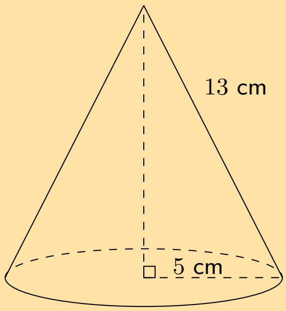
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{vierkantige piramide}} &= \frac{1}{3} b^2 H \\
&= \frac{1}{3}(8)^2(8) \\
&= \frac{1}{3}(64)(8) \\
&= \frac{512}{3} \\
&\approx 170{,}6666\ldots
\end{aligned}
$$

Dus is die volume van die vierkantige piramide: 170,67 eenhede^3.

4. Vind die volume van die volgende voorwerpe (rond af tot 1 desimale plek indien nodig):

a)



Oplossing:

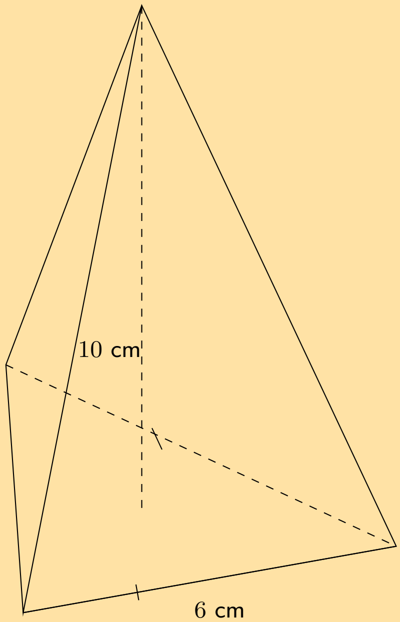
Ons weet wat die radius en die skuinshoogte van die kegel is. Ons kan dit gebruik om die vertikale hoogte (H) van die kegel te bereken:

$$\begin{aligned} H^2 &= 13^2 - 5^2 \\ &= 144 \\ H &= 12 \end{aligned}$$

Nou kan ons die volume van die kegel bereken:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \pi (r)^2 \times H \\ &= \frac{1}{3}\pi(5)^2(12) \\ &= 100\pi \\ &\approx 314{,}16 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

b)



Oplossing:

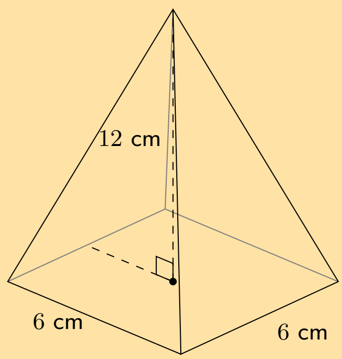
Ons moet eers die vertikale (loodregte) hoogte van die driehoek (h) vind met die gebruik van die stelling van Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
h^2 &= b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
&= 36 - 9 \\
&= 27 \\
h &= \sqrt{27} \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Nou kan ons die volume vind:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} bh \times H \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (\sqrt{27})(6) \times (10) \\
&= 10\sqrt{27} \\
&\approx 52{,}0 \text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

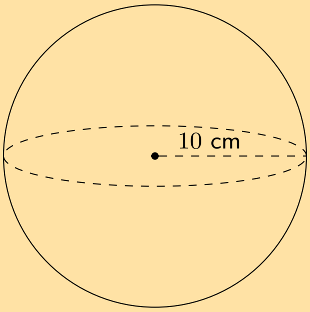
c)



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \times b^2 \times H \\
&= \frac{1}{3}(6)^2(12) \\
&= 144 \text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

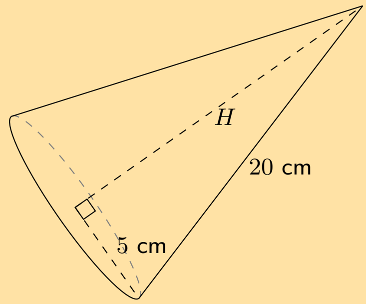
d)



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi (10)^3 \\
&\approx 4188{,}8 \text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

5. Vind die buite-oppervlakte en volume van die keël wat hier getoon word. Rond jou antwoorde af tot die naaste heelgetal.



Oplossing:
Die buite-oppervlakte van die keël is:

$$\begin{aligned} A_{\text{keël}} &= \pi r(r+h) \\ &= \pi(5)(5+20) \\ &= 392{,}69908...\text{ cm}^2 \\ &\approx 393\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Vir die volume moet ons eers die loodregte (of vertikale) hoogte vind deur die gebruik van die stelling van Pythagoras:

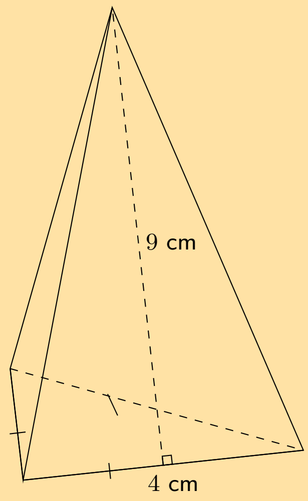
$$\begin{aligned} H^2 &= 20^2 - 5^2 \\ H &= \sqrt{400-25} \\ &= \sqrt{375} \end{aligned}$$

Nou kan ons die volume van die keël bereken:

$$\begin{aligned} V_{\text{keël}} &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi(5)^2(\sqrt{375}) \\ &= 506{,}97233...\text{ cm}^3 \\ &\approx 507\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Dus is die buite-oppervlakte 393 cm^2 en die volume is 507 cm^3.

6. Bereken die volgende eienskappe vir die piramide hieronder getoon. Rond jou antwoorde af tot twee desimale plekke.



a) Buite-oppervlakte

Oplossing:
Ons moet eers die vertikale (loodregte) hoogte van die basis-driehoek bereken:

$$\begin{aligned} h_b^2 &= 4^2 - 2^2 \\ &= 16 - 4 \\ h_b &= \sqrt{12} \end{aligned}$$

Vervolgens kan ons die buite-oppervlakte van die piramide bereken:

$$\begin{aligned} A_{\text{piramide}} &= \frac{1}{2}b(h_b + 3h_s) \\ &= \frac{1}{2}(6)(\sqrt{12} + 3(9)) \\ &= 91{,}39320\ldots \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Dus is die buite-oppervlakte van die driehoekige piramide: 91,39 cm^2.

b) Volume

Oplossing:
Ons moet eers die vertikale hoogte (H) vind:

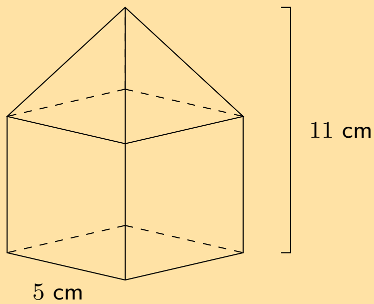
$$\begin{aligned} H^2 &= 9^2 - 3^2 \\ &= 81 - 9 \\ H &= \sqrt{72} \end{aligned}$$

Nou kan ons die volume vind:

$$\begin{aligned} V_{\text{piramide}} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(b)(h_b) \times H \\ &= \frac{1}{6}(6)(\sqrt{12}) \times (\sqrt{72}) \\ &= 29{,}39387\ldots \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Dus is die volume van die piramide: 29,39 cm^3.

7. Die vaste liggaam hieronder bestaan uit 'n kubus en 'n vierkantige piramide. Vind sy volume en buite-oppervlakte (korrek tot 1 desimale plek):



Oplossing:
Die hoogte van die kubus is 5 cm. Aangesien die totale hoogte van die voorwerp 11 cm is, moet die hoogte van die piramide 6 cm wees.
Ons sal eers die volume uitwerk:

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \text{volume van kubus} + \text{volume van vierkantige piramide} \\ &= s^3 + \frac{1}{3}bH \\ &= (5)^3 + \frac{1}{3}(5)^2(6) \\ &= 175 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Vir die buite-oppervlakte let ons op dat een vlak van die kubus bedek word deur die piramide. Ons let ook op dat die basis van die piramide toegemaak word deur die kubus. Dus hoef ons net die area van 5 syvlakke van die kubus en vier driehoekige vlakke van die piramide te vind.

Vir die driehoekige vlakke benodig ons die skuinshoogte. Ons kan dit bereken deur die gebruik van die stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned} h_s^2 &= H^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &= (6)^2 + (2{,}5)^2 \\ h_s &= \sqrt{42{,}25} \end{aligned}$$

Die buite-oppervlakte is:

$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte} &= 5(\text{vlakke van kubus}) + 4(\text{driehoekige vlakke van piramide}) \\ &= 5(s^2) + 4\left(\frac{1}{2}bh_s\right) \\ &= 5(5^2) + 4\left(\frac{1}{2}(5)(\sqrt{42{,}25})\right) \\ &= 125 + 10\sqrt{42{,}25} \\ &= 190 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Die buite-oppervlakte is 175 cm^3 en die volume is 190 cm^2.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

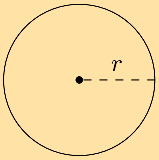
1. 2KFN 2. 2KFP 3. 2KFQ 4a. 2KFR 4b. 2KFS 4c. 2KFT
4d. 2KFV 5. 2KFW 6. 2KFX 7. 2KFY

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

13.4 Die effek van vermenigvuldiging met 'n faktor k

Exercise 13 – 6:

1. As die lengte van die radius van 'n sirkel 'n derde is van sy oorspronklike grootte, wat sal die area van die nuwe sirkel wees?



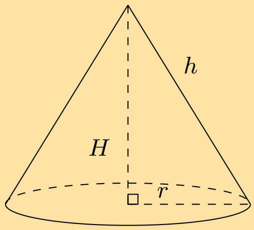
Oplossing:

Die area van die oorspronklike sirkel is: πr^2. Nou verminder ons die radius met 'n derde. Met ander woorde ons vermenigvuldig r met 'n derde. Die nuwe area is:

$$\begin{aligned} A_{\text{nuwe}} &= \pi\left(\frac{1}{3}r\right)^2 \\ &= \frac{1}{9}\pi r^2 \\ &= \frac{1}{9}A \end{aligned}$$

Dus, as die radius van 'n sirkel 'n derde van sy oorspronklike lengte is, sal die area van die nuwe sirkel $\frac{1}{9}$ van die oorspronklike area wees.

2. As die lengte van die radius van die basis en die hoogte van 'n konus verdubbel word, wat sal die buite-oppervlakte van die nuwe konus wees?



Oplossing:

Ons kan die nuwe oppervlakte vind deur op te let dat die oppervlakte sal verander met 'n faktor van k wanneer ons die afmetings van die konus verander. In hierdie geval verander ons twee afmetings van die konus en dus sal die nuwe oppervlakte $A_{\text{nuwe}} = k^2 A$ wees.

Die waarde van k kom van die woord "verdubbel" in die vraag: die waarde van k is 2.

Dus sal die nuwe oppervlakte van die konus $A_{\text{nuwe}} = 4 \times A$ wees as ons die hoogte en die radius van die basis van die konus verdubbel.

Dus sal die buite-oppervlakte van die nuwe konus 4 maal die oorspronklike buite-oppervlakte wees.

3. As die hoogte van 'n prisma verdubbel, met hoeveel sal sy volume vermeerder?

Oplossing:

Ons weet nie of ons 'n reghoekige prisma of 'n driehoekige prisma het nie. Maar, ons weet die volume van 'n prisma word gegee deur:

$$V = \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte van prisma}$$

Ons verander nou net een afmeting van die prisma: die hoogte. Dus word die nuwe volume gegee deur:

$$\begin{aligned} V_{\text{nuwe}} &= \text{basisoppervlakte} \times 2(\text{hoogte van prisma}) \\ &= 2V \end{aligned}$$

Dus verdubbel die volume van die prisma as die hoogte verdubbel.

4. Beskryf die verandering in die volume van 'n reghoekige prisma as die

a) lengte en breedte toeneem met 'n konstante faktor van 3.

Oplossing:

Die volume van 'n reghoekige prisma word gegee deur $V = l \times b \times h$. As ons die lengte en die breedte vermeerder met 'n konstante faktor van 3, sal die volume wees:

$$\begin{aligned} V_{\text{nuwe}} &= 3(l) \times 3(b) \times h \\ &= 9V \end{aligned}$$

Dus vermeerder die volume van die prisma met 'n faktor van 9 wanneer die lengte en breedte toeneem met 'n konstante faktor van 3.

b) lengte, breedte en hoogte word vermenigvuldig met 'n konstante faktor van 3.

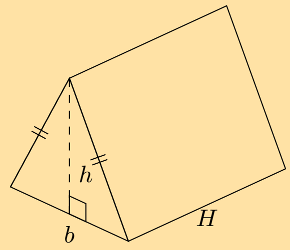
Oplossing:

Die volume van 'n reghoekige prisma word gegee deur $V = l \times b \times h$. As ons die lengte, breedte en hoogte vermeerder met 'n konstante faktor van 3, is die volume:

$$\begin{aligned} V_{\text{nuwe}} &= 3(l) \times 3(b) \times 3(h) \\ &= 27V \end{aligned}$$

Dus sal die volume van die prisma toeneem met 'n faktor van 27 wanneer die lengte, breedte en hoogte toeneem met 'n konstante faktor van 3.

5. As die lengte van elke sy van 'n driehoekige prisma vervierdubbel, wat sal die volume van die nuwe driehoekige prisma wees?



Oplossing:

Wanneer ons vermenigvuldig met 'n faktor van k, sal die volume van 'n vorm toeneem met k^3. Ons weet die afmetings word viervoudig vermeerder. Dit beteken elke afmeting word vermenigvuldig met 4. Dus $k = 4$.

Nou kan ons k^3 bereken.

$$k^3 = (4)^3 = 64$$

Dus, as elke sy van 'n driehoekige prisma vervierdubbel, sal die volume van die nuwe driehoekige prisma 64 keer die volume van die oorspronklike vorm wees.

6. Gegee 'n prisma met 'n volume van 493 cm^3 en 'n buite-oppervlakte van 6007 cm^2. Vind die nuwe buite-oppervlakte en volume vir prisma as al die afmetings vermeerder met 'n konstante faktor van 4.

Oplossing:

Ons vermeerder al die afmetings met 4 en dus sal die volume vermeerder met 4^3. Die buite-oppervlakte sal vermeerder met 4^2.

$$\begin{aligned} V &= 493 \times 4^3 \\ &= 31\ 552 \text{ cm}^3 \\ \text{buite-oppervlakte} &= 6007 \times 4^2 \\ &= 96\ 112 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Dus is die volume 31 552 cm^3 en die buite-oppervlakte is 96 112 cm^2.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KFZ 2. 2KG2 3. 2KG3 4a. 2KG4 4b. 2KG5 5. 2KG6
6. 2KG7

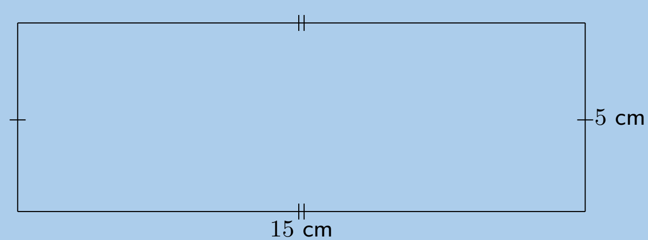
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

13.5 Hoofstuk opsomming

End of chapter Exercise 13 – 7:

1. Vind die area van elk van die vorme getoon. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke waar nodig.

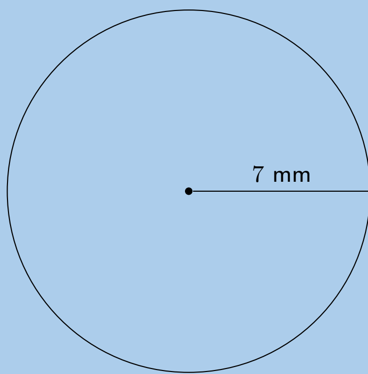
a)



Oplossing:

$$\begin{aligned} A_{\text{reghoek}} &= l \times b \\ &= (15)(5) \\ &= 75 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

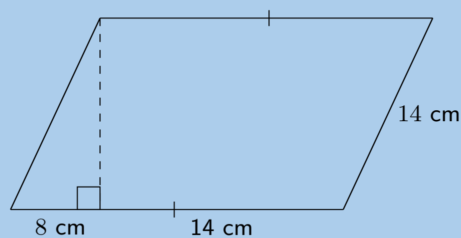
b)



Oplossing:

$$\begin{aligned} A_{\text{sirkel}} &= \pi r^2 \\ &= (3,1415...)(7)^2 \\ &= 153{,}93804... \\ &\approx 153{,}94 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

c)



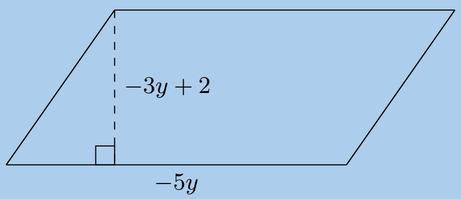
Oplossing:
Ons moet eers die hoogte vind.

$$\begin{aligned} h^2 &= (14)^2 - (8)^2 \\ h &= \sqrt{132} \end{aligned}$$

Nou kan ons die oppervlakte van die parallelogram kry. Let op dat die lengte van die basis $b = 8 + 14 = 22$ is.

$$\begin{aligned} A_{\text{parallelogram}} &= b \times h \\ &= (22)(\sqrt{132}) \\ &\approx 252{,}76 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

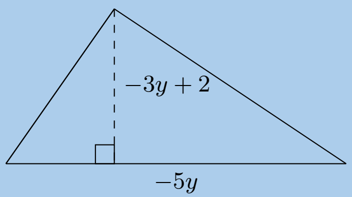
2. a) Vind 'n uitdrukking vir die area van hierdie figuur in terme van y. Die afmetings van die figuur is benoem $-5y$ en $-3y + 2$. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



Oplossing:

$$A = bh$$
$$A = (-5y)(-3y+2)$$
$$A = 15y^2 - 10y$$

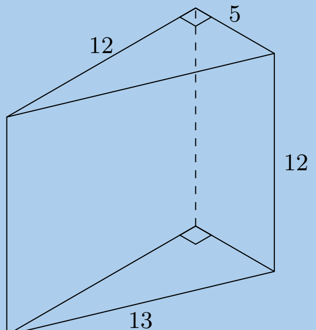
b) Vind 'n uitdrukking vir die oppervlakte van hierdie figuur in terme van y. Die figuur het afmetings van $-5y$ en $-3y+2$, soos benoem. Skryf jou antwoord in uitgebreide vorm (nie gefaktoriseer nie).



Oplossing:

$$A = \frac{1}{2}bh$$
$$A = \frac{1}{2}(-5y)(-3y+2)$$
$$A = \frac{15y^2}{2} - 5y$$

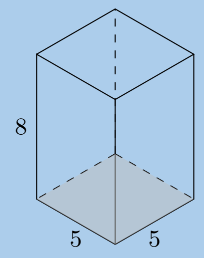
3. Die figuur hieronder is 'n driehoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 12 eenhede; die driehoeke, wat beide regte driehoeke is, het sye wat 5, 12 en 13 eenhede lank is. Vind die buite-oppervlakte van die figuur.



Oplossing:
'n Driehoekige prisma bestaan uit 2 driehoeke en 3 reghoeke. In hierdie geval is die driehoeke reghoekige driehoeke en ons het dus die hoogte van die driehoek. Ons let ook op dat elke reghoek 'n verskillende lengte en breedte het.

$$\begin{aligned} A_{\triangle \text{ prism}} &= 2A_{\text{driehoeke}} + 3A_{\text{reghoeke}} \\ &= 2\left[\frac{1}{2}b_{\triangle}h_{\triangle}\right] + b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3 \\ &= 2\left[\frac{1}{2}(5)(12)\right] + (12)(12) + (5)(12) + (13)(12) \\ &= 60 + 144 + 60 + 156 \\ &= 420 \end{aligned}$$

4. Hierdie figuur is 'n reghoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 5 eenhede; die ander afmetings van die prisma is 8 en 5 eenhede. Vind die buite-oppervlakte van die figuur.

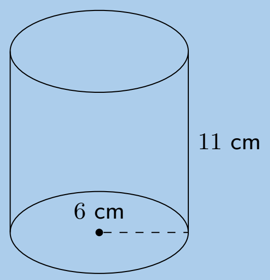


Oplossing:

'n Reghoekige prisma bestaan uit 6 reghoeke. In hierdie geval is daar 4 reghoeke met 'n breedte van 5 eenhede en 'n hoogte van 8 eenhede en twee reghoeke met 'n breedte van 5 eenhede en 'n hoogte van 5 eenhede.

$$\begin{aligned} A_{\text{reghoekige prisma}} &= A_{6\text{ reghoeke}} \\ &= 4(b_1h_1) + 2(b_2h_2) \\ &= 4(8)(5) + 2(5)(5) \\ &= 4(40) + 2(25) \\ &= 210 \end{aligned}$$

5. 'n Silinder word hieronder gewys. Die hoogte van die silinder is 11 cm; die radius van die silinder is $r = 6$ cm, soos getoon. Vind die buite-oppervlakte van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

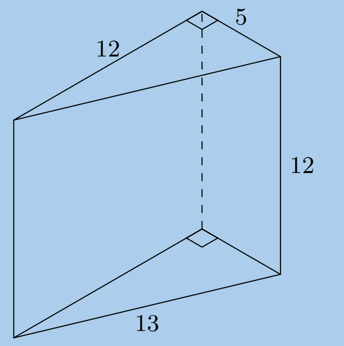


Oplossing:

'n Silinder bestaan uit twee sirkels en 'n reghoek. Ons kan die oppervlakte van elk van hierdie vind en hulle dan bymekaartel om die buite-oppervlakte van die silinder te kry. Vir die reghoek let ons op dat die lengte die omtrek van die sirkel is.

$$\begin{aligned} A_{\text{silinder}} &= A_{2\text{ sirkels}} + A_{1\text{ reghoek}} \\ &= 2(\pi r^2) + b(2\pi r) \\ &= 2\left(\pi(6)^2\right) + (11)(2\pi(6)) \\ &= 2\,(36\pi) + 132\pi \\ &= 204\pi \\ &\approx 640{,}88 \end{aligned}$$

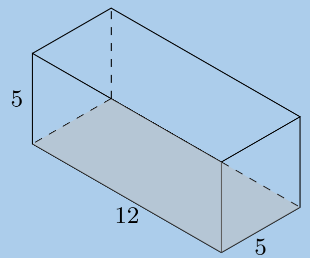
6. Die figuur hieronder is 'n driehoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 12 eenhede; die driehoeke, wat beide regte hoeke bevat, het sye van 5, 12 en 13 eenhede. Bepaal die volume van die figuur.



Oplossing:

$$\begin{aligned} V_{\triangle \text{prism}} &= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte} \\ &= \left[\frac{1}{2} b_{\triangle} h_{\triangle}\right](H) \\ &= \left[\frac{1}{2}(5)(12)\right](12) \\ &= (30)(12) \\ &= 360 \end{aligned}$$

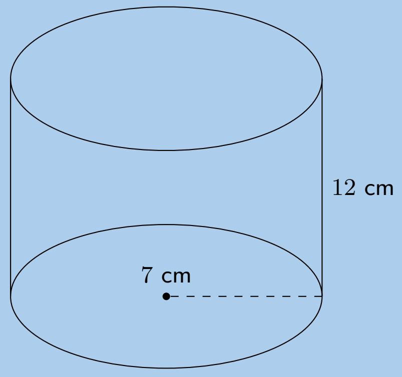
7. Die figuur hieronder is 'n reghoekige prisma. Die hoogte van die prisma is 5 eenhede; die ander afmetings van die prisma is 12 en 5 eenhede. Bereken die volume van die figuur.



Oplossing:

$$\begin{aligned} V_{\text{reghoekige prisma}} &= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte} \\ &= (bh)(H) \\ &= (5 \times 12)(5) \\ &= 300 \end{aligned}$$

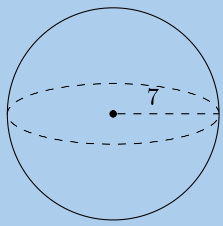
8. Die figuur hieronder toon 'n silinder. Die hoogte van die silinder is 12 cm; die radius van die silinder is $r = 7$ cm. Bereken die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke



Oplossing:

$$\begin{aligned} V_{\text{silinder}} &= (\text{oppervlakte van sirkel})(H) \\ &= \left[\pi r^2\right](H) \\ &= \left[\pi(7)^2\right](12) \\ &= [\pi 49](12) \\ &\approx 1847{,}26 \end{aligned}$$

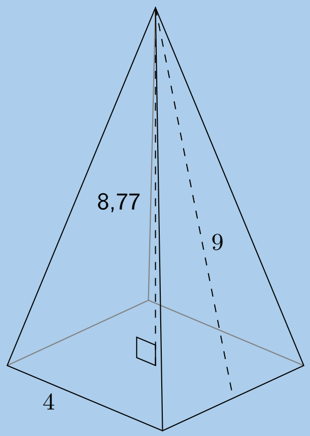
9. Die figuur hieronder is 'n sfeer. Die radius van die sfeer is $r = 7$ eenhede. Vind die buite-oppervlakte van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.



Oplossing:

$$\begin{aligned} A_{\text{sfeer}} &= 4\pi r^2 \\ &= 4\pi(7)^2 \\ &= 4\pi(49) \\ &= 196\pi \\ &\approx 615{,}75 \end{aligned}$$

10. Die figuur hieronder toon 'n piramide met 'n vierkantige basis. Die sye van die basis is almal 4 eenhede lank. Die vertikale hoogte van die piramide is 8,77 eenhede en die skuinshoogte van die piramide is 9 eenhede. Bepaal die buite-oppervlakte van die piramide.

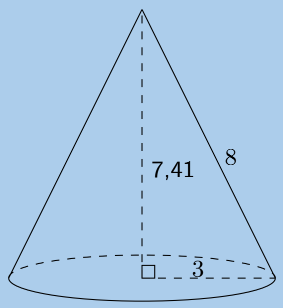


Oplossing:

$$\begin{aligned} A_{\text{vierkantige piramide}} &= A_{1\text{ vierkant}} + A_{4\text{ driehoeke}} \\ &= (b)^2 + 4\left(\frac{1}{2}bh_s\right) \\ &= (4)^2 + 4\left(\frac{1}{2}(4)(9)\right) \\ &= 16 + 2(36) \\ &= 88 \end{aligned}$$

Die totale buite-oppervlakte vir die piramide is: 88 vierkant eenhede.

11. Die figuur hier is 'n kegel. Die vertikale hoogte van die kegel is $H = 7{,}41$ eenhede en die skuinshoogte van die kegel is $h = 8$ eenhede; die radius van die kegel word getoon, $r = 3$ eenhede. Vind die buite-oppervlakte van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

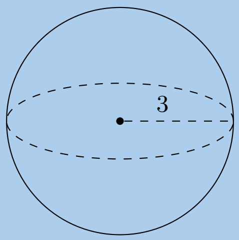


Oplossing:

$$\begin{aligned} A_{\text{kegel}} &= \pi r(r + h) \\ &= \pi(3)(3 + 8) \\ &= 33\pi \\ &= 103{,}6725... \end{aligned}$$

Dus is die totale buite-oppervlakte vir die kegel 103,67 vierkant eenhede.

12. Die figuur hieronder toon 'n sfeer. Die radius van die sfeer is $r = 3$ eenhede. Bepaal die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

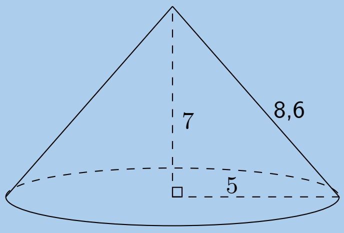


Oplossing:

$$\begin{aligned} V_{\text{sfeer}} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(3)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(27) \\ &= 36\pi \\ &= 113{,}0973... \end{aligned}$$

Dus is die volume van die sfeer 113,10 eenhede^3.

13. Die figuur hier is 'n keël. Die vertikale hoogte van die keël is $H = 7$ eenhede en die skuinshoogte is $h = 8{,}60$ eenhede; die radius van die keël word getoon, $r = 5$ eenhede. Vind die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

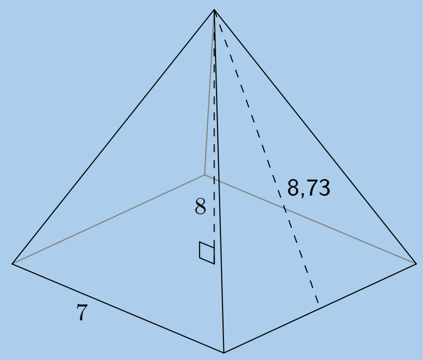


Oplossing:

$$\begin{aligned}V_{\text{keël}} &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 H \\ &= \frac{1}{3} \times \pi (5)^2 (7) \\ &= \frac{1}{3}\pi (25)(7) \\ &= \frac{175}{3}\pi \\ &= 183{,}2595...\end{aligned}$$

Dus is die volume 183,26 eenhede^3.

14. Die figuur hieronder is 'n piramide met 'n vierkantige basis. Die vertikale hoogte van die piramide is $H = 8$ eenhede en die skuinshoogte is $h = 8{,}73$ eenhede; die sye van die basis van die piramide is $b = 7$ eenhede. Vind die volume van die figuur. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

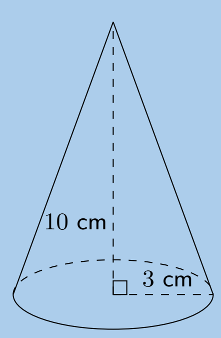


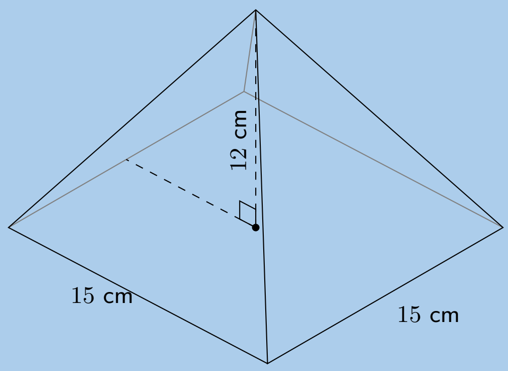
Oplossing:

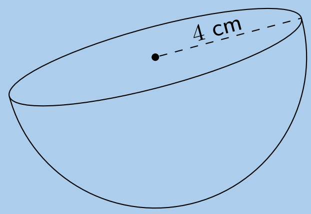
$$\begin{aligned}V_{\text{vierkantige piramide}} &= \frac{1}{3} b^2 H \\ &= \frac{1}{3}(7)^2(8) \\ &= \frac{1}{3}(49)(8) \\ &= \frac{392}{3}\end{aligned}$$

Dus is die volume: 130,67 eenhede^3

15. Beskou die vaste liggame hieronder:







a) Bereken die buite-oppervlakte van elke vaste liggaam.

Oplossing:

Keël

Ons moet eers die skuinshoogte bereken:

$$\begin{aligned} h_s^2 &= r^2 + h^2 \\ &= 3^2 + 10^2 \\ h_s &= \sqrt{109} \end{aligned}$$

Nou kan ons die buite-oppervlakte bereken:

$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte} &= \pi r(r + h_s) \\ &= \pi(3)(3 + \sqrt{109}) \\ &\approx 126{,}67 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Vierkantigige piramide

Ons moet eers die skuinshoogte bereken:

$$\begin{aligned} h_s^2 &= b^2 + h^2 \\ &= (7{,}5)^2 + 12^2 \\ h_s &= \sqrt{200{,}25} \end{aligned}$$

Nou kan ons die buite-oppervlakte bereken:

$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte} &= b(b + 2h_s) \\ &= (15)(15 + 2\sqrt{200{,}25}) \\ &\approx 437{,}26 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Halwe sfeer

Vir 'n halwe sfeer moet ons die buite-oppervlakte van 'n sfeer deel deur 2. Ons moet ook die area van 'n sirkel insluit.

$$\begin{aligned}\text{buite-oppervlakte} &= \frac{4\pi r^2}{2} + \pi r^2 \\ &= 2\pi(4)^2 + \pi(4)^2 \\ &= 48\pi \\ &\approx 150{,}80 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Die buite-oppervlakte van elke voorwerp is: $A_{\text{keël}} = 126{,}67 \text{ cm}^2$ $A_{\text{vierkantige piramide}} = 437{,}26 \text{ cm}^2$ $A_{\text{halwe sfeer}} = 150{,}80 \text{ cm}^2$..

b) Bereken die volume van elke vaste liggaam.

Oplossing:

Keël

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\pi r^2 H \\ &= \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 10 \\ &= 30\pi \\ &\approx 94{,}25 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Vierkantige piramide

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}b^2 \times H \\ &= \frac{1}{3}(15)^2 \times 12 \\ &= 900 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Halwe sfeer

Die volume van 'n halwe sfeer is die helfte van die volume van 'n sfeer.

$$\begin{aligned}V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{3}\pi(4)^3 \times \frac{1}{2} \\ &= 18\pi \\ &\approx 134{,}04 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Die volume van elk van die voorwerpe is: $V_{\text{keël}} = 94{,}25 \text{ cm}^3$ $V_{\text{vierkantige piramid}} = 900 \text{ cm}^3$ $V_{\text{halwe sfeer}} = 134{,}04 \text{ cm}^3$

16. As die lengte van elke sy van 'n vierkant 'n kwart is van sy oorspronklike grootte, wat sal die oppervlakte van die nuwe vierkant wees?

Oplossing:

Wanneer ons die afmetings van 'n vierkant vermenigvuldig met 'n faktor van k, sal die oppervlakte van die vierkant toeneem met k^2.

In hierdie geval maak ons elke sy van die vierkant 'n kwart van die oorspronklike lengte, dus kry ons:

$$\begin{aligned}A_{\text{nuwe}} &= \left(\frac{1}{4}s\right)^2 \\ &= \frac{1}{16}s^2 \\ &= \frac{1}{16}A\end{aligned}$$

Dus, as elke sy van 'n vierkant 'n kwart van sy oorspronklike lengte is, sal die oppervlakte van die nuwe vierkant $\frac{1}{16}$ keer die oppervlakte van die oorspronklike vierkant wees.

17. As die lengte van elke sy van 'n vierkantige piramide verminder word na 'n derde van die oorspronklike lengte, wat sal die buite-oppervlakte van die nuwe vierkantige piramide wees?

Oplossing:

Wanneer ons twee afmetings van 'n vierkantige piramide vermenigvuldig met 'n faktor van k, sal die oppervlakte van die vierkantige piramide verander met k^2.

In hierdie geval is die lengte van elke sy van die vierkantige piramide 'n derde van die oorspronklike lengte, dus kry ons:

$$\begin{aligned} A_{\text{nuwe}} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}b\right)^2 H \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}b^2 H\right) \\ &= \frac{1}{9}A \end{aligned}$$

Dus, as elke sy van 'n vierkantige piramide 'n derde is van sy oorspronklike lengte, sal die buite-oppervlakte van die nuwe vierkantige piramide $\frac{1}{9}$ van die buite-oppervlakte van die oorspronklike vorm s'n wees.

18. As die lengte van die radius van die basis en die hoogte van 'n silinder gehalveer word, wat sal die volume van die nuwe silinder wees?

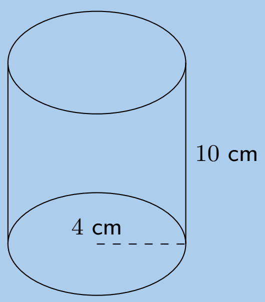
Oplossing:

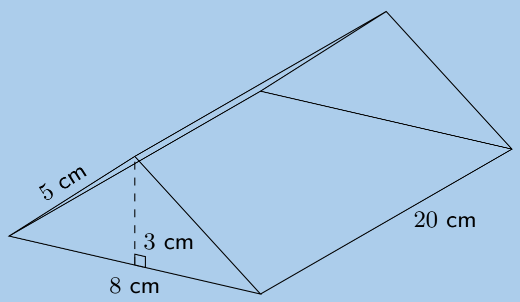
In hierdie geval is die radius van die basis en die hoogte van 'n silinder die helfte van die oorspronklike grootte, dus kry ons:

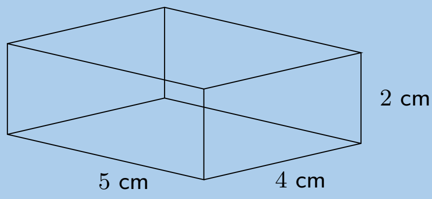
$$\begin{aligned} A_{\text{nuwe}} &= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2\left(\frac{1}{2}H\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\pi r^2 H\right) \\ &= \frac{1}{8}A \end{aligned}$$

Dus, as die radius van die basis en die hoogte van 'n silinder gehalveer word, sal die volume van die nuwe silinder $\frac{1}{8}$ van die oorspronklike vorm se volume wees.

19. Beskou die vaste liggame hieronder en antwoord die vrae wat volg (korrek tot 1 desimale plek, indien nodig):







a) Bereken die buite-oppervlakte van elke vaste liggaam.

Oplossing:

Silinder

'n Silinder bestaan uit twee sirkels en 'n reghoek. Die breedte van die reghoek is die omtrek van die sirkel.

$$\begin{aligned}\text{buite-oppervlakte} &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ &= 2\pi(4)^2 + 2\pi(4)(10) \\ &= 112\pi \\ &\approx 351{,}9 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Driehoekige prisma

'n Driehoekige prisma bestaan uit drie reghoeke en twee driehoeke. Ons weet wat is die vertikale hoogte van die driehoeke sowel as die skuinshoogte.

$$\begin{aligned}\text{buite-oppervlakte} &= 2(\frac{1}{2}b \times h) + 2(H \times h_s) + (H \times b) \\ &= 2(\frac{1}{2}(8)(3)) + 2(20 \times 5) + (20 \times 8) \\ &= 384 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Reghoekige prisma

'n Reghoekige prisma bestaan uit 6 reghoeke. Ons het die afmetings van die al die reghoeke.

$$\begin{aligned}\text{buite-oppervlakte} &= 2[(L \times b) + (b \times h) + (L \times h)] \\ &= 2[(5 \times 4) + (4 \times 2) + (5 \times 2)] \\ &= 76 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Die buite-oppervlakte van elke vorm is: $A_{\text{silinder}} = 351{,}9 \text{ cm}^2$ $A_{\text{driehoekige prisma}} = 384 \text{ cm}^2$ $A_{\text{reghoekige prisma}} = 76 \text{ cm}^2$..

b) Bereken die volume van elke vaste liggaam.

Oplossing:

Silinder

$$\begin{aligned}V &= \pi r^2 h \\ &= \pi(4)^2(10) \\ &= 160\pi \\ &= 502{,}7 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Driehoekige prisma

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2} \times h \times b \times H \\ &= \frac{1}{2}(3)(8)(20) \\ &= 240 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Reghoekige prisma

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= l \times b \times h \\ &= 5 \times 4 \times 2 \\ &= 40 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Die volume van elke vorm is: $V_{\text{silinder}} = 502{,}7 \text{ cm}^3$ $V_{\text{driehoekige prisma}} = 240 \text{ cm}^3$ $V_{\text{reghoekige prisma}} = 40 \text{ cm}^3$.

c) As elke afmeting van die vaste liggame toeneem met 'n faktor van 3, bereken die nuwe buite-oppervlakte van elke vorm.

Oplossing:

Silinder

$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte} &= 2\pi(3r)^2 + 2\pi(3r)(3h) \\ &= 2\pi 9(4)^2 + 2\pi(9)(4)(10) \\ &= 1008\pi \\ &\approx 3166{,}7 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Driehoekige prisma

$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte} &= 2(\frac{1}{2}b \times h) + 2(H \times S) + (H \times b) \\ &= 2(\frac{9}{2}(8)(3)) + 18(20 \times 5) + 9(20 \times 8) \\ &= 3456 \text{ cm}^2 3456 \end{aligned}$$

Reghoekige prisma

$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte} &= 2[9(L \times b) + 9(b \times h) + 9(L \times h)] \\ &= 2[9(5 \times 4) + 9(4 \times 2) + 9(5 \times 2)] \\ &= 684 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Die nuwe buite-oppervlakte van elke vorm is: $A_{\text{silinder}} = 3166{,}7 \text{ cm}^2$ $A_{\text{driehoekige prisma}} = 3456 \text{ cm}^2$ $A_{\text{reghoekige prisma}} = 684 \text{ cm}^2$.

d) As elke afmeting van die vorme toeneem met 'n faktor van 3, bereken die nuwe volume van elke vaste liggaam.

Oplossing:

Silinder

$$\begin{aligned} V &= \pi(3r)^2 3h \\ &= \pi(3(4))^2(3(10)) \\ &= 4320\pi \\ &\approx 13\,571{,}9 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Driehoekige prisma

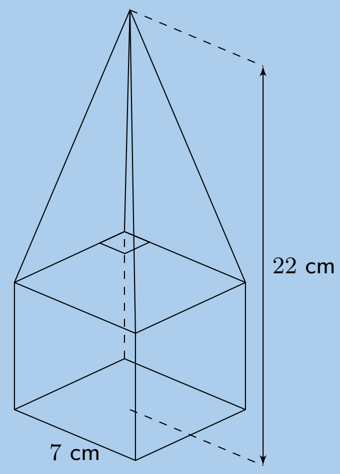
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \times h \times b \times H \\ &= \frac{27}{2}(3)(8)(20) \\ &= 6480 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Reghoekige prisma

$$\begin{aligned} V &= 27(L \times b \times h) \\ &= 27(5 \times 4 \times 2) \\ &= 1080 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Die nuwe volume van elke vorm is: $V_{\text{silinder}} = 13\,571{,}9 \text{ cm}^3$ $V_{\text{driehoekige prisma}} = 6480 \text{ cm}^3$ $V_{\text{reghoekige prisma}} = 1080 \text{ cm}^3$

20. Die vaste liggaam hieronder bestaan uit 'n kubus en 'n vierkantige piramide. Beantwoord die volgende:



a) Vind die buite-oppervlakte van die vorm getoon. Gee jou antwoorde tot twee desimale plekke.
Oplossing:
Begin met die vlakke van die kubus, wat almal vierkante is.

$$\begin{aligned} A_{\text{vyf vierkante}} &= 5 \times s^2 \\ &= 5 \times (7)^2 \\ &= 245 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Vervolgens let ons op die hoogte van die piramide:

$$h_{\text{piramide}} = 22 - 7 = 15$$

Ons moet die skuinshoogte bereken met die gebruik van die stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned} h_s &= \sqrt{(15)^2 + \left(\frac{1}{2}(7)\right)^2} \\ &= \sqrt{(225 + 12{,}25)} \\ &= \sqrt{237{,}25} \end{aligned}$$

Nou kan ons die oppervlakte van die vier driehoeke bereken:

$$\begin{aligned} A_{\text{vier driehoeke}} &= 4 \times \frac{1}{2} b h_s \\ &= 4 \times \frac{1}{2}(7)(\sqrt{237{,}25}) \\ &= 14\sqrt{237{,}25} \end{aligned}$$

Uiteindelik kan ons die totale buite-oppervlakte bereken:

$$\begin{aligned} A_{\text{totale}} &= A_{\text{driehoeke}} + A_{\text{vierkante}} \\ &= 14\sqrt{237{,}25} + 245 \\ &= 460{,}6409\ldots \text{ cm}^2 \\ &\approx 460{,}64 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Dus is die buite-oppervlakte: 460,64 cm^2.

b) Bepaal nou die volume van die vorm. Gee jou antwoord tot die naaste heelgetalwaarde.
Oplossing:

Volume van die piramide:

$$\begin{aligned} V_{\text{piramide}} &= \frac{1}{3}b^2H \\ &= \frac{1}{3}(7)^2(15) \\ &= 245 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Volume van die kubus:

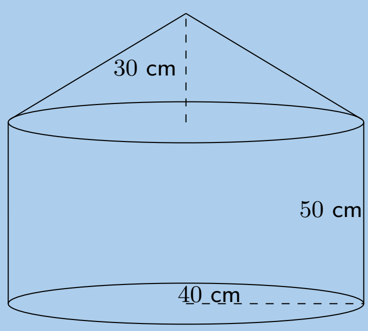
$$\begin{aligned} V_{\text{kubus}} &= l^3 \\ &= (7)^3 \\ &= 343 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Totale volume:

$$\begin{aligned} V_{\text{totaal}} &= V_{\text{kubus}} + V_{\text{piramide}} \\ &= 343 + 245 \\ &= 588 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Dus is die totale volume: 588 cm^3.

21. Bereken die volume en die totale buite-oppervlakte van die vaste liggaam hieronder (korrek tot 1 desimale plek):



Oplossing:
Buite-oppervlakte
Silinder:

$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte} &= \pi r^2 + 2\pi rh \\ &= \pi(40)^2 + 2\pi(40)(50) \\ &= 17\,592{,}91 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Keël

$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte} &= 2\pi r\sqrt{r^2 + h^2} \\ &= 2\pi(40)\sqrt{40^2 + 30^2} \\ &= 12\,566{,}4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Totale buite-oppervlakte: $17\,592{,}92 + 12\,566{,}4 = 30\,159{,}52$ cm^2.
Volume
Silinder:

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi(40)^2(50) \\ &= 251\,327{,}4 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Keël

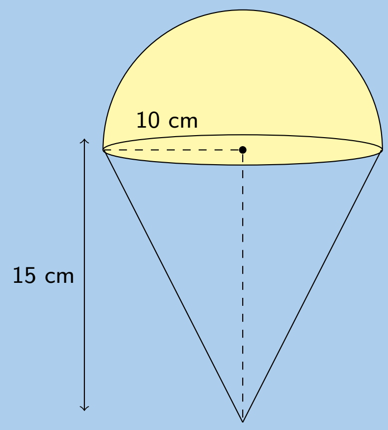
$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\
&= \frac{1}{3}\pi (40)^2 (30) \\
&= 50\ 265{,}48 \text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

Totale volume $= 251\ 327{,}4 + 50\ 265{,}48 = 301\ 592{,}88$ cm^3.

Die totale buite-oppervlakte en volume is 30 159,52 cm^2 en 30 159,88 cm^3 onderskeidelik.

22. Vind die volume en buite-oppervlakte van die volgende saamgestelde vorme.

a)



Oplossing:

Die vorm is 'n halwe sfeer bo-op 'n regte keël. Ons kan die volume van 'n keël bereken en dit bytel by die helfte van die volume van 'n sfeer. Die volume is:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \\
&= \frac{1}{3}\pi (10)^2 (15) + \frac{2}{3}\pi (10)^3 \\
&= \frac{3500}{3}\pi \\
&= 3665{,}19 \text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

Vir die buite-oppervlakte moet ons eers die skuinshoogte vind:

$$
\begin{aligned}
h_s^2 &= 10^2 + 15^2 \\
&= 325 \\
h_s &= 5\sqrt{13}
\end{aligned}
$$

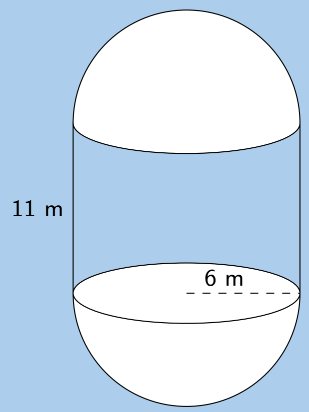
Ons het 'n halwe sfeer bo-op 'n keël. Die halwe sfeer bedek die sirkel aan die bokant van die keël, en dus moet ons hierdie vorm uitsluit uit ons berekening. Vir die halwe sfeer kan ons die helfte van die buite-oppervlakte van 'n sfeer gebruik aangesien dit nie die sirkel by die basis van 'n halwe sfeer insluit nie.

Die buite-oppervlakte is:

$$
\begin{aligned}
\text{buite-oppervlakte } &= \pi r h_s + 2\pi r^2 \\
&= \pi\,(10)\left(5\sqrt{13}\right) + 2\pi\,(10)^2 \\
&\approx 1194{,}68 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

Dus is die volume en die buite-oppervlakte 3665,19 cm^3 en 1194,68 cm^2 onderskeidelik.

b)



Oplossing:

Ons het 'n silinder met twee halwe sfere. Ons kan die volume van 'n silinder bereken en die volume van 'n sfeer bytel hierby. Die volume is:

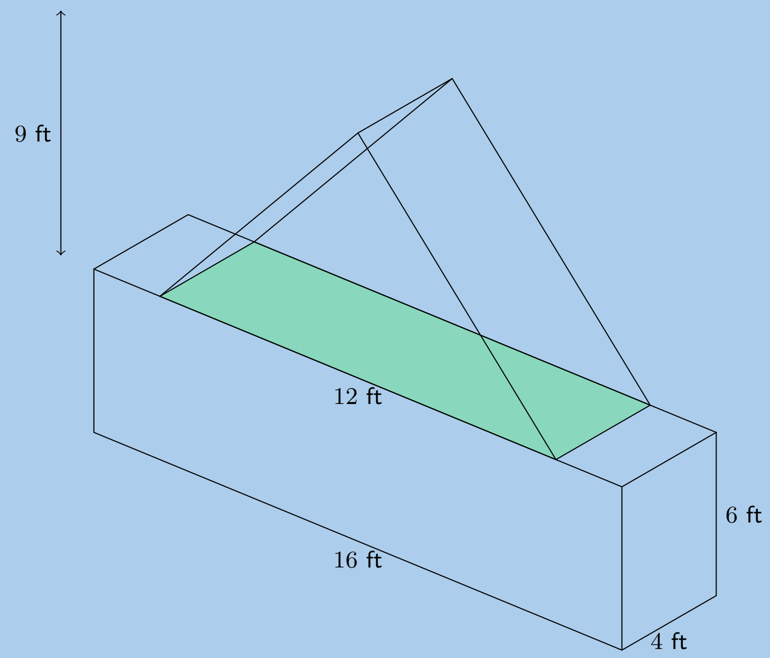
$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \pi(6)^2(11) + \frac{4}{3}\pi(6)^3 \\ &= 684\pi \\ &= 2148{,}85 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Vir die buite-oppervlakte van die twee halwe sfere kan ons die buite-oppervlakte van 'n sfeer gebruik. Vir die silinder moet ons die area van die twee sirkels uit ons berekening uitsluit aangesien hulle bedek word deur die twee halwe sfere. Die buite-oppervlakte is:

$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte} &= 2\pi r h + 4\pi r^2 \\ &= 2\pi\left(6\right)\left(11\right) + 4\pi\left(6\right)^2 \\ &= 276\pi \\ &\approx 867{,}08 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Dus is die volume en die buite-oppervlakte: 2148,85 m^3 en 867,08 m^2 onderskeidelik.

c)



Oplossing:

Die vorm bestaan uit 'n driehoekige prisma en 'n reghoekige prisma. Die volume is:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}bhH + lbh \\ &= \frac{1}{2}(12)(9)(4) + (4)(6)(16) \\ &= 600 \text{ ft}^3 \end{aligned}$$

Vir die buite-oppervlakte moet ons die basis van die driehoekige prisma uitsluit sowel as deel van top van die reghoekige prisma.

Ons moet eers die skuinshoogte van die driehoekige prisma bereken:

$$\begin{aligned} h_s^2 &= 9^2 + 4^2 \\ &= 97 \\ h_s &= \sqrt{97} \end{aligned}$$

Nou kan ons die buite-oppervlakte van die driehoekige prisma bereken. Onthou dat ons nie nodig het om die basis in ons berekening in te sluit nie, dus het ons net 2 driehoeke en 2 reghoeke.

$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte } &= 2\left(\frac{1}{2}bH\right) + 2\left(bh_s\right) \\ &= (12)(9) + 2(12)(\sqrt{97}) \\ &= 108 + 24\sqrt{97} \end{aligned}$$

Vir die reghoekige prisma kan ons die volle buite-oppervlakte bereken en dan die basis van die driehoekige prisma aftrek hiervan.

$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte } &= 2(bh) + 2(bl) + 2(hl) - \text{basis driehoeke prisma} \\ &= 2(16)(6) + 2(16)(4) + 2(6)(4) - (12)(4) \\ &= 256 \end{aligned}$$

Nou kan ons die twee buite-oppervlakte bymekaartel om die totale buite-oppervlakte te kry:

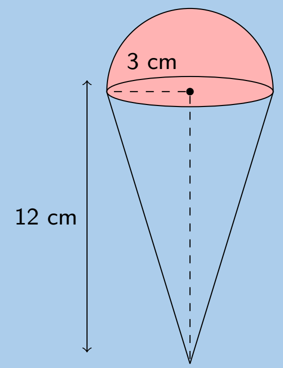
$$\begin{aligned} \text{buite-oppervlakte } &= 256 + (108 + 24\sqrt{97}) \\ &\approx 600{,}37 \text{ ft}^2 \end{aligned}$$

Die volume en die buite-oppervlakte is 600 ft^3 en 600,37 ft^2 onderskeidelik.

23. 'n Roomyshorinkie (regte keël) het 'n radius van 3 cm en 'n hoogte van 12 cm. 'n Halwe bolletjie roomys (hemisfeer) word bo-op die horinkie geskep. As die roomys smelt, sal dit in die horinkie pas? Toon al jou werk.

Oplossing:

Ons kan 'n vinnige skets maak van die probleem:

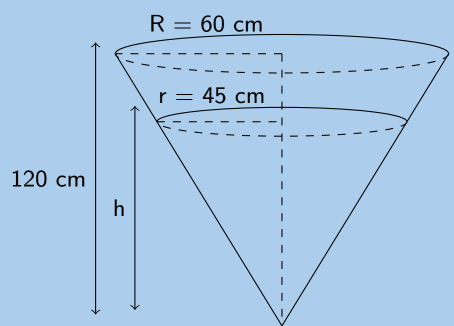


Nou bereken ons die volume van die keël en die volume van die roomys. Die skep roomys is 'n halwe sfeer en dus is die volume hiervan die helfte van die volume van 'n sfeer.

$$\begin{aligned}
V_{\text{keël}} &= \frac{\pi(3)^3 12}{3} \\
&= 36\pi \\
&\approx 113{,}1 \\
V_{\text{bolletjie}} &= \frac{4}{6} \times \pi(3)^3 \\
&= 18\pi \\
&\approx 56{,}5
\end{aligned}$$

Ja, die gesmelte roomys sal in die keëlvormige horinkie pas aangesien die volume van die roomys minder is as die volume van die keël.

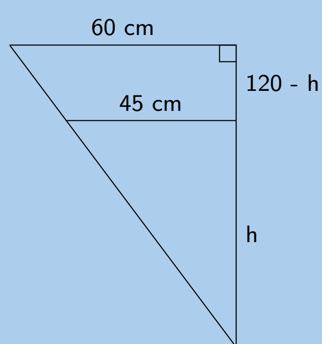
24. 'n Houer wat gevul is met petrol het die vorm van 'n omgekeerde regte sirkelvormige keël met hoogte 120 cm en die radius van die basis is 60 cm. 'n Sekere hoeveelheid brandstof word uitgetap uit die houer sodat brandstof tot op 'n diepte van h cm oor is.



a) Toon dat $h = 90$ cm.

Oplossing:

Ons kan die volgende twee driehoeke teken, gebaseer op die inligting in die figuur:



Hierdie twee driehoeke is gelykvormige driehoeke. Hulle is beide reghoekig en deel 'n gemeenskaplike hoek. Dus kan ons die verhoudinge van die sye gebruik om h te vind:

$$\begin{aligned}
\frac{h}{120} &= \frac{45}{60} \quad \text{(gelykvormige driehoeke)} \\
\therefore h &= \frac{(45)(120)}{60} \\
&= 90 \text{ cm}
\end{aligned}$$

b) Bepaal die volume van die brandstof wat uitgetap is. Druk jou antwoord uit in liters as 1 l = 1000 cm^3

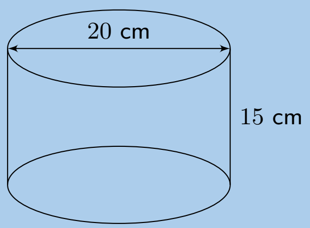
Oplossing:

Die volume brandstof wat uitgetap is, is die totale volume brandstof minus die volume brandstof wat oor is. Die volume van 'n keël is $\frac{4}{3}\pi r^2 H$. Van die vorige vraag weet ons wat die vertikale hoogte van beide keëls is.

$$\begin{aligned}\text{Volume uitgetap} &= \frac{1}{3}\pi R^2 H_{\text{begin}} - \frac{1}{3}\pi r^2 H_{\text{einde}} \\ &= \frac{1}{3}\pi(60)^2(120) - \frac{1}{3}\pi(45)^2(90) \\ &= 144\ 000\pi - 60\ 750\pi \\ &\approx 261\ 537{,}59 \text{ cm}^3 \\ &\approx 261{,}5 \text{ l}\end{aligned}$$

25. Vind die **volume** en **buite-oppervlakte** van die volgende prismas.

a)



Oplossing:

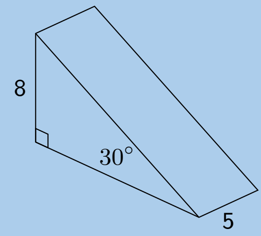
Ons het die middellyn van die silinder. Die radius is die helfte van die middellyn.

$$\begin{aligned}V &= \pi r^2 h \\ &= \pi(10)^2(15) \\ &= 15\ 000\pi \\ &\approx 47\ 123{,}89 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= 2\pi rh + 2(\pi r^2) \\ &= 2(\pi(10)(15)) + 2(\pi(10)^2) \\ &= 300\pi + 200\pi \\ &\approx 1570{,}80 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Dus is die volume en die buite-oppervlakte 47 123,89 cm^3 en 1570,80 cm^2 onderskeidelik.

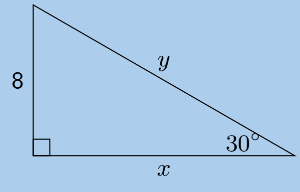
b)



Oplossing:

Hierdie is 'n driehoekige piramide. Ons het die vertikale hoogte sowel as 'n hoek. Aangesien dit 'n reghoekige driehoek is, kan ons trigonometrie gebruik om ons te help om die ontbrekende lengte te vind.

Ons teken die driehoek waarin ons belangstel, oor:



Nou kan ons x (die skuinshoogte) en y (die basis) bereken:

$$\frac{x}{8} = \tan 30°$$
$$x = 8\tan 30°$$

$$\frac{8}{y} = \sin 30°$$
$$\frac{8}{\sin 30°} = y$$

Ons weet nou wat al die lengtes is en ons wil weet hoe om die volume te bereken.

$$\begin{aligned} V &= (\frac{1}{2}bh) \times H \\ &= (\frac{1}{2}(8)(8\tan 30°)) \times 5 \\ &= 160\tan 30° \\ &\approx 92{,}38 \end{aligned}$$

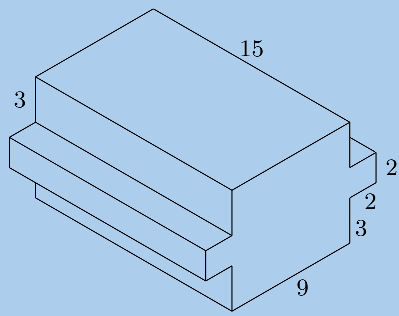
En die buite-oppervlakte is:

$$A = 2(\frac{1}{2}bh) + (H \times h_s) + (H \times h_s) + (H \times b) + (H \times h)$$

$$\begin{aligned} &= 2(\frac{1}{2}(8)(8\tan 30°) + (5 \times \frac{8}{\sin 30°}) \\ &+ (5 \times 8\tan 30°) + (5 \times 8) \\ &= 64\tan 30° + \frac{40}{\sin 30°} + 40\tan 30° + 40 \\ &\approx 180{,}04 \end{aligned}$$

Die volume en die buite-oppervlakte is 92,38 en 180,04 onderskeidelik.

c)



Oplossing:

Laat: $L = 9$, $B = 8$, $H = 15$, $l = 2$, $b = 2$ en $h = 15$.

Ons kan hierdie vorm sien as drie reghoekige prismas. Twee van die drie prismas is presies dieselfde. Die volume is dus:

$$\begin{aligned} V &= 2(lbh) + LBH \\ &= 2((2)(2)(15)) + ((8)(9)(15)) \\ &= 120 + 1080 \\ &= 1200 \end{aligned}$$

Vir die buite-oppervlakte het ons 'n aantal verskillende reghoeke. Elk van die kleiner prismas het 5 sigbare reghoeke. Die groter reghoekige prisma het 4 reghoeke wat nie bedek word deur die kleiner prismas nie. Die oorblywende twee reghoeke word gedeeltelik bedek deur die kleiner prismas en kan dus beskou word as 4 aparte reghoeke.

Ons sal begin deur die buite-oppervlakte van een van die kleiner prismas te bereken:

$$
\begin{aligned}
A_{\text{kleiner prisma}} &= 2(bl) + 2(bh) + lh \\
&= 2((2)(2)) + 2((2)(15)) + (2)(15) \\
&= 98
\end{aligned}
$$

Vir die groter prisma kry ons:

$$
\begin{aligned}
A_{\text{groter prisma}} &= 2(BH) + 2(BL) + 4(Hx) \\
&= 2((8)(15)) + 2((9)(15)) + 4((15)(3)) \\
&= 690
\end{aligned}
$$

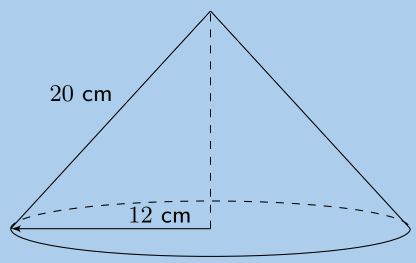
Dus is die totale buite-oppervlakte:

$$
\begin{aligned}
A &= 98 + 98 + 690 \\
&= 886
\end{aligned}
$$

Die volume en die buite-oppervlakte is 1200 en 886 onderskeidelik.

26. Bepaal die volume van die volgende:

a)

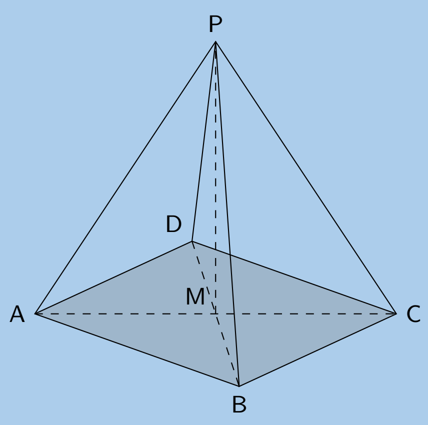


Oplossing:
Ons moet eers die vertikale hoogte (H) vind:

$$
\begin{aligned}
H &= \sqrt{(20)^2 - (12)^2} \\
&= 16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi r^2 H \\
&= \frac{1}{3}\pi (12)^2 (16) \\
&= 768\pi \\
&\approx 2412{,}743
\end{aligned}
$$

b) $ABCD$ is 'n vierkant, $AC = 12$ cm, $AP = 10$ cm.



Oplossing:
Ons kry eers die vertikale hoogte:

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{(10)^2 - (6)^2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

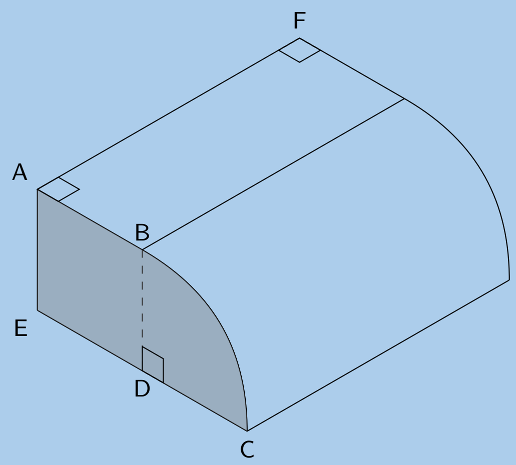
Ons moet ook die lengte van die sy van die vierkant vind. Om dit te doen let ons op dat driehoek ABC 'n reghoekige gelykbenige driehoek is. Met die stelling van Pythagoras, kan ons dus die lengte van die sy van die vierkant vind:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ 12^2 &= 2(AB^2) \\ 77 &= AB^2 \\ \therefore AB &= \sqrt{77} \end{aligned}$$

Nou kan ons die volume vind:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi b^2 H \\ &= \frac{1}{3}\pi(77)(8) \\ &= \frac{616}{3}\pi \\ &\approx 645{,}07 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

27. Die prisma hier langsaan het die volgende afmetings:
$AB = 4$ eenhede, $EC = 8$ eenhede, $AF = 10$ eenhede. BC is 'n boog van 'n sirkel met middelpunt D. $AB \parallel EC$.



a) Verduidelik hoekom BD, die radius van die sirkelboog BC, 4 eenhede is.
Oplossing:
Aangesien D die middelpunt van die sirkel is $BD = DC$ (hulle is beide radii van die sirkel).
$AB \parallel EC$ en BD verbind AB en EC, dus $AB = ED = 4$ eenhede.
Ons weet ook dat $EC = 8$ eenhede en aangesien $EC = ED + DC$, $DC = 4$ eenhede. Dus is BD 4 eenhede.

b) Bereken die oppervlakte van die gearseerde gedeelte.
Oplossing:
Ons het nou bereken dat $BD = 4$. Ons weet ook dat $AB = ED = 4$ en dus is $ABDE$ 'n vierkant ($AB \parallel EC$).
Dit beteken ons het die area van 'n vierkant plus 'n kwart van die area van 'n sirkel.
Die totale area is:

$$
\begin{aligned}
A &= AB^2 + \frac{1}{4}\pi r^2 \\
&= (4)^2 + \frac{1}{4}\pi (4)^2 \\
&= 16 + 4\pi \\
&= 28{,}57 \text{ eenhede}^2
\end{aligned}
$$

c) Vind die volume van die prisma.

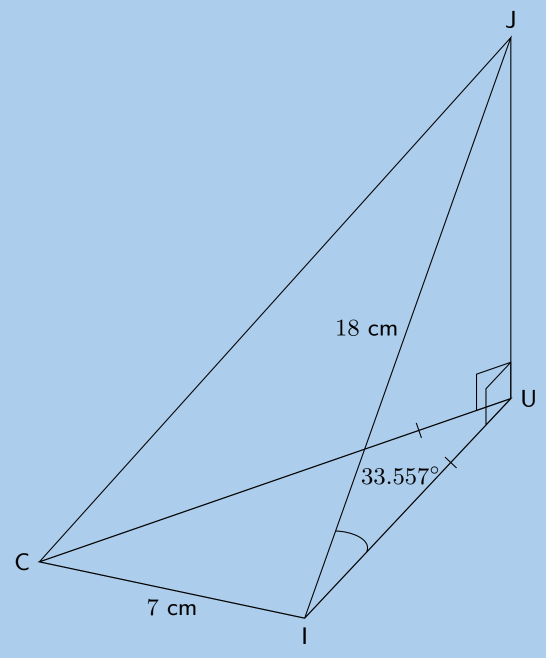
Oplossing:

Die area van die gearseerde of ingekleurde gedeelte is die area van die basis. Vir die volume weet ons dat ons die volume kan bereken deur die area van die basis te vermenigvuldig met die hoogte.

$$
\begin{aligned}
V &= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte} \\
&= (16 + 4\pi) \times (10) \\
&= 285{,}664 \text{ eenhede}^3
\end{aligned}
$$

Jy kan ook die volume bereken deur die volume van die reghoekige prisma en 'n kwart van die volume van 'n silinder te gebruik.

28. 'n Koeldrankhouer is gemaak in die vorm van 'n piramide met 'n gelykbenige driehoekige basis. Dit staan bekend as 'n tetrahedron. Die hoogtehoek na die bopunt van die houer, is 33,557°. $CI = 7$ cm; $JI = 18$ cm.



a) i. Wys dat die lengte UI, 15 cm is.

ii. Vind die hoogte van JU (tot die naaste eenheid).

iii. Bereken die area van $\triangle CUI$.
Wenk: konstrueer 'n loodregte lyn van U tot CI

iv. Vind die volume van die houer

Oplossing:

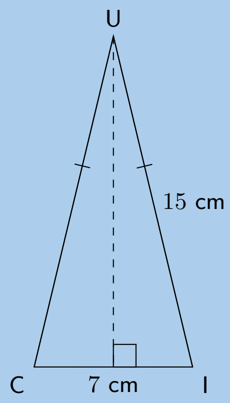
i. $\triangle UIJ$ is 'n reghoekige driehoek. Ons kan trigonometrie gebruik om ons te help om UI te vind. In hierdie geval, sal ons die cosinus verhouding gebruik omdat ons die skuinssy het (JI) en ons die aangrensende sy wil kry (UI).

$$
\begin{aligned}
\cos 33{,}577^\circ &= \frac{UI}{JI} \\
UI &= 18 \cos 33{,}577^\circ \\
&= 15 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

ii. $\triangle UIJ$ is 'n reghoekige driehoek. Ons kan trigonometrie gebruik om ons te help om JU te kry. In hierdie geval gebruik ons die sinus verhouding omdat ons die skuinssy het (JI) en die teenoorstaande sy wil kry (JU).

$$\begin{aligned} \sin 33{,}577^\circ &= \frac{JU}{JI} \\ JU &= 18 \sin 33{,}577^\circ \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

iii.



Bepaal eers vir h:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{15^2 - 3{,}5^2} \\ &= 14{,}586 \end{aligned}$$

Nou kan ons die oppervlakte vind:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}(3{,}5)(14{,}586) \\ &= 25{,}526 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(bh) \times JU \\ &= \frac{1}{3} \times (25{,}526)(9{,}950) \\ V &= 84{,}661 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

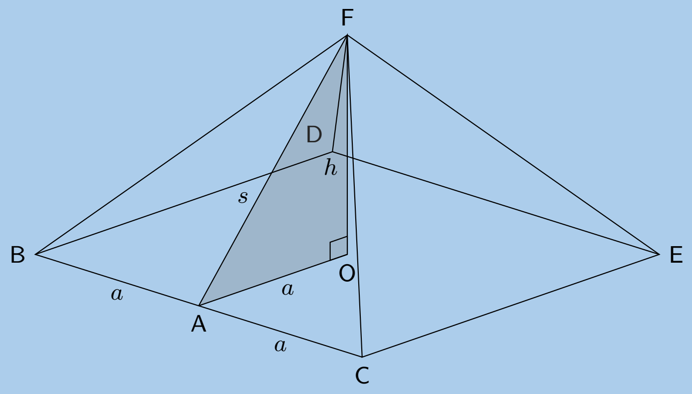
b) Die houer word gevul met sap sodat 'n 11,85% opening vir lug gelaat word. Bepaal die volume van die sap.

Oplossing:

Om die volume van die sap te vind, moet ons die totale volume van die houer vermenigvuldig met die persentasie sap in die houer.

$$\begin{aligned} V_j &= V \times (1 - 0{,}1185) \\ &= 0{,}8815(84{,}661) \\ V_j &= 74{,}626 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

29. Hieronder is 'n diagram van Die Groot Piramide.
Dit is 'n vierkantige piramide en O is die middelpunt van die vierkant.



$BA = AC = a$ en $OF = h =$ hoogte van die piramide. Die lengte van die sy van die piramide is $BC = 755{,}79$ voet en die hoogte van die piramide is 481,4 voet.

a) Bepaal die area van die basis van die piramide in terme van a.
Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= b^2 \\ &= (2a)^2 \\ &= 4a^2 \end{aligned}$$

b) Bereken $AF(= s)$ tot 5 desimale plekke.
Oplossing:

$$BC = 2a$$

$$\begin{aligned} AF &= \sqrt{a^2 + h^2} \\ &= \sqrt{(0{,}5BC)^2 + (OF)^2} \\ &= \sqrt{(377{,}895)^2 + (481{,}4)^2} \\ &= 612{,}00538 \text{ voet} \end{aligned}$$

c) Van jou berekening in vraag (b), bepaal $\frac{s}{a}$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{s}{a} &= \frac{612{,}00538}{377{,}895} \\ &= 1{,}620 \end{aligned}$$

d) Bepaal die volume en buite-oppervlakte van die piramide.
Oplossing:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi b^2 H \\ &= \frac{1}{3}\pi (2a)^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi (755{,}79)^2 (481{,}4) \\ &\approx 91\ 661\ 532{,}5 \text{ voet}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= b(b + 2h_s) \\ &= 2a(2a + 2(s)) \\ &= 755{,}79(755{,}79 + 1224{,}0176) \\ &\approx 1\ 551\ 425{,}432 \text{ voet}^2 \end{aligned}$$

Die volume en die buite-oppervlakte is: 91 661 532,5 voet^3 en 1 551 425,432 voet^2 onderskeidelik.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KG9	2. 2KGB	3. 2KGC	4. 2KGD	5. 2KGF	6. 2KGG
7. 2KGH	8. 2KGJ	9. 2KGK	10. 2KGM	11. 2KGN	12. 2KGP
13. 2KGQ	14. 2KGR	15a. 2KGS	15b. 2KGT	16. 2KGV	17. 2KGW
18. 2KGX	19a. 2KGY	19b. 2KGZ	19c. 2KH2	19d. 2KH3	20. 2KH4
21. 2KH5	22a. 2KH6	22b. 2KH7	22c. 2KH8	23. 2KH9	24. 2KHB
25a. 2KHC	25b. 2KHD	25c. 2KHF	26a. 2KHG	26b. 2KHH	27. 2KHJ
28. 2KHK	29. 2KHM				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 14

Waarskynlikheid

- Hierdie hoofstuk behandel die gebruik van waarkynlikheidsmodelle om relatiewe frekwensie te vergelyk met teoretiese waarskynlikheid. Venn diagramme word aan die orde gestel en gebruik om waarskynlikheidsprobleme op te los. Snyding, vereniging, wedersyds uitsluitende gebeurtenisse en komplementêre gebeurtenisse word almal ingelei.
- Die verskil tussen teoretiese waarskynlikheid en relatiewe frekwensie moet noukeurig verduidelik word.
- Die terminologie en taalgebruik in hierdie afdeling kan verwarrend wees, veral vir tweede-taal sprekers. Bespreek terminologie gereeld en beklemtoon die versigtige lees van vrae.
- Vereniging en snyding simbole is ingesluit, maar ″en″ en ″of″ is die voorkeur notasie in CAPS.
- Maak seker om die verskille tussen ″en″, ″of″, ″slegs″ en ″beide″ duidelik uit te wys. Byvoorbeeld, daar mag geen verskil wees tussen tee- **en** koffiedrinkers en tee- **of** koffiedrinkers in algemene geselstaal nie, maar in waarskynlikheid het ″en″ en ″of″ baie spesifieke betekenisse. Tee- **en** koffiedrinkers verwys na die snyding van teedrinkers met koffiedrinkers, d.w.s. diegene wat beide drink, terwyl tee- **of** koffiedrinkers verwys na vereniging, d.w.s. diegene wat slegs tee drink, diegene wat slegs koffie drink en diegene wat wat beide drink.

14.1 Teoretiese waarskynlikheid

Exercise 14 – 1:

1. ′n Leerder wil die term ″gebeurtenis″ verstaan. Dus rol die leerder 2 dobbelstene in die hoop om ′n totaal van 8 te kry. Watter van die volgende is die mees toepaslike voorbeeld van die term ″gebeurtenis″?
   - gebeurtenisversameling $= \{(4;4)\}$
   - gebeurtenisversameling $= \{(2;6);(3;5);(4;4);(5;3);(6;2)\}$
   - gebeurtenisversameling $= \{(2;6);(6;2)\}$

   Oplossing:

   Ons herroep die definisie van die term ″gebeurtenis″.

   ′n Gebeurtenis is ′n spesifieke stel uitkomste vir ′n eksperiment waarin ons belangstel.

   Die mees toepaslike voorbeeld van die term "gebeurtenis" is gebeurtenisversameling $= \{(2;6);(3;5);(4;4);(5;3);(6;2)\}$.
2. ′n Leerder wil die term ″steekproefruimte″ verstaan. Dus rol die leerder ′n dobbelsteen. Watter van die volgende is die mees toepaslike voorbeeld van die term ″steekproefruimte″?
   - $\{1;2;3;4;5;6\}$
   - $\{K;S\}$
   - $\{1;3;5\}$

   Oplossing:

   Ons herroep die definisie van die term ″steekproefruimte″.

   Die steekproefruimte van ′n eksperiment is die versameling van alle moontlike uitkomste van die eksperiment.

   Die mees toepaslike voorbeeld van die term "steekproefruimte" is $\{1;2;3;4;5;6\}$
3. ′n Leerder kry ′n 6-kantige dobbelsteen en rol dit dan eenmaal op ′n tafel. Wat is die waarskynlikheid dat die dobbelsteen op ′n 1 of ′n 2 sal land?

   Skryf jou antwoord as ′n vereenvoudigde breuk.

   Oplossing:

   $$n(E) = \text{aantal uitkomstes in die gebeurtenisversameling} = 2$$
   $$n(S) = \text{aantal moontlike uitkomstes in die steekproefruimte} = 6$$

   Laastens bereken ons die waarskynlikheid:

   $$\begin{aligned} P(E) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{2}{6} \\ P(E) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   Die waarskynlikheid dat die dobbelsteen op ′n 1 of ′n 2 sal land, is $= \frac{1}{3}$.

4. 'n Leerder kry 'n handboek wat 100 bladsye het. Sy kies dan een bladsy van die handboek. Wat is die waarskynlikheid dat die bladsy 'n onewe bladsynommer het?
   Skryf jou antwoord as 'n desimaal (korrek tot 2 desimale plekke).
   Oplossing:

$$\begin{aligned} n(E) &= \text{aantal uitkomstes in die gebeurtenisversameling} = 50 \\ n(S) &= \text{aantal moontlike uitkomstes in die steekproefruimte} = 100 \end{aligned}$$

   Laastens bereken ons die waarskynlikheid:

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{50}{100} \\ P(E) &= 0{,}50 \end{aligned}$$

   Die waarskynlikheid dat die bladsy 'n onewe bladsynommer het = 0,50.
5. Ewe getalle van 2 tot 100 word op kaarte geskryf. Wat is die waarskynlikheid om 'n veelvoud van 5 te kies as 'n kaart willekeurig gekies word?
   Oplossing:
   Daar is 50 kaarte. Hulle is almal ewe.
   Alle ewe getalle wat ook veelvoude van 5 of 10 is $(10,\ 20, \ldots, 100)$.
   Daar is 10 van hulle.
   Dus is die waarskynlikheid om 'n kaart te kies wat 'n veelvoud van 5 is $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$.
6. 'n Sak bevat 6 rooi balle, 3 blou balle, 2 groen balle en 1 wit bal. 'n Bal word willekeurig gekies. Bepaal die waarskynlikheid dat dit:

   a) rooi is
   Oplossing:

$$\begin{aligned} n(E) &= 6 \\ n(S) &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{6}{12} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   b) blou of wit is
   Oplossing:

$$\begin{aligned} n(E) &= 3 + 1 = 4 \\ n(S) &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{4}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   c) nie groen is nie
   Oplossing:

$$n(E) = 6 + 3 + 1 = 10$$
$$n(S) = 12$$

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{10}{12} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

d) nie groen of rooi is nie
Oplossing:

$$n(E) = 3 + 1 = 4$$
$$n(S) = 12$$

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{4}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

7. 'n Speelkaart word willekeurig gekies uit 'n pak van 52 kaarte. Bepaal die waarskynlikheid dat dit:

a) die 2 van harte is
Oplossing:

$$n(E) = 1$$
$$n(S) = 52$$

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{1}{52} \end{aligned}$$

b) 'n rooi kaart is
Oplossing:
Helfte van die pak is rooi is en helfte van die pak is swart.

$$n(E) = 26$$
$$n(S) = 52$$

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{26}{52} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) 'n prentkaart is
Oplossing:
Daar is 3 prentkaarte in 'n stel en daar is 4 stelle.

$$n(E) = 12$$
$$n(S) = 52$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

d) 'n aas is
Oplossing:
Daar is 4 ase in 'n pak.

$$n(E) = 4$$
$$n(S) = 52$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

e) 'n getal kleiner as 4 is
Oplossing:
Vir elke stel van 13 kaarte is daar 3 kaarte kleiner as 4: A, 2 en 3.

$$n(E) = 12$$
$$n(S) = 52$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.
1. 2KHQ 2. 2KHR 3. 2KHS 4. 2KHT 5. 2KHV 6. 2KHW 7. 2KHX

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

14.2 Relatiewe frekwensie

Exercise 14 – 2:

1. 'n Dobbelsteen word 44 keer gegooi en land 5 keer op die getal 3.
   Wat is die relatiewe frekwensie daarvan om 'n 3 gooi met die dobbelsteen? Skryf jou antwoord neer tot 2 desimale plekke.

Oplossing:
Herroep die formule:

$$f = \frac{p}{t}$$

Identifiseer veranderlikes benodig:

$$\begin{aligned} p &= \text{aantal positiewe probeerslae} = 5 \\ f &= \text{totale aantal probeerslae} = 44 \end{aligned}$$

Bereken:

$$\begin{aligned} f &= \frac{p}{t} \\ &= \frac{5}{44} \\ f &= 0{,}11 \end{aligned}$$

Dus is die relatiewe frekwensie om 'n 3 te gooi 0,11.

2. 'n Muntstuk word 30 keer opgeskiet en land 17 keer op kop.
Wat is die relatiewe frekwensie daarvan dat 'n muntstuk op kop land? Skryf jou antwoord neer korrek tot 2 desimale plekke.
Oplossing:
Herroep die formule:

$$f = \frac{p}{t}$$

Identifiseer veranderlikes benodig:

$$\begin{aligned} p &= \text{aantal positiewe probeerslae} = 17 \\ f &= \text{totale aantal probeerslae} = 30 \end{aligned}$$

Bereken:

$$\begin{aligned} f &= \frac{p}{t} \\ &= \frac{17}{30} \\ f &= 0{,}57 \end{aligned}$$

Dus is die relatiewe frekwensie dat 'n muntstuk kop land 0,57.

3. 'n Dobbelsteen word 27 keer gegooi en land 6 keer op die getal 6.
Wat is die relatiewe frekwensie daarvan om waar te neem dat die dobbelsteen op die getal 6 land? Skryf jou antwoord korrek tot 2 desimale plekke.
Oplossing:
Herroep die formule:

$$f = \frac{p}{t}$$

Identifiseer veranderlikes benodig:

$$\begin{aligned} p &= \text{aantal positiewe probeerslae} = 6 \\ f &= \text{totale aantal probeerslae} = 27 \end{aligned}$$

Bereken:

$$\begin{aligned} f &= \frac{p}{t} \\ &= \frac{6}{27} \\ f &= 0{,}22 \end{aligned}$$

Dus is die relatiewe frekwensie daarvan om waar te neem dat die dobbelsteen op die getal 6 land 0,22.

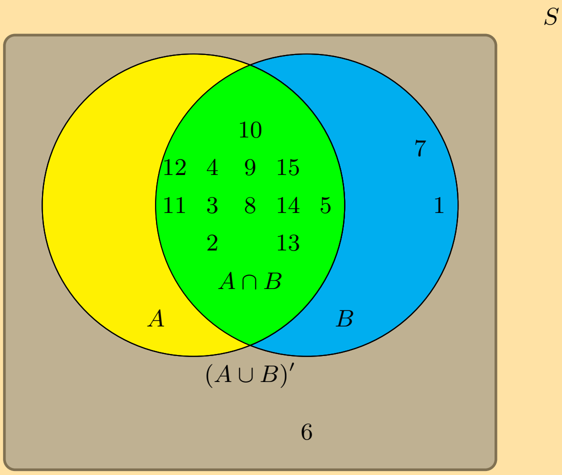
Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2KHZ 2. 2KJ2 3. 2KJ3

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Jy kan 'n aanlyn hulpmiddel soos hierdie een gebruik om 'n Venndiagram saam te stel.

Exercise 14 – 3:

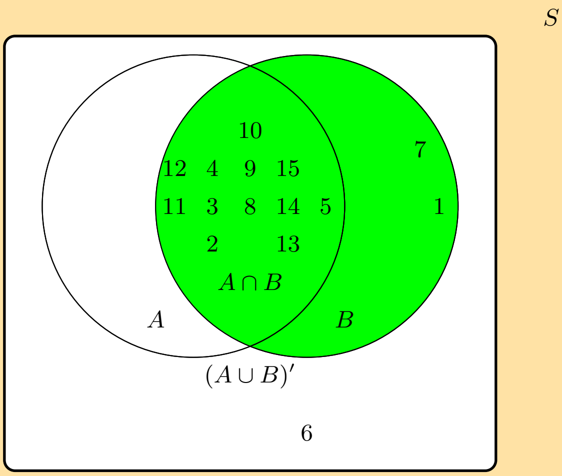
1. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Daar word van hulle gevra om die gebeurtenisversameling van B te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.
Watter van die volgende versamelings beskryf die gebeurtenisversameling B die beste?

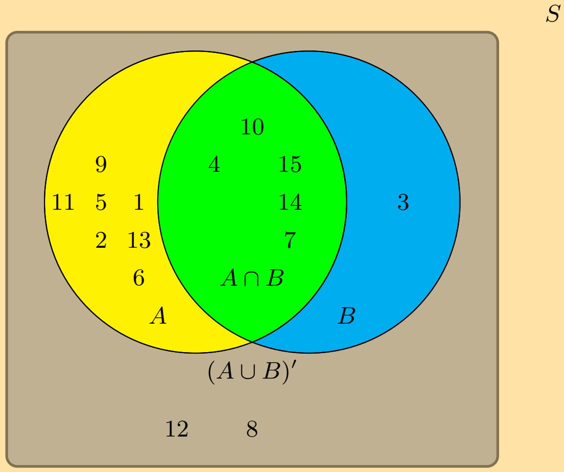
- $\{2; 3; 4; 5; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$
- $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15\}$
- $\{1; 6; 7\}$
- $\{6\}$

Oplossing:
Die gebeurtenisversameling B kan as volg gearseer word:



Dus die versameling $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$ beskryf die gebeurtenisversameling van B die beste.

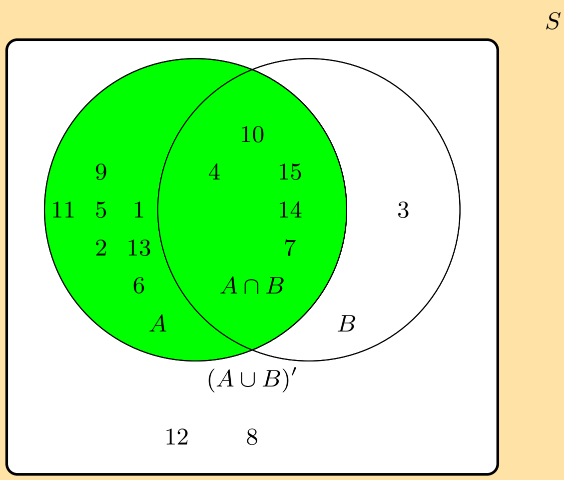
2. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Daar word van hulle gevra om die gebeurtenisversameling van A te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.
Watter van die volgende versamelings beskryf die gebeurtenisversameling A die beste?

- $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15\}$
- $\{3; 8; 12\}$
- $\{3; 4; 7; 10; 14; 15\}$
- $\{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14; 15\}$
- $\{4; 7; 10; 14; 15\}$

Oplossing:
Die gebeurtenisversameling A kan as volg gearseer word:



Dus die versameling $\{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14; 15\}$ beskryf die gebeurtenisversameling van A die beste.

3. Stukkies papier waarop die getalle van 1 tot 12 geskryf is, word in 'n boks geplaas en die boks word geskud. Een stukkie papier word uitgehaal en dan teruggeplaas.

   a) Wat is die steekproefruimte, S?
   Oplossing:
   $S = \{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 12\}$ of $S = \{1; 2; \ldots ; 12\}$.

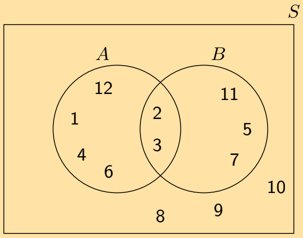
   b) Skryf die versameling A neer. Dit verteenwoordig die gebeurtenis om 'n papiertjie te trek met 'n getal op wat 'n faktor is van 12.
   Oplossing:
   $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

   c) Skryf die versameling B neer. Dit verteenwoordig die gebeurtenis om 'n papiertjie te trek met 'n priemgetal op.
   Oplossing:

$B = \{2; 3; 5; 7; 11\}$.

d) Stel A, B en S deur middel van 'n Venndiagram.

Oplossing:



e) Vind:

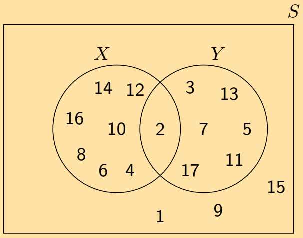
i. $n(S)$ ii. $n(A)$ iii. $n(B)$

Oplossing:

i. 12 ii. 6 iii. 5

4. Gestel S stel 'n versameling heelgetalle voor van 1 tot 16, X stel die versameling ewe getalle voor van 1 tot 16 en Y stel die versameling priemgetalle voor van 1 tot 16. Trek 'n Venndiagram wat S, X en Y voorstel.

Oplossing:



5. Daar is 71 Graad 10 leerders by die skool. Al hierdie leerders neem 'n kombinasie van Wiskunde (M), Geografie (G) en Geskiedenis (H). Die aantal wat Geografie neem is 41, 36 neem Geskiedenis, en 30 neem Wiskunde. Die aantal wat Wiskunde en Geskiedenis neem, is 16; die getal wat Geografie en Geskiedenis neem, is 6, en daar is 8 wat slegs Wiskunde neem en 16 wat slegs Geskiedenis neem.

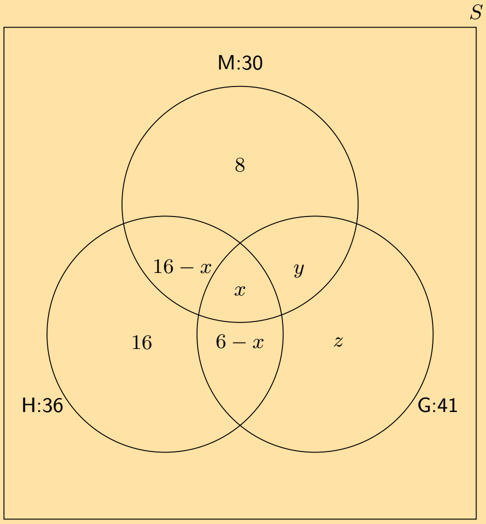
a) Trek 'n Venndiagram om al hierdie inligting te illustreer.

Oplossing:

Ons word vertel dat 16 leerders Wiskunde en Geskiedenis neem. Van hierdie 16 leerders neem sommige Geografie ook en sommige nie.

Ons word ook vertel dat 6 leerders Geografie en Geskiedenis neem. Van hierdie 6 leerders neem sommige Wiskunde ook en sommige nie.

Gestel die getal leerders wat Wiskunde, Geskiedenis en Geografie neem is $= x$. Dan kan ons hierdie Venndiagram teken:



b) Hoeveel leerders neem Wiskunde en Geografie maar nie Geskiedenis nie?

Oplossing:

In die Venndiagram hierbo word die getal leerders wat Wiskunde en Geografie neem maar nie Geskiedenis nie, aangedui met y. Om y te vind moet ons eers x bepaal.

Om x te vind, let ons op dat die totale aantal leerders wat Geskiedenis neem gelyk is aan die som van elk van die volgende:

- Die aantal leerders wat slegs Geskiedenis neem: 16
- Die aantal leerders wat Geskiedenis en Wiskunde neem, maar nie Geografie nie: $16 - x$
- Die aantal leerders wat Geskiedenis en Geografie neem, maar nie Wiskunde nie: $6 - x$
- Die aantal leerders wat al drie vakke neem: x

$$\begin{aligned} 36 &= 16 + (16 - x) + (6 - x) + x \\ &= 16 + 16 - x + 6 - x + x \\ &= 38 - x \\ \therefore x &= 2 \end{aligned}$$

Nou kan ons y kry deur dieselfde metode te gebruik as om x te vind. Hierdie keer sal ons die totale aantal leerders gebruik wat Wiskunde neem.

$$\begin{aligned} 30 &= 8 + (16 - x) + x + y \\ &= 8 + 14 + 2 + y \\ &= 24 + y \\ \therefore y &= 6 \end{aligned}$$

Dus: 6 leerders neem Wiskunde en Geografie, maar nie Geskiedenis nie.

c) Hoeveel leerders neem slegs Geografie?

Oplossing:

Ons moet nou z vind. Ons gebruik die totale aantal leerders wat Geografie neem om z te vind.

$$\begin{aligned} 41 &= (6 - x) + x + y + z \\ &= 4 + 2 + 6 + z \\ &= 12 + z \\ \therefore z &= 29 \end{aligned}$$

Dus: 29 leerders neem net Geografie.

d) Hoeveel leerders neem al drie vakke?

Oplossing:

Toe ons die Venndiagram getrek het, het ons gestel dat x leerders al drie vakke neem. Ons het x bereken in die eerste vraag. Dus 2 leerders neem al drie vakke.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

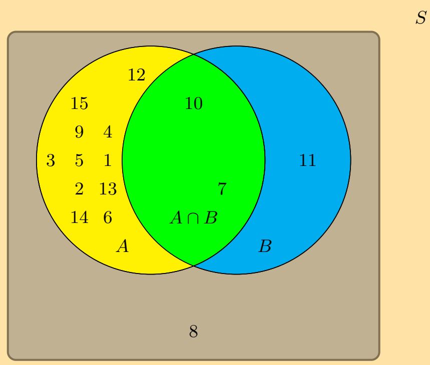
1. 2KJ5 2. 2KJ6 3. 2KJ7 4. 2KJ8 5. 2KJ9

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

14.4 Vereniging en snyding

Exercise 14 – 4:

1. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.

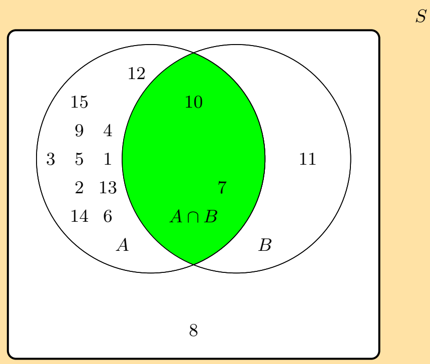
Hulle word gevra om die gebeurtenisversameling van die snyding tussen gebeurtenisversameling A en gebeurtenisversameling B, ook geskryf as $A \cap B$, te identifiseer. Hulle steek vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.

Watter versameling beskryf die gebeurtenisversameling van $A \cap B$ die beste?

- $\{7; 10; 11\}$
- $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\}$
- $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}$
- $\{7; 10\}$

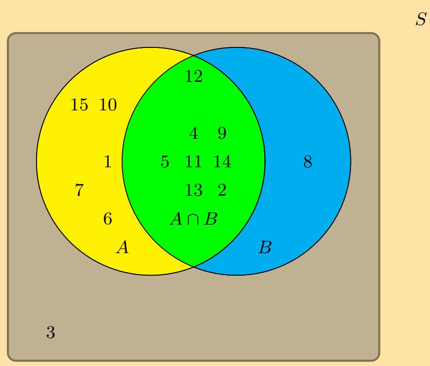
Oplossing:

Die snyding tussen gebeurtenisversameling A en gebeurtenisversameling B, wat ook geskryf kan word as $A \cap B$, kan as volg ingekleur word:



Dus die versameling $\{7; 10\}$ beskryf die gebeurtenisversameling van $A \cap B$ die beste.

2. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf kan word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$

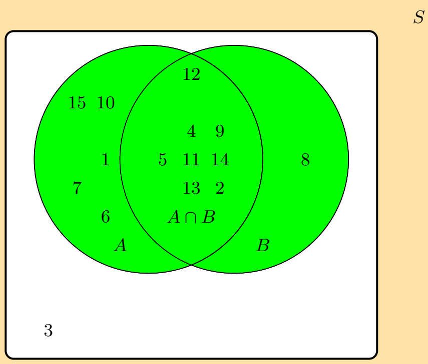
Hulle word gevra om die gebeurtenisversameling van die die vereniging tussen gebeurtenisversameling A en gebeurtenisversameling B, ook geskryf as $A \cup B$, te identifiseer.. Hulle haak vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.

Watter versameling beskryf die gebeurtenisversameling van $A \cup B$ die beste?

- $\{1; 6; 7; 10; 15\}$
- $\{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$
- $\{2; 4; 5; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$
- $\{3\}$

Oplossing:

Die vereniging tussen gebeurtenisversameling A en gebeurtenisversameling B, ook geskryf as $A \cup B$, kan as volg gearseer word:



Dus die versameling $\{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$ beskryf die gebeurtenisversameling van $A \cup B$ die beste.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2KJB 2. 2KJC

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

14.5 Waarskynlikheidsidentiteite

Exercise 14 – 5:

1. Die volgende gebeurtenisversameling word aan 'n groep leerders gegee:

Gebeurtenisversameling A	1	2	5	6

Gebeurtenisversameling B	3

Gebeurtenisversameling $A \cap B$	leeg

Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 6\}$.
Hulle word gevra om die waarde van $P(A \cup B)$ te bereken. Hulle haak vas en jy bied aan om dit vir hulle te bereken. Gee jou antwoord as 'n desimale getal, afgerond tot twee desimale plekke.

Oplossing:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Identifiseer veranderlikes benodig:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = 0{,}67$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{6} = 0{,}17$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$

Bereken $P(A \cup B)$:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(B) + P(A) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= (0{,}17) + (0{,}67) - (0) \\ P(A \cup B) &= 0{,}83 \end{aligned}$$

Die waarde van $P(A \cup B)$ is 0,83.

2. Die volgende gebeurtenisversameling word aan 'n groep leerders gegee:

Gebeurtenisversameling A	1	2	6

Gebeurtenisversameling B	1	5

Gebeurtenisversameling $A \cup B$	1	2	5	6

Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 6\}$.
Hulle word gevra om die waarde van $P(A \cap B)$ te bereken. Hulle kan dit nie regkry nie en jy bied aan om dit vir hulle te bereken. Gee jou antwoord as 'n desimale getal, afgerond tot twee desimale plekke.

Oplossing:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Maak $P(A \cap B)$ die onderwerp en ons kry:

$$P(A \cap B) = P(B) + P(A) - P(A \cup B)$$

Identifiseer veranderlikes benodig:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = 0{,}5 \\ P(B) &= \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = 0{,}33 \\ P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = 0{,}67 \end{aligned}$$

Bereken $P(A \cap B)$:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) + P(A) - P(A \cup B) \\ P(A \cap B) &= (0{,}33) + (0{,}5) - (0{,}67) \\ P(A \cap B) &= 0{,}17 \end{aligned}$$

Die waarde van $P(A \cap B)$ is 0,17.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'. 1. 2KJF 2. 2KJG

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

14.6 Wedersyds uitsluitende gebeurtenisse

Exercise 14 – 6:

Sê of die volgende gebeurtenisse wedersyds uitsluitend is of nie.

1. 'n Yskas bevat lemoensap, appelsap en druiwesap. 'n Koeldrank word willekeurig gekies uit die yskas. Gebeurtenis A: die koeldrank is lemoensap. Gebeurtenis B: die koeldrank is appelsap.

Oplossing:

Ons kies net een koeldrank uit die yskas. Hierdie koeldrank kan nie beide lemoensap en appelsap wees nie. Dus is hierdie twee gebeurtenisse wedersyds uitsluitend.

2. ’n Pakkie kolwyntjies bevat sjokeladekoekies, vanillakoekies en rooi fluweelkoekies. ’n Kolwyntjie word willekeurig uit die pakkie geneem. Gebeurtenis A: die kolwyntjie is rooi fluweel. Gebeurtenis B: die kolwyntjie is vanilla.

   Oplossing:

   Ons kies net een kolwyntjie uit die pakkie. Hierdie kolwyntjie kan nie gelyktydig rooi fluweel en vanilla wees nie. Dus is hierdie twee gebeurtenisse wedersyds uitsluitend.

3. ’n Kaart word willekeurig uit ’n pak kaarte gekies. Gebeurtenis A: die kaart is rooi kaart. Gebeurtenis B: die kaart is ’n prentkaart.

   Oplossing:

   Ons kies net een kaart uit die pak. Hierdie kaart kan beide ’n rooi kaart en ’n prentkaart wees. Dus is hierdie twee gebeurtenisse nie wedersyds uitsluitend nie.

4. ’n Krieketspan speel ’n wedstryd. Gebeurtenis A: hulle wen die wedstryd. Gebeurtenis B: hulle verloor die wedstryd.

   Oplossing:

   Die krieketspan kan of die wedstryd wen of die wedstryd verloor. Hulle kan nie gelyktydig die wedstryd wen en verloor nie. Dus is hierdie twee gebeurtenisse wedersyds uitsluitend.

   Let daarop dat ’n gelykop uitslag nie tel as wen of verloor nie. In ’n gelykop uitslag het nie een van die twee spanne die wedstryd gewen nie .

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op ’Oefen Wiskunde’.

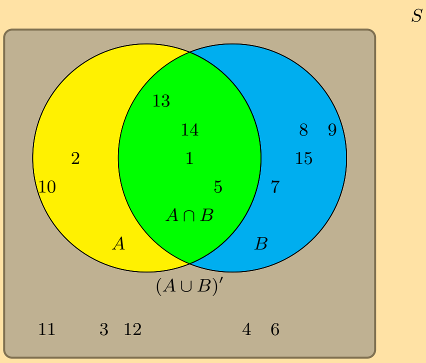
1. 2KJH 2. 2KJJ 3. 2KJK 4. 2KJM

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

14.7 Komplementêre gebeurtenisse

Exercise 14 – 7:

1. Die volgende Venndiagram word vir ’n groep leerders gegee:

   Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.

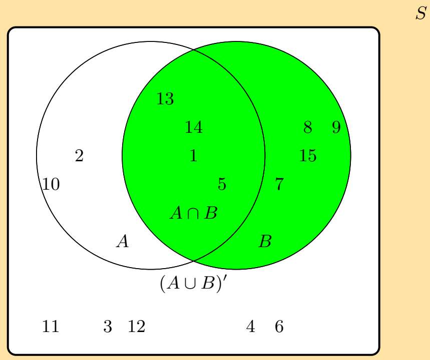
   Hulle word gevra om die komplementêre gebeurtenisversameling van B, ook bekend as B' te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om te hulle te help om dit te kry.

   Watter van die volgende versamelings beskryf die gebeurtenisversameling B' die beste?

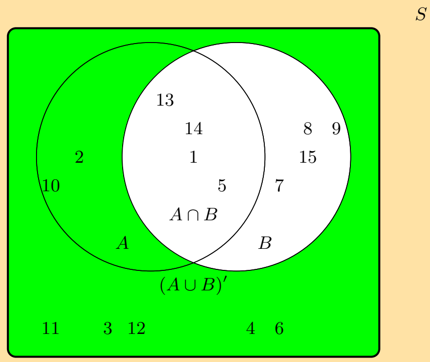
   - $\{1; 5; 13; 14\}$
   - $\{2; 3; 4; 6; 10; 11; 12\}$
   - $\{3; 4; 6; 11; 12\}$

   Oplossing:

   Die gebeurtenisversameling B kan gearseer word as:

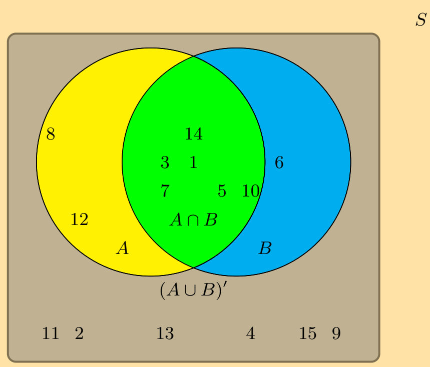


Die komplementêre gebeurtenisversameling B' kan as volg gearseer word:



Die versameling $\{2; 3; 4; 6; 10; 11; 12\}$ beskryf die komplementêre versameling van B, ook bekend as B', die beste.

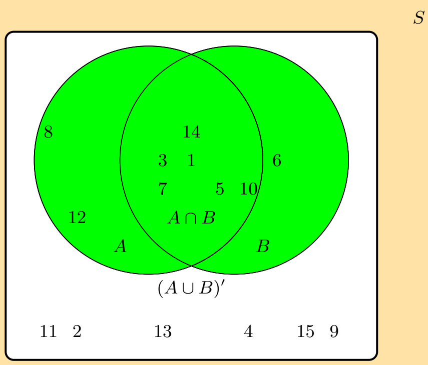
2. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



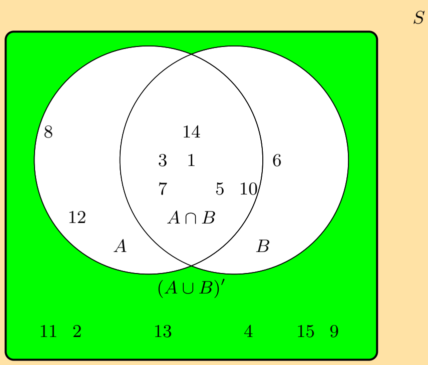
Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Hulle word gevra om die komplementêre gebeurtenisversameling van $(A \cup B)$, ook bekend as $(A \cup B)'$ te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om te hulle te help om dit te kry.
Watter van die volgende versamelings beskryf die gebeurtenisversameling $(A \cup B)'$ die beste?

- $\{2; 4; 9; 11; 13; 15\}$
- $\{1; 3; 5; 6; 7; 8; 10; 12; 14\}$
- $\{6; 8; 12\}$

Oplossing:
Die gebeurtenisversameling $(A \cup B)$ kan gearseer word as:

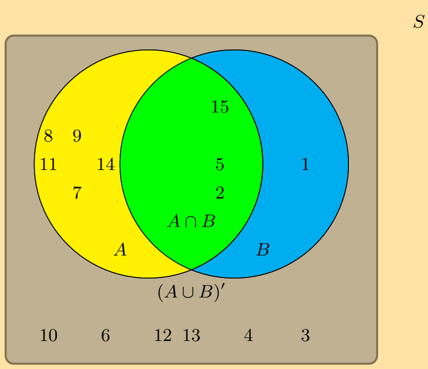


Die komplementêre gebeurtenisversameling $(A \cup B)'$ kan as volg gearseer word:



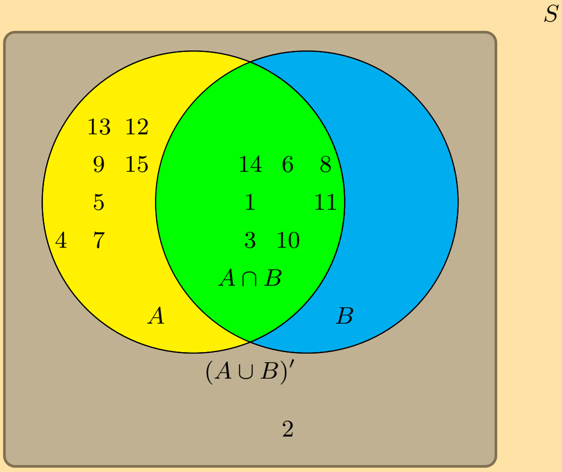
Die versameling $\{2; 4; 9; 11; 13; 15\}$ beskryf die komplementêre versameling van $(A \cup B)$, ook bekend as $(A \cup B)'$, die beste.

3. Gegee die volgende Venndiagram:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \epsilon \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Is $(A \cup B)'$ en $A \cup B$ wedersyds uitsluitend?
Oplossing:
Ons herroep die definisie van die term "wedersyds uitsluitend".
Twee gebeurtenisse is wedersyds uitsluitend as hulle nie terselfdertyd kan voorkom nie.
Die gebeurtenisversameling $(A \cup B)'$ is: $\{3; 4; 10; 12; 13\}$
Die gebeurtenisversameling $A \cup B$ is: $\{1; 2; 5; 6; 7; 8; 9; 11; 14; 15\}$
Die vraag wat ons moet vra, is: Kan hulle op dieselfde tyd voorkom?
Deur beide versamelings te beskou, kan ons die volgende oorvleuelende gebeurtenisversameling identifiseer $\{\}$ of $\varnothing$.
Dus is die gebeurtenisversamelings $(A \cup B)'$ en $A \cup B$ wedersyds uitsluitend in hierdie voorbeeld.

4. Gegee die volgende Venndiagram:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Is A' en B' wedersyds uitsluitend?

Oplossing:

Ons herroep die definisie van die term "wedersyds uitsluitend".
Twee gebeurtenisse is wedersyds uitsluitend as hulle nie terselfdertyd kan voorkom nie.
Die gebeurtenisversameling A' is: $\{2\}$
Die gebeurtenisversameling B' is: $\{2; 4; 5; 7; 9; 12; 13; 15\}$
Die vraag wat ons moet vra, is: Kan hulle op dieselfde tyd voorkom?
Deur te kyk na beide versamelings, kan ons die volgende oorvleuelende gebeurtenisversameling identifiseer: $\{2\}$
Dus is die gebeurtenisversamelings A' en B' nie wedersyds uitsluitend in hierdie voorbeeld nie.

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.
1. 2KJN 2. 2KJP 3. 2KJQ 4. 2KJR

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

14.8 Hoofstuk opsomming

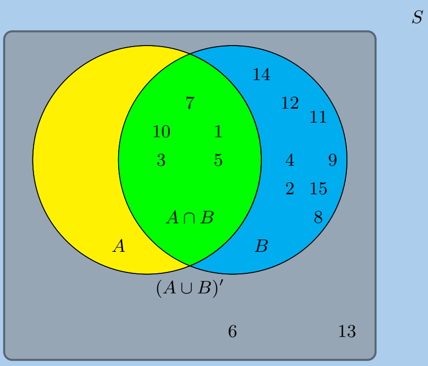
Hierdie video som die konsepte op wat gedek word in hierdie hoofstuk. Let daarop dat sommige van die voorbeeld wat gebruik word in hierdie video nie geskik mag wees vir alle leerders nie.

End of chapter Exercise 14 – 8:

1. 'n Leerder wil die term "uitkoms" verstaan. Dus gooi die leerder 'n dobbelsteen. Watter van die volgende is die mees toepaslike voorbeeld van die term "uitkoms"?
   - 'n Onderwyser stap die klaskamer binne.
   - Die dobbelsteen land op die gestel 5.
   - Die horlosie slaan 3 nm.

   Oplossing:

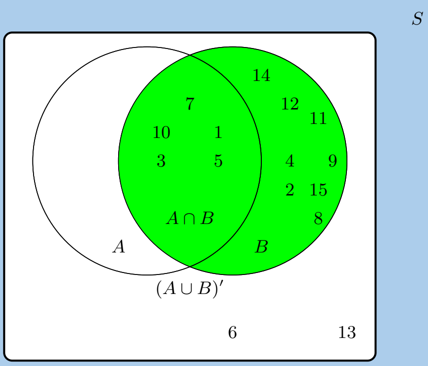
   Ons herroep die definisie van die term "uitkoms".
   'n Uitkoms van 'n eksperiment is 'n enkele resultaat van daardie eksperiment
   Dus is die mees toepaslike voorbeeld van die term "uitkoms": die dobbelsteen land op die getal 5.
2. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Daar word van hulle gevra om die gebeurtenisversameling van B te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.
Watter van die volgende versamelings beskryf die gebeurtenisversameling B die beste?

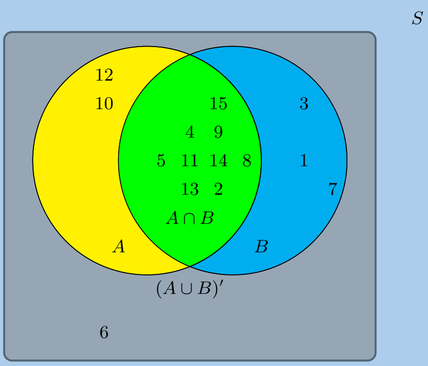
- $\{6; 13\}$
- $\{1; 3; 5; 7; 10\}$
- $\{2; 4; 6; 8; 9; 11; 12; 13; 14; 15\}$
- $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15\}$

Oplossing:
Die gebeurtenisversameling B kan as volg gearseer word:



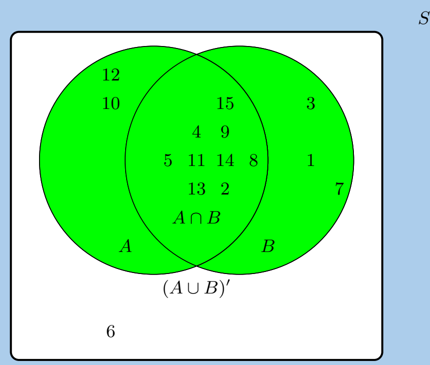
Die versameling $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15\}$ beskryf die gebeurtenisversameling van B die beste.

3. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:



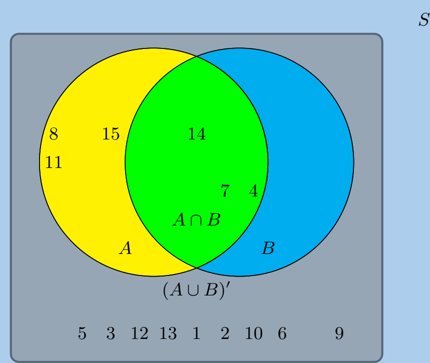
Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Hulle word gevra om die gebeurtenisversameling van die die vereniging tussen gebeurtenisversameling A en gebeurtenisversameling B, ook geskryf as $A \cup B$, te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om hulle te help om dit te vind.
Skryf die gebeurtenisverameling neer wat $A \cup B$ die beste beskryf.
Oplossing:

Die vereniging tussen gebeurtenisversameling A en gebeurtenisversameling B, ook geskryf as $A \cup B$, kan as volg gearseer word:



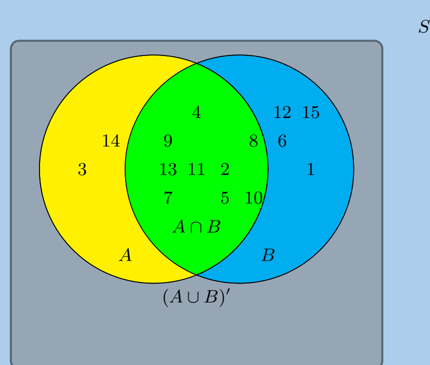
Die versameling $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$ beskryf die gebeurtenisversameling van $A \cup B$ die beste.

4. Gegee die volgende Venndiagram:



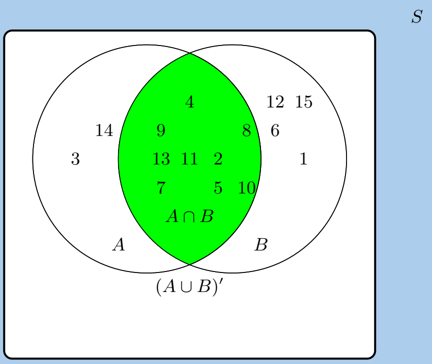
Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Is $A \cup B$ en $(A \cup B)'$ wedersyds uitsluitend?
Oplossing:
Ons herroep die definisie van die term "wedersyds uitsluitend".
Twee gebeurtenisse is wedersyds uitsluitend as hulle nie terselfdertyd kan voorkom nie.
Die gebeurtenisversameling vir$A \cup B$ is: $\{4; 7; 8; 11; 14; 15\}$.
Die gebeurtenisversameling vir$(A \cup B)'$ is: $\{1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 12; 13\}$.
Die vraag wat ons moet vra, is: Kan hulle op dieselfde tyd voorkom?
Deur te kyk na beide versamelings, kan ons die volgende oorvleuelende gebeurtenisversameling identifiseer: $\{\}$
Dus is die gebeurtenisversamelings $A \cup B$ en $(A \cup B)'$ wedersyds uitsluitend in hierdie voorbeeld.

5. Die volgende Venndiagram word vir 'n groep leerders gegee:

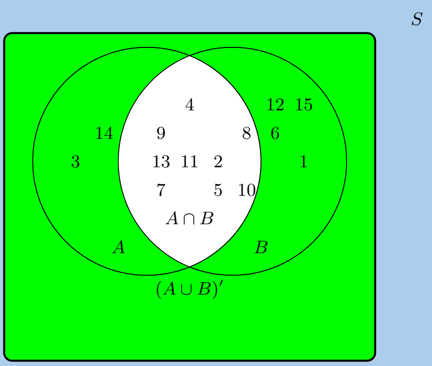


Die steekproefruimte kan beskryf word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 15\}$.
Hulle word gevra om die komplementêre gebeurtenisversameling van $(A \cap B)$, ook bekend as $(A \cap B)'$ te identifiseer. Hulle haak vas en jy bied aan om te hulle te help om dit te kry.

Skryf die versameling neer wat die gebeurtenisversameling van $(A \cap B)'$ die beste beskryf.
Oplossing:
Die gebeurtenisversameling $(A \cap B)$ kan gearseer word as:



Die komplementêre gebeurtenisversameling $(A \cap B)'$ kan as volg gearseer word:



Die versameling $\{1; 3; 6; 12; 14; 15\}$ beskryf die komplementêre versameling van $(A \cap B)$, ook bekend as $(A \cap B)'$, die beste.

6. 'n Leerder vind 'n pak van 52 kaarte en neem dan een kaart uit die pak. Wat is die waarskynlikheid dat die kaart 'n koning is?
   Skryf jou antwoord as 'n desimaal (korrek tot 2 desimale plekke).
   Oplossing:

$$\begin{aligned} n(E) &= \text{aantal uitkomstes in die gebeurtenisversameling} = 4 \\ n(S) &= \text{aantal moontlike uitkomstes in die steekproefruimte} = 52 \end{aligned}$$

   Laastens los ons die vergelyking op:

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{4}{52} \\ P(E) &\approx 0{,}08 \end{aligned}$$

   Dus is die waarskynlikheid dat die kaart is koning is $\approx 0{,}08$.

7. 'n Dobbelsteen word 21 keer gegooi en land 2 keer op die getal 3.
   Wat is die relatiewe frekwensie daarvan om 'n 3 gooi met die dobbelsteen? Skryf jou antwoord neer tot 2 desimale plekke.
   Oplossing:
   Herroep die formule:

$$f = \frac{p}{t}$$

   Identifiseer veranderlikes benodig:

$$\begin{aligned} p &= \text{aantal positiewe probeerslae} = 2 \\ f &= \text{totale aantal probeerslae} = 21 \end{aligned}$$

Bereken:

$$\begin{aligned} f &= \frac{p}{t} \\ &= \frac{2}{21} \\ f &= 0{,}10 \end{aligned}$$

Die relatiewe frekwensie om 'n 3 te gooi, is 0,1.

8. 'n Muntstuk word 44 keer opgeskiet en land 22 keer op kop.
   Wat is die relatiewe frekwensie daarvan dat 'n muntstuk op kop land? Skryf jou antwoord neer korrek tot 2 desimale plekke.
   Oplossing:
   Herroep die formule:
   $$f = \frac{p}{t}$$
   Identifiseer veranderlikes benodig:
   $$\begin{aligned} p &= \text{aantal positiewe probeerslae} = 22 \\ f &= \text{totale aantal probeerslae} = 44 \end{aligned}$$
   Bereken:
   $$\begin{aligned} f &= \frac{p}{t} \\ &= \frac{22}{44} \\ f &= 0{,}50 \end{aligned}$$
   Die relatiewe frekwensie dat 'n muntstuk kop land, is 0,50.
9. 'n Groep van 45 kinders word gevra of hulle Frosties, Strawberry Pops of beide eet. 31 kinders sê hulle eet beide en 6 sê hulle eet net Frosties. Wat is die waarskynlikheid dat 'n kind wat willekeurig gekies word slegs Strawberry Pops sal eet?
   Oplossing:
   $$45(\text{almal}) - 6(\text{slegs Frosties}) - 31(\text{beide}) = 8(\text{slegs Strawberry Pops})$$
   $$\therefore \frac{8}{45} = 0{,}18$$
10. In 'n groep van 42 leerders, het almal behalwe 3 'n pakkie skyfies of 'n koeldrank of beide. As 23 'n pakkie skyfies het en 7 van hierdie ook 'n koeldrank het, wat is die waarskynlikheid dat 'n leerder wat willekeurig gekies word, die volgende sal hê:
    a) beide skyfies en koeldrank
    Oplossing:
    $\frac{7}{42} = \frac{1}{6}$
    b) slegs koeldrank
    Oplossing:
    Aangesien $42 - 3 = 39$ leerders ten minste een het, en 23 leerders 'n pakkie skyfies het, dan het $39 - 23 = 16$ leerders slegs 'n koeldrank.
    $\frac{16}{42} = \frac{8}{21}$
11. 'n Boks bevat gekleurde blokkies. Die aantal van elke kleur word in die volgende tabel gegee.

Kleur	Pers	Oranje	Wit	Pienk
Aantal blokkies	24	32	41	19

    'n Blokkie word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid dat die blokkie die volgende sal wees:
    a) pers
    Oplossing:
    Voor ons die vrae beantwoord, werk ons eers uit hoeveel blokkies daar in totaal is. Dit gee vir ons die steekproefruimte $n(S) = 24 + 32 + 41 + 19 = 116$.
    Die waarskynlikheid dat 'n blokkie pers is:

$$P(\text{pers}) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{24}{116} = 0{,}21$$

b) pers of wit

Oplossing:

Die waarskynlikheid dat 'n blokkie pers of wit is:

$$\begin{aligned} P(\text{pers} \cup \text{wit}) &= P(\text{pers}) + P(\text{wit}) - P(\text{pers} \cap \text{wit}) \\ &= \frac{24}{116} + \frac{41}{116} - 0 \\ &= 0{,}56 \end{aligned}$$

c) pienk en oranje

Oplossing:

Aangesien geen blokkie die twee kleure kan wees nie, is die waarskynlikheid van hierdie gebeurtenis 0.

d) nie oranje

Oplossing:

Ons werk eers die waarskynlikheid uit dat 'n blokkie oranje sal wees:

$$\begin{aligned} P(\text{oranje}) &= \frac{32}{116} \\ &= 0{,}28 \end{aligned}$$

Die waarskynlikheid dat 'n blokkie nie oranje sal wees nie, is

$$\begin{aligned} P(\text{nie oranje}) &= 1 - 0{,}28 \\ &= 0{,}72 \end{aligned}$$

12. 'n Klein kleuterskool het 'n klas met kinders van verskeie ouderdomme. Die tabel gee die aantal kinders van elke ouderdomsgroep in die klas.

Ouderdom	3 jaar oud	4 jaar oud	5 jaar oud
Manlik	2	7	6
Vroulik	6	5	4

As 'n kind willekeurig gekies word, wat is die waarskynlikheid dat die kind die volgende sal wees:

a) vroulik

Oplossing:

Ons bereken die totale aantal leerders by die skool: $6 + 2 + 5 + 7 + 4 + 6 = 30$

Die totale aantal vroulike leerders is $6 + 5 + 4 = 15$.

Die waarskynlikheid dat 'n willekeurig gekose kind vroulik sal wees:

$$\begin{aligned} P(\text{vroulik}) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{15}{30} \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

b) 'n 4 jaar oue manlike persoon

Oplossing:

Die waarskynlikheid dat 'n willekeurig geselekteerde kind 'n 4 jaar oue manlike kind is:

$$\begin{aligned} P(\text{manlik}) &= \frac{7}{30} \\ &= 0{,}23 \end{aligned}$$

c) 3 of 4 jaar oud

Oplossing:

Daar is $6+2+5+7 = 20$ kinders met ouderdomme 3 of 4. Die waarskynlikheid dat 'n willekeurig geselekteerde kind 3 of 4 jaar oud is, is: $\frac{20}{30} = 0{,}67$.

d) 3 en 4 jaar oud

Oplossing:

'n Kind kan nie beide 3 en 4 wees nie, dus is die waarskynlikheid 0.

e) nie 5

Oplossing:

Dit is dieselfde as dat 'n willekeurig gekose kind 3 of 4 jaar oud is en dus is 0,67.

f) of 3 of vroulik

Oplossing:

Die waarskynlikheid dat 'n kind of 3 of vroulik is, is:

$$\begin{aligned} P(3 \cup \text{vroulik}) &= P(3) + P(\text{vroulik}) - P(3 \cap \text{vroulik}) \\ &= \frac{8}{30} + \frac{15}{30} - \frac{6}{30} \\ &= 0{,}56 \end{aligned}$$

13. Fiona het 85 diskette wat genommer is van 1 tot 85. As 'n disket willekeurig geselekteer word, wat is die waarskynlikheid dat die disketnommer:

a) eindig met 5

Oplossing:

Die versameling van alle diskette wat eindig met 5 is: $\{5; 15; 25; 35; 45; 55; 65; 75; 85\}$. Dit het 9 elemente.

Die waarskynlikheid om 'n disket te kies wat eindig met 5, is:

$$\begin{aligned} P(5) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ P(5) &= \frac{9}{85} \\ P(5) &= 0{,}11 \end{aligned}$$

b) 'n veelvoud is van 3

Oplossing:

Die versameling van alle diskette wat veelvoude is van 3, is:
$\{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; 48; 51; 54; 57; 60; 63; 66; 69; 72; 75; 78; 81; 84\}$.
Dit het 28 elemente.

Die waarskynlikheid om 'n disket te trek wat 'n veelvoud is van 3, is: $P(3_v) = \frac{28}{85} = 0{,}33$.

c) 'n veelvoud is van 6

Oplossing:

Die versameling van alle diskette wat veelvoude is van 6, is: $\{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78; 84\}$.
Hierdie versameling het 14 elemente.

Die waarskynlikheid om 'n disket te trek wat 'n veelvoud is van 6, is: $P(6_v) = \frac{14}{85} = 0{,}16$.

d) nommer 65 is

Oplossing:

Daar is slegs een element in hierdie versameling en dus is die waarskynlikheid om 65 te trek: $P(65) = \frac{1}{85} = 0{,}01$.

e) nie 'n veelvoud van 5 is nie

Oplossing:

Die versameling van alle diskette met 'n nommer wat 'n veelvoud is van 5 is: $\{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85\}$. Hierdie versameling bevat 17 elemente. Dus die aantal diskette wat nie veelvoude is van 5 nie is: $85 - 17 = 68$.

Die waarskynlikheid om 'n disket te trek wat nie 'n veelvoud is van 5 nie is: $P(\text{nie veelvoud van } 5) = \frac{68}{85} = 0{,}80$.

f) 'n veelvoud is van 3 of 4

Oplossing:

In deel b), het ons die waarskynlikheid uitgewerk vir 'n disket wat 'n veelvoud is van 3. Nou werk ons uit hoeveel elemente daar in die versameling van alle diskette is wat veelvoude is van 4: $\{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 76; 80; 84\}$. Dit het 28 elemente.

Die waarskynlikheid dat 'n disket 'n veelvoud is van 3 of 4 is:

$$\begin{aligned} P(3_v \cup 4_v) &= P(3_v) + P(4_v) - P(3_v \cap 4_v) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{28}{85} - \frac{1}{3} \times \frac{28}{85} \\ &= 0{,}55 \end{aligned}$$

g) 'n veelvoud is van 2 en 6

Oplossing:

Die versameling van alle diskette wat veelvoude is van 2 en 6 is dieselfde as die versameling van alle diskette wat 'n veelvoud is van 6. Dus is die waarskynlikheid om 'n disket te trek wat beide 'n veelvoud is van 2 en van 6 gelyk aan 0,16.

h) nommer 1 is

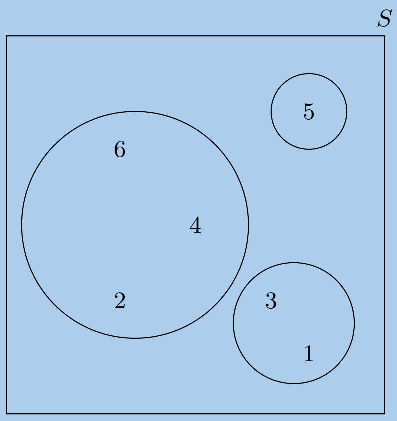
Oplossing:

Daar is slegs 1 element in hierdie stel en dus is die waarskynlikheid 0,01.

14. Gebruik 'n Venndiagram om die volgende waarskynlikhede uit te werk vir 'n dobbelsteen wat gegooi word:

a) 'n veelvoud van 5 en 'n onewe getal

Oplossing:



Die steekproefruimte vir 'n dobbelsteen wat gegooi word, is $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Daar is slegs een moontlikheid hier: die dobbelsteen land op 'n 5. Dus is die waarskynlikheid $\frac{1}{6}$.

b) 'n getal wat nie 'n veelvoud van 5 is nie en ook nie 'n onewe getal is nie

Oplossing:

Daar is slegs een veelvoud van 5 in dieselfde steekproefruimte, en dit is 'n onewe getal. Dus is die versameling van getalle wat nie 'n veelvoud van 5 is nie en ook nie 'n onewe getal is nie: $\{2; 4; 6\}$. Dus is die waarskynlikheid: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

c) 'n getal wat nie 'n veelvoud van 5 is nie, maar wat onewe is

Oplossing:

Daar is net een veelvoud van 5 in die steekproefruimte, en dit is 'n onewe getal. Dus is die versameling getalle wat nie 'n veelvoud van 5 is nie maar wat wel 'n onewe getal is: $\{1; 3\}$. Dus is die waarskynlikheid: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

15. 'n Pakkie bevat geel lekkers en pienk lekkers. Die waarskynlikheid om 'n pienk lekker uit die pakkie te haal, is $\frac{7}{12}$. Wat is die waarskynlikheid om 'n geel lekker uit te haal?

Oplossing:

$1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

16. In 'n parkeerterrein met 300 motors, is daar 190 Opels. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste motor wat die parkeerterrein verlaat:

a) 'n Opel is

Oplossing:

$\frac{190}{300} = \frac{19}{30}$

b) nie 'n Opel is nie

Oplossing:

$1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$

17. Nezi het 18 los sokkies in 'n laai. Agt van hierdie is oranje en twee is pienk. Die oorblywende sokkies is nie oranje of pienk nie. Bereken die waarskynlikheid dat die eerste sokkie wat willekeurig gevat word:

   a) oranje is

   Oplossing:

   $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

   b) nie oranje

   Oplossing:

   $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

   c) pienk is

   Oplossing:

   $\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

   d) nie pienk is nie

   Oplossing:

   $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

   e) oranje of pienk is

   Oplossing:

   $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

   f) nie oranje of pienk is nie

   Oplossing:

   $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

18. 'n Bakplaat bevat 9 'shortbread' koekies, 4 gemmerkoekies, 11 'chocolate chip' koekies en 18 Jambos. As 'n koekie willekeurig geneem word, wat is die waarskynlikheid dat:

   a) dit 'n gemmerkoekie of 'n Jambo is

   Oplossing:

   Totale aantal koekies is $9 + 4 + 11 + 18 = 42$.

$$\begin{aligned} \frac{4}{42} + \frac{18}{42} &= \frac{22}{42} \\ &= \frac{11}{21} \end{aligned}$$

   b) dit is nie 'n "shortbread" koekie nie

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{9}{42} &= 1 - \frac{3}{14} \\ &= \frac{11}{14} \end{aligned}$$

19. 280 kaartjies is verkoop vir 'n gelukkige trekking. Jabulile het 15 kaartjies gekoop. Wat is die waarskynlikheid dat Jabulile:

   a) 'n prys wen

   Oplossing:

   $\frac{15}{280} = \frac{3}{56}$

   b) nie 'n prys wen nie

   Oplossing:

   $1 - \frac{3}{56} = \frac{53}{56}$

20. 'n Groep kinders is waargeneem om te sien hoeveel het rooi hare en bruin oë. 44 kinders het rooi hare maar nie bruin oë nie, 14 kinders het bruin oë en rooi hare, 5 kinders het bruin oë maar nie rooi hare nie en 40 kinders het nie bruin oë of rooi hare nie.

a) Hoeveel kinders was daar in die skool?

Oplossing:

Die volgende moontlikhede bestaan vir die haar- en oogkleur in die opname. Elk van hierdie is wedersyds uitsluitend:

- 'n Kind het bruin oë en rooi hare.
- 'n Kind het bruin oë maar nie rooi hare nie.
- 'n Kind het rooi hare maar nie bruin oë nie.
- 'n Kind het nie rooi hare of bruin oë nie.

Aangesien ons die totale aantal kinders in elk van die vier groepe gegee word, kan ons hulle bymekaartel om die totale aantal kinders te kry: $44 + 14 + 5 + 40 = 103$.

b) Wat is die waarskynlikheid dat 'n willekeurig gekose kind die volgende sal hê:

i. bruin oë

ii. rooi hare

Oplossing:

i. $\frac{19}{103}$

ii. $\frac{58}{103}$

c) 'n Kind met bruin oë word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid dat hierdie kind rooi hare sal hê?

Oplossing:

$$\frac{14}{(14+5)} = \frac{14}{19}$$

21. 'n Fles het pers lekkers, blou lekkers en groen lekkers daarin. Die waarskynlikheid dat 'n lekkertjie wat willekeurig gekies word, pers sal wees, is $\frac{1}{7}$ en die waarskynlikheid dat dit groen sal wees, is $\frac{3}{5}$.

a) As ons 'n lekkertjie willekeurig kies, wat is die waarskynlikheid dat dit die volgende sal wees:

i. pers of blou

ii. groen

iii. pers

Oplossing:

i. Dieselfde as nie-groen: $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

ii. $\frac{3}{5}$

iii. $\frac{1}{7}$

b) As daar 70 lekkers in die fles is, hoeveel pers lekkers is daar?

Oplossing:

$$\frac{1}{7} \times 70 = 10$$

c) $\frac{2}{5}$ van die pers lekkers in (b) het strepies op en die res het nie. Hoeveel pers lekkers het strepies?

Oplossing:

$$10 \times \frac{2}{5} = 4$$

22. Boks A bevat 3 kaarte wat genommer is as 1, 2 en 3.
Boks B bevat 2 kaarte wat genommer is as 1 en 2.
Een kaart word willekeurig verwyder uit elke boks.
Vind die waarskynlikheid dat:

a) die som van die getalle 4 is.

Oplossing:

$S = \{(1,1); (1,2); (2,1); (2,2); (3,1); (3,2)\}$

$$P = \frac{n(E)}{n(S)}$$
$$P = \frac{2}{6}$$
$$\therefore P = \frac{1}{3}$$

b) die som van die twee getalle 'n priemgetal is.

Oplossing:

$$P = \frac{n(E)}{n(S)}$$
$$P = \frac{4}{6}$$
$$\therefore P = \frac{2}{3}$$

c) die produk van die twee getalle ten minste 3 is.

Oplossing:

$$P = \frac{n(E)}{n(S)}$$
$$P = \frac{3}{6}$$
$$\therefore P = \frac{1}{2}$$

d) die som gelyk is aan die produk.

Oplossing:

$$P = \frac{n(E)}{n(S)}$$
$$P = \frac{1}{6}$$

23. 'n Kaart word willekeurig getrek uit 'n gewone pak van 52 speelkaarte.

a) Vind die waarskynlikheid dat die gekose kaart die volgende sal wees:

i. die drie van diamante

ii. die drie van diamante of enige hart

iii. 'n diamant of 'n drie

Oplossing:

i.

$$P = \frac{n(E)}{n(S)}$$
$$P = \frac{1}{52}$$

ii.

$$P = \frac{n(E)}{n(S)}$$
$$= \frac{14}{52}$$
$$P = \frac{7}{26}$$

iii.

$$P = \frac{n(E)}{n(S)}$$
$$P = \frac{16}{52}$$
$$P = \frac{4}{13}$$

b) Die kaart wat getrek is, is die drie van diamante. Dit word op die tafel geplaas en 'n tweede kaart word getrek. Wat is die waarskynlikheid dat die tweede kaart nie 'n diamant is nie?

Oplossing:

$$\begin{aligned} P &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{39}{51} \\ &= \frac{13}{17} \end{aligned}$$

24. Die volgende gebeurtenisversameling word aan 'n groep leerders gegee:

Gebeurtenisversameling A	3	4

Gebeurtenisversameling B	2	4	5

Gebeurtenisversameling $A \cup B$	2	3	4	5

Die steekproefruimte kan beskryf kan word as $\{n : n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 6\}$

Hulle word gevra om die waarde van $P(A \cap B)$ te bereken. Hulle kan dit nie regkry nie en jy bied aan om dit vir hulle te bereken. Gee jou antwoord as 'n desimale getal, afgerond tot twee desimale plekke.

Oplossing:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Maak $P(A \cap B)$ die onderwerp en ons kry:

$$P(A \cap B) = P(B) + P(A) - P(A \cup B)$$

Identifiseer veranderlikes benodig:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = 0{,}33 \\ P(B) &= \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = 0{,}5 \\ P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = 0{,}67 \end{aligned}$$

Los op vir: $P(A \cap B)$:

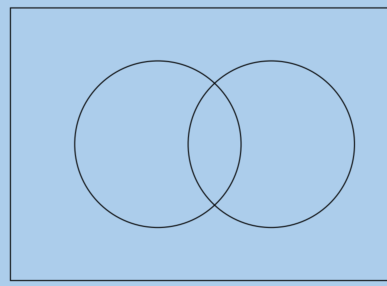
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) + P(A) - P(A \cup B) \\ P(A \cap B) &= (0{,}5) + (0{,}33) - (0{,}67) \\ P(A \cap B) &= 0{,}17 \end{aligned}$$

Die waarde van $P(A \cap B)$ is 0,17.

25. Vir elk van die volgende, trek 'n Venndiagram om die situasie te voor te stel en vind 'n voorbeeld om die situasie te illustreer.

a) 'n steekproefruimte waarin daar twee gebeurtenisse is wat nie wedersyds uitsluitend is nie

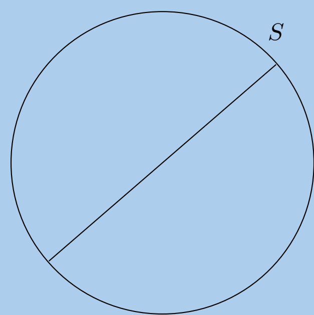
Oplossing:



'n Voorbeeld is om 'n kaart te trek uit 'n pak van kaarte. Ons kan 'n rooi kaart trek wat ook 'n prentkaart is.

b) 'n Steekproefruimte waarin daar twee gebeurtenisse is

Oplossing:

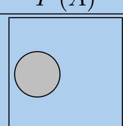
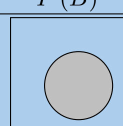
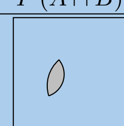
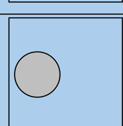
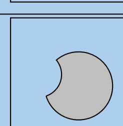
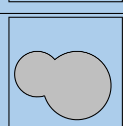


'n Voorbeeld is die gooi van 'n dobbelsteen. Die gebeurtenis van 'n ewe getal is komplementêr tot die gebeurtenis van 'n onewe getal.

26. Gebruik 'n Venndiagram om te bewys dat die waarskynlikheid dat of gebeurtenis A of gebeurtenis B sal plaasvind (A en B is nie wedersyds uitsluitend nie) gegee word deur:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Oplossing:

	$P(A)$	$+$		$P(B)$	$-$	$P(A \cap B)$	
$=$		$+$	$($		$-$		$)$
$=$		$+$					
$=$							
$=$	$P(A \cup B)$						

27. Al die klawers word uitgehaal uit 'n pak kaarte. Die oorblywende kaarte word dan geskommel en een kaart gekies. Nadat die kaart gekies is, word dit teruggesit in die pak voordat 'n volgende kaart gekies word.

a) Wat is die steekproefruimte?

Oplossing:

{pak kaarte sonder klawers}

b) Vind 'n versameling om die gebeurtenis , P, dat 'n prentkaart getrek word, te verteenwoordig.

Oplossing:

$P = \{J; Q; K$ of harte, diamante of skoppens$\}$

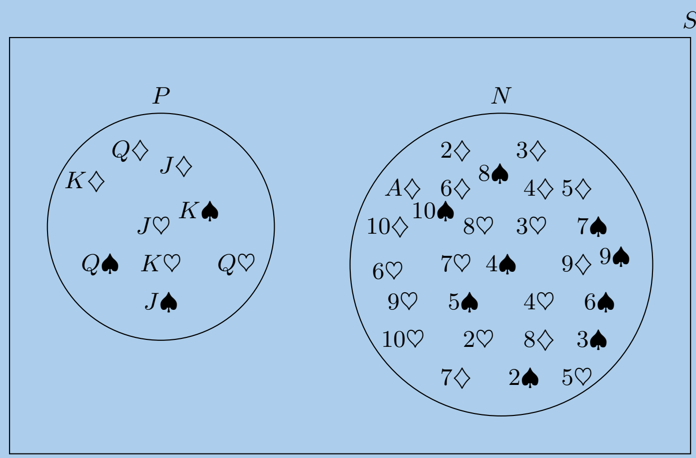
c) Vind 'n versameling, N, om 'n genommerde kaart te trek.

Oplossing:

$N = \{A; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$ van harte, diamante of skoppens$\}$

d) Stel die bostaande gebeurtenisse voor met 'n Venndiagram.

Oplossing:



e) Watter beskrywing van die versamelings P en N is geskik? (Wenk: Vind enige elemente van P in N en van N in P.)

Oplossing:

Wedersyds uitsluitend en komplementêr.

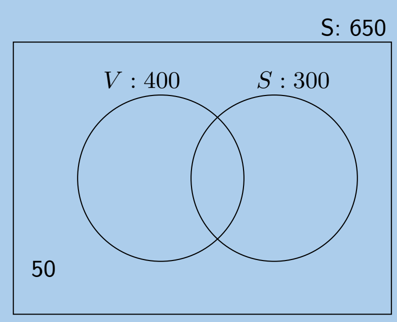
28. 'n Opname is uitgevoer by Mutende Laerskool om vas te stel hoeveel van die 650 leerders koop vetkoek en hoeveel koop lekkers gedurende pouse. Die volgende is gevind:

- 50 leerders het niks gekoop nie
- 400 leerders het vetkoek gekoop
- 300 leerders het lekkers gekoop

a) Stel hierdie inligting voor met 'n Venndiagram

Oplossing:

Die volgende Venndiagram verteenwoordig die gegewe inligting. Maar ons kan hieruit nog meer inligting verkry wat ons sal help om die tweede deel van hierdie vraag te beantwoord.



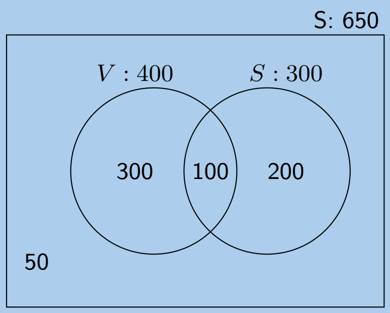
Ons let die volgende op:

- 400 leerders het vetkoek gekoop, en sommige van hulle het lekkers ook gekoop.
- 300 leerders het lekkers gekoop, en party van hulle het vetkoek ook gekoop.
- Van die totale aantal leerders, het 50 niks gekoop nie, dus $650 - 50 = 600$ het vetkoek of lekkers of beide gekoop.

Gestel die aantal leerders wat slegs vetkoek gekoop het, is v; die aantal leerders wat slegs lekkers gekoop het, is s en die aantal leerders wat beide gekoop het, is b. Nou let ons die volgende op:

$$
\begin{aligned}
600 &= v + s + b \\
\text{Maar } v + b &= 400 \\
\therefore 600 &= 400 + s \\
\therefore s &= 200 \\
\text{Net so } s + b &= 300 \\
\therefore b &= 100 \\
\therefore v &= 600 - s - b \\
&= 300
\end{aligned}
$$

Ons kan dit invul op die Venndiagram:



b) As 'n leerder willekeurig gekies word, bereken die waarskynlikheid dat hierdie leerder die volgende koop:

i. slegs lekkers
ii. slegs vetkoek
iii. nie vetkoek of lekkers nie
iv. vetkoek en lekkers
v. vetkoek of lekkers

Oplossing:

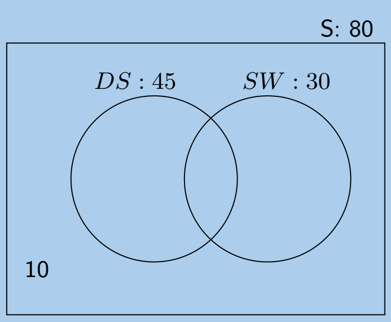
i. $\frac{200}{650} = 30{,}8\%$
ii. $\frac{300}{650} = 46{,}2\%$
iii. $\frac{50}{650} = 7{,}7\%$
iv. $\frac{100}{650} = 15{,}4\%$
v. $\frac{600}{650} = 92{,}3\%$

29. In 'n opname by Lwandani Sekondêre Skool, is 80 mense ondervra om uit te vind hoeveel lees die Sowetan, hoeveel lees die Daily Sun en hoeveel lees beide. Die opname het getoon 45 lees die Daily Sun, 30 lees die Sowetan en 10 lees nie een van die twee nie. Gebruik 'n Venndiagram om die persentasie mense te vind wat die volgende lees:

a) slegs die Daily Sun

Oplossing:

Die volgende Venndiagram verteenwoordig die gegewe inligting. Maar, ons kan meer inligting hieruit kry wat ons kan help om die probleem op te los.



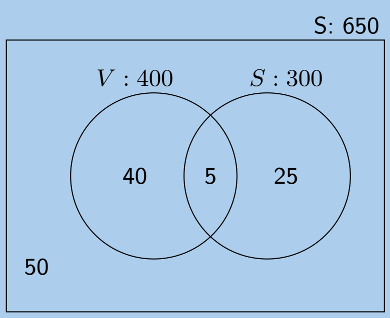
Ons let die volgende op:

- 45 mense lees die Daily Sun, sommige van hulle lees ook die Sowetan.
- 30 mense lees die Sowetan, sommige van hulle lees die Daily Sun.
- Van die totale aantal mense wat ondervra is, lees 10 nie een van die twee koerante nie, dis $80 - 10 = 70$ lees nie een van die twee nie.

Laat die getal mense wat slegs die Daily Sun lees d wees, die getal mense wat slegs die Sowetan lees s, en die getal mense wat beide lees, x. Nou let ons die volgende op:

$$\begin{aligned} 70 &= d + s + x \\ \text{Maar } d + x &= 45 \\ \therefore 70 &= 45 + s \\ \therefore s &= 25 \\ \text{Net so } s + x &= 30 \\ \therefore x &= 5 \\ \therefore d &= 70 - s - x \\ &= 40 \end{aligned}$$

Ons kan dit invul op die Venndiagram:



$\frac{40}{80} = 50\%$.

b) slegs die Sowetan

Oplossing:

$\frac{25}{80} = 31{,}25\%$.

c) beide die Daily Sun en die Sowetan

Oplossing:

$\frac{5}{80} = 6{,}25\%$.

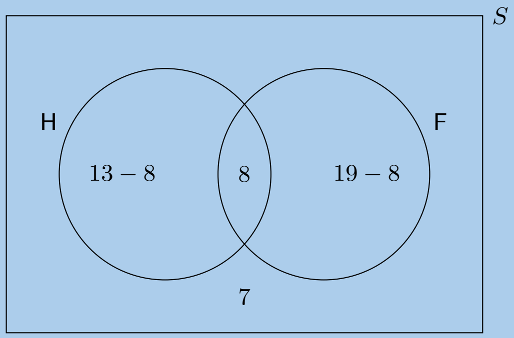
30. In 'n klas is daar

- 8 leerders wat sokker en hokkie speel
- 7 leerders wat nie sokker of hokkie speel nie
- 13 leerders wat hokkie speel
- 19 leerders wat sokker speel

Hoeveel leerders is daar in die klas?

Oplossing:

Laat H en F leerders wees wat onderskeidelik hokkie en sokker speel.



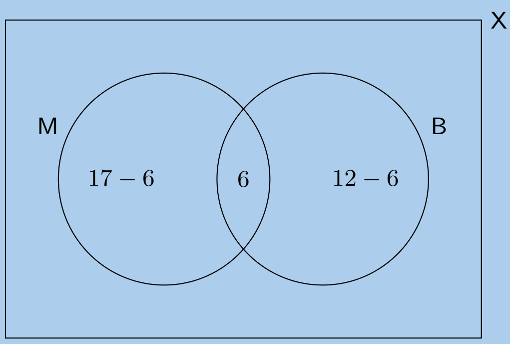
$$N = 7 + 5 + 8 + 11$$
$$= 31$$

31. Uit 36 mense, stel 17 belang om tydskrifte te lees, 12 stel belang om boeke te lees, 6 stel belang om beide tydskrifte en boeke te lees.

   a) Stel die inligting voor met 'n Venndiagram.

   Oplossing:

   Gestel B en M is onderskeidelik die mense wat boeke en tydskrifte lees.



   b) Hoeveel mense stel glad nie belang om tydskrifte of boeke te lees nie?

   Oplossing:

   11 mense lees slegs tydskrifte, 6 mense lees slegs boeke en 6 mense lees beide.

   Die totale aantal mense is 36. Dus kan ons die getal mense vind wat geen belangstelling het om tydskrifte of boeke te lees nie:

$$36 - 11 - 6 - 6 = 13$$

   c) Vind die waarskynlikheid dat 'n persoon wat willekeurig gekies word uit die groep, sal:

      i. belangstel om tydskrifte en boeke te lees.
      ii. slegs belangstel om boeke te lees.
      iii. nie belangstel om boeke te lees nie.

   Oplossing:

   i.

$$P = \frac{n(E)}{n(S)}$$
$$P = \frac{6}{36}$$
$$P = \frac{1}{6}$$

   ii.

$$P = \frac{n(E)}{n(S)}$$
$$P = \frac{6}{36}$$
$$P = \frac{1}{6}$$

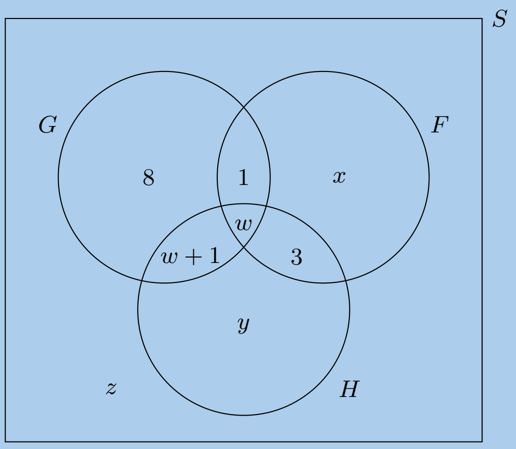
   iii.

$$P = \frac{n(E)}{n(S)}$$
$$P = \frac{36 - 12}{36}$$
$$P = \frac{24}{36}$$
$$= \frac{2}{3}$$

32. 30 leerders is ondervra en die volgende inligting is verkry van hierdie groep:

- 18 leerders neem Geografie (G)
- 10 leerders neem Frans (F)
- 6 leerders neem Geskiedenis (H), maar neem nie Geografie of Frans nie.

Addisioneel is die volgende Venndiagram hieronder ingevul.
Gestel G is die gebeurtenis dat 'n leerder Geografie neem
Gestel F is die gebeurtenis dat 'n leerder Frans neem.
Gestel H is die gebeurtenis dat 'n leerder Geskiedenis neem.



a) Van die inligting hierbo, bepaal die waardes van w, x, y en z.
Oplossing:

$$y = 6$$

$$\begin{aligned} 8 + (w+1) + w + 1 &= 18 \\ 2w &= 18 - 10 \\ w &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 &= x + 1 + w + 3 \\ 10 &= x + 8 \\ x &= 10 - 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 30 - (8 + 1 + w + w + 1 + x + 3 + y) \\ z &= 30 - (13 + 8 + 2 + 6) \\ z &= 30 - 29 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Dus $w = 4$, $x = 2$, $y = 6$ en $z = 1$.

b) Bepaal die waarskynlikheid dat 'n leerder wat willekeurig gekies word uit hierdie groep:
   i. net Geografie sal neem.
   ii. Frans en Geskiedenis sal neem, maar nie Geografie nie.

Oplossing:

i.

$$\begin{aligned} P &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{8}{30} \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

ii.

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{n(E)}{n(S)} \\
&= \frac{3}{30} \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

Vir meer oefeninge, besoek www.everythingmaths.co.za en kliek op 'Oefen Wiskunde'.

1. 2KJT	2. 2KJV	3. 2KJW	4. 2KJX	5. 2KJY	6. 2KJZ
7. 2KK2	8. 2KK3	9. 2KK4	10. 2KK5	11. 2KK6	12. 2KK7
13. 2KK8	14. 2KK9	15. 2KKB	16. 2KKC	17. 2KKD	18. 2KKF
19. 2KKG	20. 2KKH	21. 2KKJ	22. 2KKK	23. 2KKM	24. 2KKN
25a. 2KKP	25b. 2KKQ	26. 2KKR	27. 2KKS	28. 2KKT	29. 2KKV
30. 2KKW	31. 2KKX	32. 2KKY			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 15

Ondersoek en Projek

15.1 Assesseringstaak: Funksies

1. Teken die grafieke van elk van die onderstaande deur punt-vir-punt stipping (of gebruik tegnologie).

2. a) $y = x^2$ b) $y = 2x$ c) $y = 2 + x$ d) $y = \frac{1}{x}$ e) $y = x^2 + 2$
   f) $y = -2x^2$ g) $y = 2\left(\frac{1}{x}\right)$ h) $y = -\frac{1}{x} + 2$ i) $y = -3x - 4$ j) $y = -\frac{1}{x-1} + 2$
   k) $y = -5$ l) $y = \frac{1}{x+3} - 2$ m) $y = \frac{x}{3}$ n) $y = -\frac{2}{x}$ o) $y = (x+1)^2$
   p) $y = x^2 - 2x - 8$ q) $y = -2x + 3$ r) $x^2 + y^2 = 25$

3. Dui nou aan of dit 'n reguitlyn, parabool, hiperbool or enige ander funksie is deur die algebraïese vergelykings in die regte kolom in die tabel hieronder in te vul:

Reguitlyn					
Parabool					
Hiperbool					
Ander					

4. Wat het die vergelykings wat die reguitlyne voorstel in gemeen?
5. Wat het die vergelykings wat die parabole voorstel in gemeen?
6. Wat het die vergelykings wat die hiperbole voorstel in gemeen?
7. Skryf drie ander uitdrukkings neer vir: reguitlyne, parabole en hiperbole.
8. Is die grafiek van $y = 3x^2 + 2x + 1$ 'n reguitlyn, 'n parabool of 'n ander vorm? Verduidelik.
9. Is die grafiek van $y = 3x^3 + 2x + 1$ 'n reguitlyn, 'n parabool of 'n ander vorm? Verduidelik.
10. Wat let jy op omtrent die grafieke van die volgende vergelykings: $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + 2$, $y = x^2$, $y = x^2 + 2$. Formuleer 'n vermoede oor die invloed van die "+2".
11. Wat let jy op omtrent die grafieke van die volgende vergelykings: $y = \frac{1}{x}$, $y = 2\frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = 2x^2$. Formuleer 'n vermoede oor die invloed van die "$\times 2$".

Vir onderwysers:

Hierdie assesseringstaak sal gemerk word volgens die volgende rubriek:

	6 - 8	4 - 5	2 - 3	0 - 1
Akkuraatheid van grafieke (as tegnologie gebruik word, moet leerders drukstukke verskaf van al die grafieke)	Deurgaans akkuraat en korrek	Byna almal korrek	Sommige korrek	Meeste verkeerd
Voltooiing van tabel		Alle inskrywings korrek	Meeste inskrywings korrek	Onvolledig, met foute
Waarnemings gemaak	Duidelike en korrekte verduidelikings gegee vir alle gevolgtrekkings	Duidelike verduidelikings gegee maar gevolgtrekkings onvolledig	Het nie die redenasie goed verduidelik nie	Geen poging of vae beskrywing of onvolledige gevolgtrekkings
Korrektheid van uitdrukkings vir lineêre, paraboliese en hiperboliese funksies		Akkuraat en korrek	Amper alles korrek	Geen poging of baie foute
Stiptheid			Teen sperdatum ingehandig	Nie sperdatum gehaal of by onderhandelde sperdatum gebly
Aanbieding				Aanvaarbaar of nie aanvaarbaar

15.2 Ondersoek: Getalpatrone

Ondersoek een van die twee opsies hieronder aangedui en skryf dan 'n volledige beskrywing neer van die werk wat jy gedoen het. Jy moet 'n beduidende aantal spesiale gevalle toon, ingesluit 'n aantal uitsonderings of resultate wat verskil van die res. Jy behoort enkele vermoedens te kan formuleer van die spesiale gevalle wat jy ondersoek. Skryf hierdie vermoedens so duidelik as moontlik neer en probeer dan om hulle te bewys.

Daar is twee opsies vir hierdie ondersoek. Kies net een van die twee opsies

Opsie 1: 'n Interessante reeks

Die eerste term van 'n reeks $T_1 = 2$ en die tweede term $T_2 = 5$.

Bereken die volgende 6 terme met die gebruik van die volgende reël: $T_n = \dfrac{T_{n-1} + 1}{T_{n-2}}$.

Verduidelik wat dit beteken as 'n reeks "begin repeteer" (of begin herhaal). Begin hierdie reeks herhaal?

Ondersoek ander reekse waar jy die eerste twee terme kies en dan dieselfde reël gebruik om die opvolgende terme te bereken. Probeer om positiewe heelgetalle, negatiewe heelgetalle, breuke ens. te gebruik vir die eerste twee terme.

Formuleer sommige vermoedes en probeer om hulle te bewys.

Opsie 2: Draai om, trek af, draai om, tel op

Volg die volgende voorskrifte wat gebruik is in hierdie voorbeeld vir ander driesyfer getalle:

- Neem enige driesyfer getal, bv.: 378
- Draai dit om: 873
- Trek die kleiner getal van die groter getal af: $873 - 378 = 495$
- Draai die verskil om: 594
- Tel hierdie omgedraaide verskil by die oorsponklike verskil: $594 + 495 =$ 1089

Ondersoek of syfers gelyk mag wees; hoeveel verskillende moontlikhede daar kan wees; of 0 gebruik kan word as een of meer van die syfers...

Enige vermoede(s)? Probeer om dit/hulle te bewys.

15.3 Projek: Finansies

Seksie A: Wisselkoerse

Die tabel hieronder toon die gemiddelde Rand (R)/ US dollar ($) wisselkoers vanaf 2000 tot 2007. Die getal onder die kolom "Wisselkoers" dui aan hoeveel Rand nodig was om een US Dollar te kry.

Jaar	Wisselkoers
2000	6,94
2001	8,58
2002	10,52
2003	7,57
2004	6,45
2005	6,37
2006	6,78
2007	7,06

1. In 2006 het 'n boek wat in Amerika uitgegee is, $ 15,00. gekos. Hoeveel sou jy verwag het om te betaal vir die boek in Suid Afrika?
2. Jy gaan na 'n boekwinkel en sien die boek op die rak. Dit kos R 136,00. Is dit meer of minder as wat jy verwag het? Stel 'n paar redes voor vir die verskil tussen die prys wat jy verwag het om te betaal en die gemerkte prys van die boek.
3. In watter jaar sou jy verwag dat die boek die minste sou kos? Bevestig jou antwoord.

4. In 2007 kos 'n T-hemp, wat in Suid-Afrika gemaak is R 95,00. Die hemp word uitgevoer na Amerika. Hoeveel sal dit kos in \$?
5. Jy bestuur 'n tekstielfabriek waar klere gemaak word van ingevoerde Amerikaanse katoen. In watter jaar sou die wisselkoers die beste gewees het vir jou en watter jaar sou dit die slegste gewees het? Verduidelik.
6. As jy 'n besigheid bedryf wat Suid-Afrikaanse sjokelade uitvoer na Amerika, in watter jaar sou die wisselkoers die beste gewees het vir jou en in watter jaar sou dit die slegste gewees het? Verduidelik.
7. Die banke gee slegs 'n aantal wisselkoerse in dieselfde formaat as die tabel hierbo, d.w.s. hoeveel Rand jy nodig het om een eenheid buitelandse valuta (\$, Euros (€) of Britse Pond (£)) te koop. 7 Alle ander wisselkoerse word aangedui in terme van die bedrag buitelandse valuta wat gekoop kan word met R 1,00. In 2007, was die Rand/Australiese dollar (A\$) wisselkoers R 1,00 tot A\$0,17. As jy bank toe gaan met R 100, hoeveel Australiese dollars sal jy kry?
8. Hoeveel het jy nodig in Rand om A\$ 1 te kry? Is dit 'n beter of 'n slegter wisselkoers as die Rand/Dollar wisselkoers in 2007? Verduidelik jou antwoord.
9. Bereken die Rand en US dollar wisselkoers in dieselfde formaat as die wisselkoers vir Australiese dollars, d.w.s. werk uit hoevel US dollars kan jy kry vir R 1,00.
10. Gebruik die 2007 wisselkoers vir Australiese dollars en US dollars, en werk uit hoeveel Australiese dollars jy nodig het om 1 US dollar te kry.
11. In Desember 2007 was die prys van ruolie, wat gebruik word om petrol te maak, \$ 92,00 11 per vaat. Hoeveel het Suid-Afrika betaal vir 'n vaat ruolie en hoeveel het Australië betaal vir 'n vaat ruolie?
12. In 2007 was die wisselkoers tussen Rand en Britse pond R 14,13 tot 1€. Die Rand/US dollar wisselkoers was R 7,06 vir 1\$. Skat wat is die wisselkoers tussen die US dollar en die Britse pond.
13. Jy besoek Amerika en besluit om 'n Big Mac burger vir middagete te koop. Dit kos \$ 3,20. Wat is die Rand ekwivalent van die Big Mac Burger. Gebruik die 2007 wisselkoers gegee in die tabel hierbo.
14. Terwyl jy jou Big Mac eet, vergelyk jy wat jy nou net in Rand betaal het vir jou burger met wat jy in Suid-Afrika sou betaal het (R 15,50). Is 'n Big Mac duurder of goedkoper in Amerika?
15. Eksperimenteer met wisselkoerse deur enige metodes te gebruik wat jy dink sal werk, om 'n Rand/Dollar wisselkoers te bepaal wat daarop sal neerkom dat 'n prys van 'n Big Mac in Amerika ekwivalent is aan die prys wat ons in Suid-Afrika betaal vir 'n Big Mac. Onderwaardeer of oorwaardeer die amptelike Rand/Dollar wisselkoers die waarde van die Rand?

Nota: Die laaste drie vrae wat jy beantwoord het, verteenwoordig 'n vereenvoudigde weergawe van wat bekend staan as "Burgerekonomie", of die "Big Mac Indeks". Die Big Mac Indeks word deur ekonome dwarsoor die wereld gebruik om wisselkoers te vergelyk en om te bepaal of geldeenhede onder- of oorwaardeer is. Jy kan meer uitvind oor die Big Mac Indeks op die internet.

Seksie B: inflasie en rente

- In 2000 het 'n paar hardloopskoene R 450 gekos. Die inflasiekoers is 5,4%. Wat sou jy verwag het die skoene sou kos in 2007?
- Die tabel hieronder gee die werklike inflasiekoers van 2000 tot 2007. Gebruik die tabel om die 2007 prys van 'n paar hardloopskoene te bereken. Hoe vergelyk dit met jou antwoord in vraag 1? Verduidelik hoekom jou antwoorde verskil.

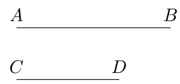
Jaar	Inflasiekoers (%)
2000	5,4
2001	5,7
2002	9,2
2003	5,8
2004	1,4
2005	3,4
2006	4,7
2007	7,7

Jy besluit om 'n selfoon te koop wat R 890 kos. Jy het R 320 gespaar vir die koste van die selfoon en jou ouers het ingestem om vir jou die balans te leen teen 8,5% per jaar enkelvoudige rente. Jy sal jou ouers terugbetaal in gelyke maandelikse paaiemente vir 'n periode van 2 jaar. Bereken jou maandelikse paaiemente.

In plaas daarvan om geld te leen, besluit jy dat jy vir twee jaar gaan spaar en dan jou nuwe selfoon te koop.

1. Jy belê die R 320 wat jy reeds het in 'n spesiale spaarrekening teen 'n rentekoers van 8% per jaar, maandeliks saamgestel. Bereken die balans in hierdie rekening na 2 jaar.
2. Na ses maande, belê jy R 170 in 'n gewone spaarrekening teen 7,5% rente per jaar, maandeliks saamgestel. Ses maande later belê jy R 160 en nog ses maande later belê jy R 170 in dieselfde rekening. Bereken die balans in hierdie rekening aan die einde van twee jaar.
3. Gedurende die twee jaar periode wat jy spaar, is die inflasiekoers 6,7% per jaar. Wat sal die selfoon twee jaar later kos?
4. Gebruik jou resultate vir vrae 4.1 – 4.3 om te bepaal of jy genoeg geld sal hê om kontant vir jou selfoon te betaal of nie.

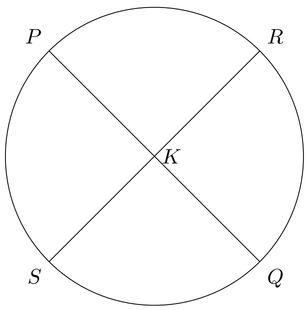
1. Op 'n vel blanko papier sonder lyne, trek $AB = 9$ cm. Konstrueer nou lyn DC so dat DC is ewewydig aan AB en gelyk is aan AB. Verbind B met C en A met D.



   a) Watter tipe vierhoek is $ABCD$?
   b) Skryf vier vermoedens neer omtrent $ABCD$ wat betrekking het op ewe lang lyne of ewe groot hoeke.
   c) Bevestig elke vermoede deur die lyne of die hoeke te meet en skryf die metings neer.

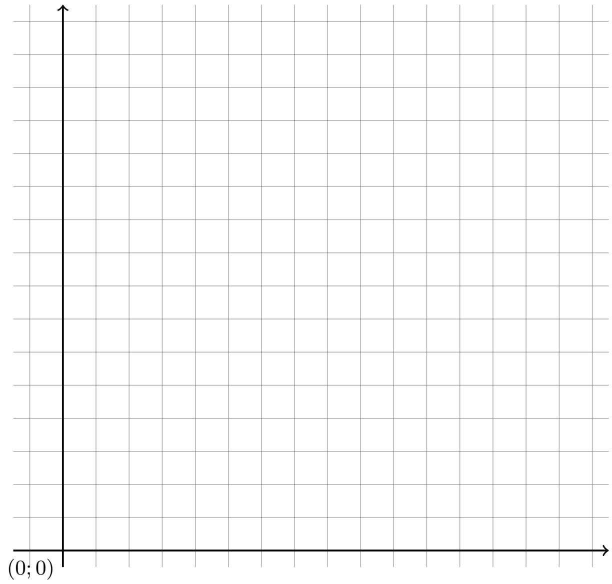
2. Met gebruik van 'n passer, konstrueer 'n sirkel met 'n radius van 5 cm. Noem die middelpunt van die sirkel K.

   a) Trek enige twee middellyne van die sirkel en noem hulle PQ en RS soos getoon in die skets.



   b) Hoe lank is PQ? Verduidelik hoe jy dit weet sonder om PQ te meet.
   c) Watter ander lyne is so lank soos PK? Gee 'n rede.
   d) Verbind punte P, R, Q en S. Watter tipe driehoek is $\triangle PKR$? Gee 'n rede.
   e) Watter tipe driehoek is $\triangle PKS$? Gee 'n rede.
   f) Bewys dat $S\hat{P}R = 90°$.
   g) Is daar enige ander hoek van 90°? Indien wel, noem hulle.
   h) Dink jy jy het bewys dat vierhoek $PQRS$ 'n reghoek is? Verduidelik.

3. Stip punte $F(1; 1)$ en $G(6; 1)$ op die gegewe assestelsel.



   a) Wat is die lengte van FG?
   b) Stip punt E sodat FE net so lank is as FG en die koördinate E heelgetalle is, maar so dat FE **nie** ewewydig is aan die y-as nie. Wat is die koördinate van E? Verduidelik die metode wat jy gebruik het om E te stip.

c) Stip punt H sodat $EFGH$ 'n ruit is. Wat is die koördinate van H?

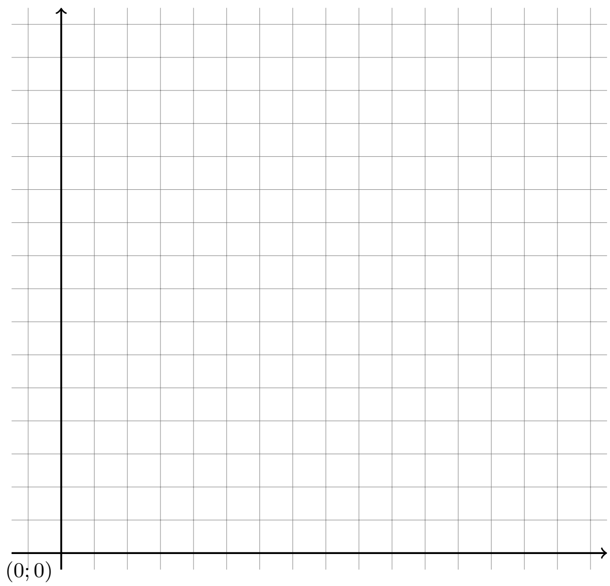
d) Watter eienskap van 'n ruit het jy gebruik om $EFGH$ te trek?

e) Trek die hoeklyne FH en DE. Gebruik koördinaatmeetkunde en bewys dat die hoeklyne mekaar halveer.

4. Wat is die definisie van 'n reëlmatige poligoon? Gebruik jou definisie van 'n reëlmatige poligoon en besluit watter van die volgende is reëlmatige poligone. In elke geval moet jy meld watter vereistes van jou definisie waar is (indien enige) en watter nie waar is nie (indien enige). Maak gebruik van diagramme om jou antwoorde te illustreer.

    a) Ongelyksydige driehoek
    b) Ruit
    c) Gelykbenige trapesium
    d) Gelykbenige driehoek
    e) Vierkant
    f) Vlieër
    g) Parallelogram
    h) Gelyksydige driehoek

5. Op die grafiekpapier, stip die punte $A(-1; 2)$, $B(0; -5)$ en $C(4; 7)$. Verbind die punte.



    a) Watter tipe driehoek is $\triangle ABC$?
    b) Bewys die vermoede wat jy gemaak het in 5.1
    c) Nota: Die koördinate van A, B en C is almal heelgetalle en geen heelgetal word meer as een keer gebruik nie. Gebruik hierdie reël om die volgende vraag te beantwoord.
    Op die grafiekpapier, stip die punte J, K, L en M sodat $JKLM$ 'n vlieër is. Gee die koördinate van die vier punte wat jy gestip het.
    d) Bewys dat $JKLM$ 'n vlieër is.

15.5 Ondersoek: Trigonometrie

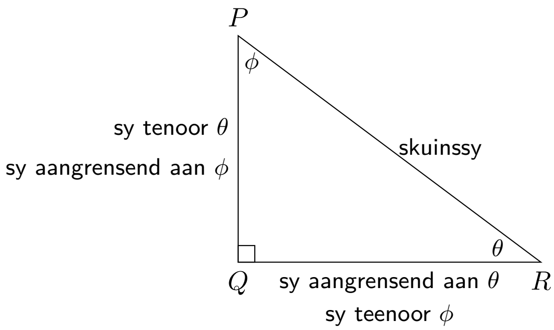
Jy word herinner aan die definisies van sinus, cosinus en tangens, afgekort as $\sin$, $\cos$ en $\tan$.

In die reghoekige driehoek hieronder:

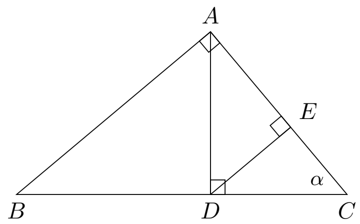
$$\sin\theta = \frac{\text{sy teenoor } \theta}{\text{skuinssy}} = \frac{PQ}{PR} \qquad \sin\phi = \frac{\text{sy tenoor } \phi}{\text{skuinssy}} = \frac{QR}{PR}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{sy aangrensend aan } \theta}{\text{skuinssy}} = \frac{QR}{PR} \qquad \cos\phi = \frac{\text{sy aangrensend aan } \phi}{\text{skuinssy}} = \frac{PQ}{PR}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{sy teenoor } \theta}{\text{sy aangrensend aan } \phi} = \frac{PQ}{QR} \qquad \tan\phi = \frac{\text{sy teenoor } \phi}{\text{sy aangrensend aan } \phi} = \frac{QR}{PQ}$$



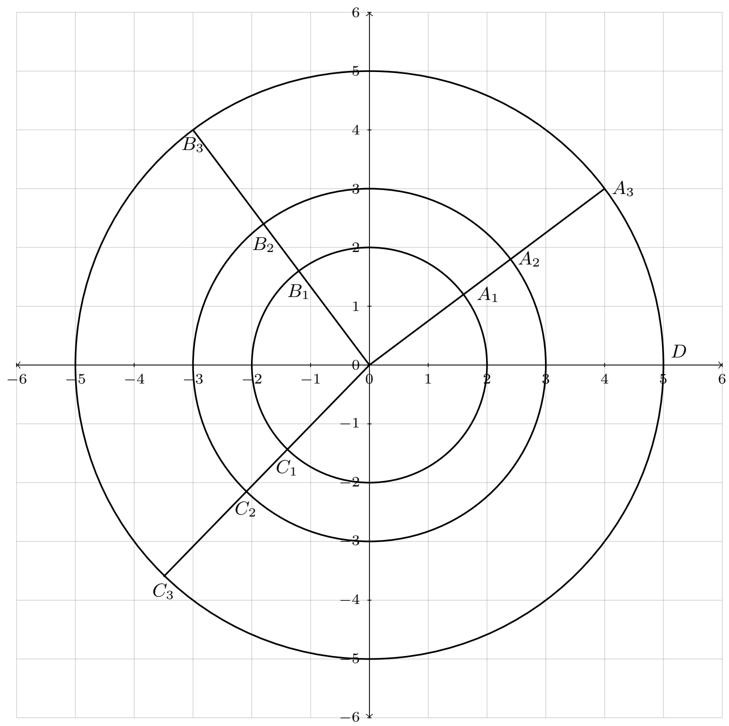
Taak 1



1. Noem al die gelykvormige driehoeke in die skets hierbo.
2. Gegee dat $BD = 8$ eenhede, $DC = 4$ eenhede en $AD = 4\sqrt{2}$ eenhede, bereken die lengtes van al die ander lynsegmente in die skets. Laat jou antwoorde in vereenvoudige wortelvorm.
3. Druk $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\tan\alpha$ uit op soveel verskillende maniere as moontlik.
   Byvoorbeeld $\sin\alpha = \frac{BA}{BC} = \frac{AD}{AC} = \ldots$
4. Gegee dat $A\hat{B}C = \beta$, druk $\sin\beta$, $\cos\beta$ en $\tan\beta$ uit op soveel verskillende maniere as moontlik.

Taak 2

Die drie sirkels het radii van 2, 3 en 5 eenhede.



1. Lees die koördinate van die gemerkte punte: $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ C_3$ so noukeurig as moontlik af en voltooi vervolgens die volgende tabel (werk korrek tot 1 desimale plek):

	x-koördinate	y-koördinate	$\frac{x}{r}$	$\frac{y}{r}$	$\frac{y}{x}$
A_1					
A_2					
A_3					
B_1					
B_2					
B_3					
C_1					
C_2					
C_3					

2. Skryf enige waarnemings neer oor wat jy gelees en bereken het met die gebruik van die koöordinate van die nege punte.

Taak 3

1. Meet $A\hat{O}D$, $B\hat{O}D$ en $C\hat{O}D$ en gebruik jou sakrekenaar om die sinus, cosinus en tangens waardes van elk van die hierdie drie hoeke te bepaal.
2. Hoe, indien enigsens moontlik, word die verhoudings in die vorige vraag bepaal met betrekking tot die waardes in die tabel wat voltooi is in taak 2?
3. Gebruik you sakrekenaar om die volgende te ondersoek:
   a) die maksimum en minimumwaardes van $\sin\theta$, $\cos\theta$ en $\tan\theta$ indien hulle bestaan, vir enige waardes van θ (probeer veelvoude van 10°)
   b) die waarde(s) van $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ vir ten minste 5 waardes van θ (gebruik $\theta = 0°$, sommige positiewe en sommige negatiewe waardes).
   c) die waardes van $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ en $\tan\theta$ vir ten minste 5 waardes van θ
4. Skryf enige waarneming neer oor die resultaat wat jy verkry met jou sakrekenaarwerk.

15.6 Projek: Inleiding tot Datahantering

In hierdie opdrag wil ons ondersoek hoe mense by die skool kom in die oggend. Wat is die mees populêre vervoermetode en bestaan daar 'n korrelasie tussen die afstand wat hulle van die skool af bly en die tydsduur van hulle reis?

Om dit te kan doen, moet jy inligting insamel van die leerders by jou skool. Voor jy die data kan insamel, is dit belangrik om seker te wees van watter vrae jy beantwoord wil hê sodat jy al die data insamel wat jy nodig het. Jy moet ook jou steekproefgrootte versigtig oorweeg. Dit moet groot genoeg wees om die bevolking voldoende te verteenwoordig, maar klein genoeg om dit hanteerbaar te hou. Hoe meer data jy insamel, hoe meer akkuraat sal jou afleidings wees.

Deel 1

Vir elke individu moet jy die volgende opteken:

1. Watter metode van vervoer hulle gebruik om by die skool te kom (dit kan wees te voet, fiets, bus, motor, trein, ander). As hulle 'n kombinasie van vervoermiddels gebruik, byvoorbeeld as hulle stap tot by die busstop, met die bus ry en dan weer loop tot by die skool, teken die manier aan wat die grootste deel van hulle reis in terme van tyd verteenwoordig.
2. Hoe ver van die skool af hulle woon
3. Hoe lank 'n tipiese reis skool toe hulle neem

Deel 2

1. Bepaal die modale vorm van vervoer (die modus) vir jou datastel en beide die mediaan en die gemiddelde vir die afstand gereis en die tyd geneem.
2. Verduidelik waarom dit nie sinvol is om die gemiddelde en die mediaan van die vorm van vervoer te vind nie.
3. Verduidelik waarom dit die beste mag wees om die tyd geneem en die afstand gereis in intervalle te groepeer voor jy die modus van elk van hierdie twee datastelle vind.

4. Besluit op redelike intervalle vir jou data vir die tyd geneem om by die skool te kom. Groepeer jou data en stel dit grafies voor met behulp van ’n histogram.
5. Vanaf jou histogram, bepaal die modale interval vir die tyd geneem om by die skool te kom.
6. Probeer om redes te gee waarom sekere vervoermetodes meer gewild is as ander, met verwysing na die area waarbinne die skool lê en hoe dit mag verskil van skole in ander areas.

Deel 3

’n Spreigrafiek is goed om te bepaal of daar enige korrelasie is tussen twee verskillende stelle data. Daar is drie verskillende tipes korrelasies wat mag voorkom naamlik ’n positiewe korrelasie, waar een datastel toeneem as die ander datastel toeneem; negatiewe korrelasie, waar een datastel afneem as die ander toeneem, of geen korrelasie, waar die datastelle geen verband toon nie.

Jy moet ’n spreigrafiek trek om die korrelasie te ondersoek tussen die afstand van die skool af en die tyd wat dit neem om daardie afstand af te lê. Ten einde dit te doen, moet jy die x-as benoem ten opsigte van die een datastel en die y-as ten opsigte van die ander datastel. Vervolgens stip jy ’n punt vir elke individu in jou steekproef. Hoe meer punte gestip is op die grafiek, hoe duideliker word die verwantskap.

Gebruik jou grafiek en bepaal of daar ’n korrelasie bestaan tussen die afstand wat mense aflê om by die skool te kom en die tyd wat dit neem om daar te kom. Motiveer jou antwoord deur te verwys na jou spreigrafiek en probeer om redes te vind vir die korrelasie of die afwesigheid daarvan.

Deel 4

Op ‘n sirkelgrafiek (”pie chart”) stel die data voor wat jy ingsamel het oor die metode van vervoer skool toe. Maak seker dat jy ’n sleutel gee en dui die persentasies van die steekproef op jou diagram aan.

Deel 5

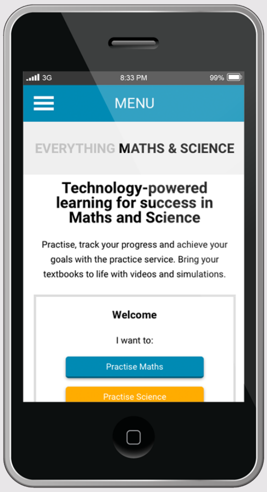
Skryf ’n paragraaf oor die vervoergewoontes van die leerders by jou skool met die gebruik van al die inligting wat jy ingesamel het en op verskillende maniere voorgestel het.

KABV WEERGAWE 1.1

GRAAD 10
WISKUNDE
ONDERWYSERSGIDS

GESKRYF DEUR SIYAVULA EN VRYWILLIGERS

HIERDIE HANDBOEK IS BESKIKBAAR OP JOU SELFOON



Hierdie handboek is beskikbaar op die web en mobi.
Less, sien oplossings en oefen slim by www.everythingmaths.co.za

ISBN 978-1-928208-38-9

9 781928 208389 >

SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING