WISKUNDE

Graad 9

Boek 1

KABV

Leerderboek

Ontwikkel en gefinansier as 'n voortgesette projek van die Sasol Inzalo Stigting, in samewerking met die Ukuqonda Instituut.

Gepubliseer deur The Ukuqonda Institute
Nealestraat 9, Rietondale 0084
Geregistreer as Titel 21-maatskappy, registrasienommer 2006/026363/08
Openbare Bevoordelingsorganisasie, PBO-no. 930035134
Webwerf: http://www.ukuqonda.org.za

Eerste publikasie in 2014

ISBN: 978-1-920705-40-4

Hierdie boek is ontwikkel in samewerking met die Departement van Basiese Onderwys van Suid-Afrika, met finansiering van die Sasol Inzalo Stigting.

Medewerkers:
Piet Human, Erna Lampen, Marthinus de Jager, Louise Keegan, Paul van Koersveld, Nathi Makae, Enoch Masemola, Therine van Niekerk, Alwyn Olivier, Cerenus Pfeiffer, Renate Röhrs, Dirk Wessels, Herholdt Bezuidenhout

Illustrasies en grafieka:
Leonora van Staden; Lisa Steyn Illustration; Zhandre Stark, Lebone Publishing Services
Rekenaargrafieka op die tweede bladsye van die *Leerderboek*-hoofstukke: Piet Human

Voorbladillustrasie: Leonora van Staden

Teksontwerp: Mike Schramm

Uitleg en setwerk: Lebone Publishing Services

Gedruk deur: [printer name and address]

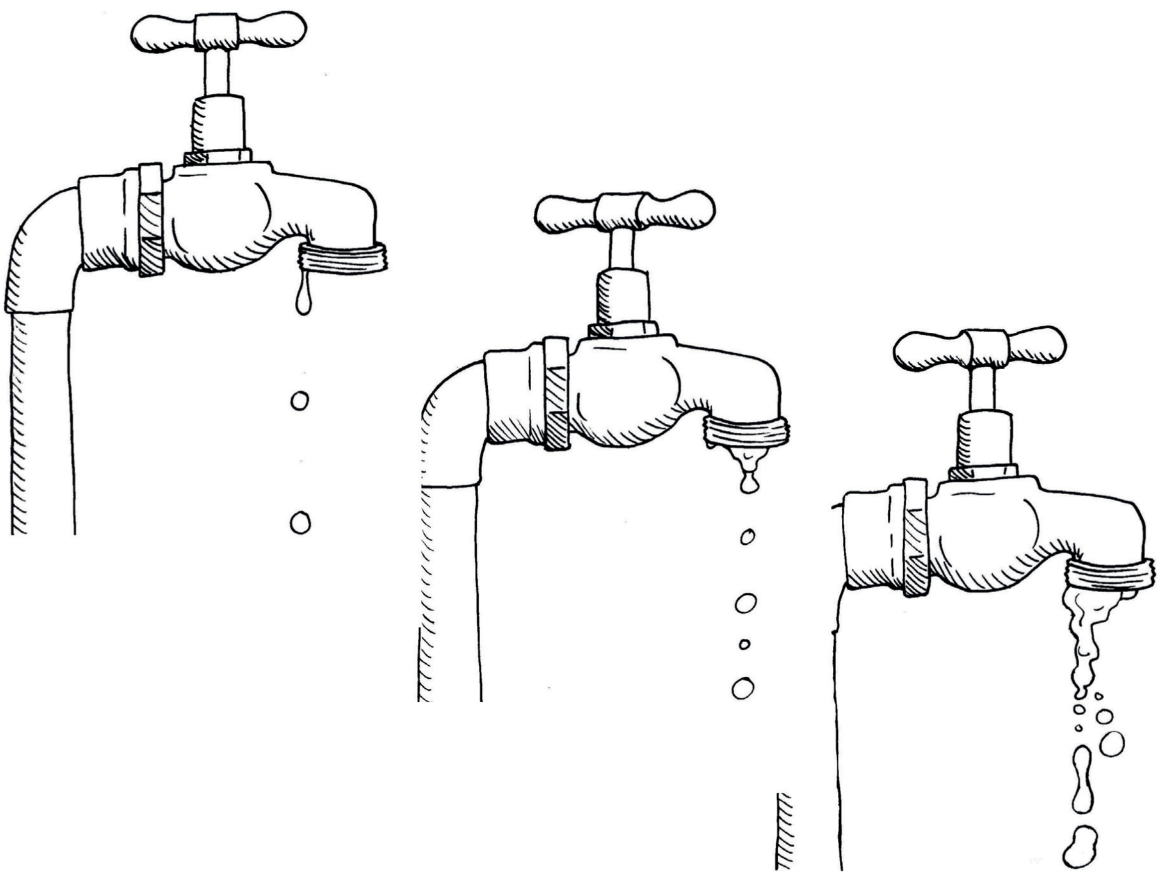
Inhoudsopgawe

Kwartaal 1

Kwartaal 2

Hoofstuk 1
Telgetalle

In hierdie hoofstuk gaan jy met verskillende soorte getalle werk wat ons gebruik om mee te tel en te meet, om vergelykings op te los asook vir baie ander doeleindes.



				99	100	101	102	103
				90	91	92	93	94
				81	82	83	84	85
				72	73	74	75	76
				63	64	65	66	67
				54	55	56	57	58
				45	46	47	48	49
				36	37	38	39	40
				27	28	29	30	31
				18	19	20	21	22
				9	10	11	12	13
–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
–13	–12	–11	–10	–9				
–22	–21	–20	–19	–18				
–31	–30	–29	–28	–27				
–40	–39	–38	–37	–36				
–49	–48	–47	–46	–45				
–58	–57	–56	–55	–54				
–67	–66	–65	–64	–63				
–76	–75	–74	–73	–72				
–85	–84	–83	–82	–81				
–94	–93	–92	–91	–90				
–103	–102	–101	–100	–99				
–112	–111	–110	–109	–108				

1 Telgetalle

1.1 Eienskappe van getalle

VERSKILLENDE SOORTE GETALLE

Die natuurlike getalle

Die getalle wat ons gebruik om te tel word **natuurlike getalle** genoem:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Natuurlike getalle het die volgende eienskappe:

> As jy twee of meer natuurlike getalle optel, kry jy weer ’n natuurlike getal.
> As jy twee of meer natuurlike getalle vermenigvuldig, kry jy weer ’n natuurlike getal.

Wiskundiges beskryf dit deur te sê: die stelsel van natuurlike getalle is **geslote onder optel en vermenigvuldiging**.

As jy ’n natuurlike getal van ’n ander natuurlike getal aftrek, is die antwoord egter nie altyd weer ’n natuurlike getal nie. Daar is byvoorbeeld nie ’n natuurlike getal wat die antwoord op 5 – 20 gee nie.

Ook wanneer ’n natuurlike getal deur ’n ander natuurlike getal gedeel word, is die antwoord nie altyd weer ’n natuurlike getal nie. Daar is byvoorbeeld nie ’n natuurlike getal wat die antwoord op 10 ÷ 3 gee nie.

> As jy met natuurlike getalle aftrek of deel is die antwoorde nie altyd natuurlike getalle nie.

Die stelsel van natuurlike getalle is **nie geslote onder aftrek of deling nie**.

1. (a) Is daar ’n kleinste natuurlike getal, dit wil sê ’n natuurlike getal wat kleiner as alle ander natuurlike getalle is? Indien wel, wat is dit? ....

   (b) Is daar ’n grootste natuurlike getal, dit wil sê ’n natuurlike getal wat groter as alle ander natuurlike getalle is? Indien wel, wat is dit? ....

2. Sê in elk van die volgende gevalle of die antwoord ’n natuurlike getal is of nie.

   (a) 100 + 400 ....

   (b) 100 – 400 ....

   (c) 100 × 400 ....

   (d) 100 ÷ 400 ....

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 3 2014/07/03 09:33:52 AM

Die telgetalle

Alhoewel ons 0 nie gebruik om te tel nie, het ons dit nodig om getalle te skryf. Sonder 0 sou ons 'n spesiale simbool vir 10, alle veelvoude van 10 en 'n paar ander getalle nodig hê, byvoorbeeld vir al die getalle wat in die geel selle (blokkies) in hierdie tabel hoort.

	41	42	43	44	45	46	47	48	49
	51	52	53	54	55	56	57	58	59
	61	62	63	64	65	66	67	68	69
	71	72	73	74	75	76	77	78	79
	81	82	83	84	85	86	87	88	89
	91	92	93	94	95	96	97	98	99
	111	112	113	114	115	116	117	118	119

Die natuurlike getalle gekombineer met 0 word die stelsel van **telgetalle** genoem.

As jy met natuurlike getalle werk en twee getalle bymekaartel, sal die antwoord altyd anders wees as enigeen van die twee getalle wat jy bymekaargetel het. Byvoorbeeld: $21 + 25 = 46$ en $24 + 1 = 25$. As jy met telgetalle werk, met ander woorde 0 ingesluit, is dit nie die geval nie. As 0 by 'n getal getel word, is die antwoord steeds die getal waarmee jy begin het: $24 + 0 = 24$.

Om hierdie rede word 0 die **identiteitselement vir optel** genoem. In die versameling natuurlike getalle is daar nie 'n identiteitselement vir optel nie.

3. Is daar 'n identiteitselement vir vermenigvuldiging in die telgetalle? Verduidelik.

....

4. (a) Wat is die kleinste natuurlike getal? ....

(b) Wat is die kleinste telgetal? ....

Die heelgetalle

In die versameling telgetalle is daar nie 'n antwoord beskikbaar as jy 'n getal aftrek van 'n getal wat kleiner as daardie getal self is nie. Daar is byvoorbeeld nie 'n telgetal wat die antwoord vir $5 - 8$ is nie. Daar is wel 'n antwoord hiervoor in die stelsel van heelgetalle.

$5 - 8 = -3$. Die getal -3 word as "negatief 3" of "minus 3" gelees.

Die telgetalle begin met 0 en brei in een rigting uit:

0 1 2 3 4 5 6 → → → ......

Die heelgetalle brei in albei rigtings uit:

...... ← ← ← −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 → → → ......

Alle telgetalle is ook heelgetalle. Die versameling telgetalle maak deel uit van die versameling heelgetalle. Daar is ’n ooreenstemmende negatiewe getal vir elke telgetal (behalwe vir die getal 0). Die negatiewe getal –5 stem ooreen met die telgetal 5 en die negatiewe getal –120 stem ooreen met die telgetal 120.

In die versameling heelgetalle kan die som van twee getalle 0 wees, byvoorbeeld $20 + (-20) = 0$ en $135 + (-135) = 0$.

20 en –20 word **optellingsinverses** (of additiewe inverses) van mekaar genoem.

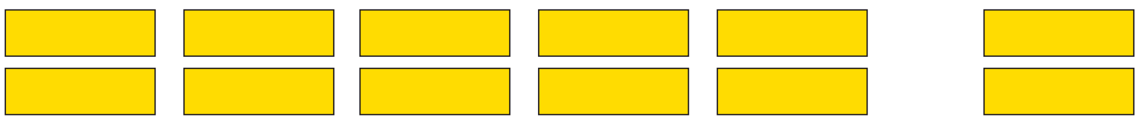
5. Bereken die volgende sonder om ’n sakrekenaar te gebruik.

   (a) 100 – 165 .... (b) 300 – 700 ....

6. Jy mag ’n sakrekenaar gebruik om die volgende te bereken:

   (a) 123 – 765 .... (b) 385 – 723 ....

Die rasionale getalle



7. Vyf mense verdeel 12 blokke sjokolade gelykop tussen hulle.

   (a) Sal elke persoon meer of minder as twee volle blokke sjokolade kry? ....

   (b) Kan elke persoon nog ’n helfte van ’n blok kry? ....

   (c) Hoeveel meer as twee volle blokke kan elkeen kry as die twee oorblywende blokke gedeel word soos hier gewys is?

   ....

   (d) Sal elke persoon 2,4 of $2\frac{2}{5}$ blokke kry? ....

Die stelsel van heelgetalle maak nie voorsiening vir ’n antwoord op alle moontlike delingsvrae nie. Hier bo, byvoorbeeld, is die antwoord van $12 \div 5$ nie ’n telgetal of ’n heelgetal nie. Om antwoorde vir alle moontlike delingsvrae te hê moet ons die getallestelsel uitbrei om breuke en negatiewe breuke in te sluit, met ander woorde getalle van die vorm $\frac{\text{heelgetal}}{\text{heelgetal}}$. Hierdie getallestelsel word die **rasionale getalle** genoem. Ons kan rasionale getalle as gewone breuke of as desimale voorstel.

8. Druk die antwoorde vir elk van die volgende delingsprobleme op twee maniere uit: in gewone breuknotasie en in die desimale notasie vir breuke.

   (a) $23 \div 10$ (b) $23 \div 5$

   ....

   (c) $230 \div 100$ (d) $8 \div 10$

   ....

9. Dink na oor die bewerings en skryf "ja" of "nee" in elke sel van die tabel hier onder.

Bewering	**Natuur-like getalle**	**Tel-getalle**	**Heel-getalle**	**Rasio-nale getalle**
Die som van twee getalle is 'n getal van dieselfde soort (geslote onder optel).				
Die som van twee getalle is altyd groter as enigeen van die getalle.				
As een getal van 'n ander afgetrek word, is die antwoord 'n getal van dieselfde soort (geslote onder aftrek).				
As een getal van 'n ander afgetrek word, is die antwoord altyd kleiner as die eerste getal.				
Die produk van twee getalle is 'n getal van dieselfde soort (geslote onder optel).				
Die produk van twee getalle is altyd groter as enigeen van die getalle.				
Die kwosiënt van twee getalle is 'n getal van dieselfde soort (geslote onder deling).				
Die kwosiënt van twee getalle is altyd kleiner as die eerste van die twee getalle.				

Die irrasionale getalle

Rasionale getalle maak nie voorsiening vir alle situasies wat in wiskunde kan voorkom nie. Daar is byvoorbeeld nie 'n rasionale getal wat die antwoord 2 sal gee as dit met homself vermenigvuldig word nie, dit wil sê:

(getal) × (dieselfde getal) = 2

$2 \times 2 = 4$ en $1 \times 1 = 1$, so dis duidelik dat hierdie getal tussen 1 en 2 moet wees. Maar daar is nie 'n getal wat as 'n breuk uitgedruk kan word wat hierdie probleem sal oplos nie, nie in gewone breuknotasie nie en ook nie in die desimale notasie vir breuke nie. Getalle soos dié word **irrasionale getalle** genoem.

Die rasionale en irrasionale getalle staan saam bekend as die **reële getalle**.

Hier is nog 'n paar voorbeelde van irrasionale getalle:

$\sqrt{5}$ $\quad\sqrt{10}$ $\quad\sqrt{3}$ $\quad\sqrt{7}$ $\quad\pi$

1.2 Berekeninge met telgetalle

Moet glad nie 'n sakrekenaar in afdeling 1.2 gebruik nie.

SKAT, ROND AF EN KOMPENSEER

1. 'n Winkeleienaar wil hoenders by 'n boer koop. Die boer wil R38 vir elke hoender hê. Beantwoord die volgende vrae sonder om enige berekeninge neer te skryf.
   (a) As die winkeleienaar R10 000 het om hoenders te koop, dink jy hy kan meer as 500 hoenders koop? ....
   (b) Dink jy hy kan meer as 200 hoenders koop? ....
   (c) Dink jy hy kan meer as 250 hoenders koop? ....

Wat jy in vraag 1 probeer doen het, word **skatting** genoem. As jy met getalle werk, beteken skatting om so na as moontlik by die regte antwoord uit te kom sonder om werklik 'n berekening te maak. Jy kan egter ander, makliker berekeninge doen as jy skat.

Wanneer 'n akkurate antwoord nie nodig is nie, kan getalle afgerond word. So kan ons byvoorbeeld die koste van 51 hoenders teen R38 **benader** deur 50 × 40 te bereken. Dit is duidelik baie makliker as om 51 × R38 te bereken.

Om iets te benader beteken om te probeer uitvind min of meer hoeveel dit is, sonder om dit presies te meet of te bereken.

2. (a) Hoeveel is 5 × 4? ....
   (b) Hoeveel is 5 × 40? ....
   (c) Hoeveel is 50 × 40? ....

Die koste van 51 hoenders teen R38 elk is nagenoeg R2 000.

Hierdie benadering is verkry deur beide 51 en 38 tot die naaste veelvoud van 10 af te rond en dan met die veelvoude van 10 te bereken.

3. Skat die koste deur af te rond om die benaderde koste te bereken (sonder om 'n sakrekenaar te gebruik). Maak elke keer twee skattings. Maak eers 'n ruwe skatting deur die getalle tot die naaste 100 af te rond voor berekening. Maak dan 'n beter skatting deur die getalle tot die naaste 10 af te rond voor berekening.
   (a) 83 bokke word vir R243 elk verkoop.
   ....
   ....
   (b) 121 stoele word vir R258 elk verkoop.
   ....
   ....
   (c) R5 673 word by R3 277 getel.
   ....
   ....
   (d) R874 word van R1 234 afgetrek.
   ....
   ....

Gestel jy moet R823 – R273 bereken.
Jy kan 'n skatting maak deur die getalle tot die naaste 100 af te rond:
R800 – R300 = R500

4. (a) Deur met R800 in plaas van R823 te werk, is 'n fout in jou antwoord ingebring. Hoe kan hierdie fout reggestel word: deur R23 by die R500 te tel, of deur dit van R500 af te trek? ....
(b) Stel die fout reg om 'n beter skatting te kry. ....
(c) Stel nou ook die fout reg wat gemaak is deur R300 in plaas van R273 af te trek.

....

Wat jy in vraag 4 gedoen het word **kompensering vir foute** genoem.

5. Skat elk van die volgende deur die getalle tot die naaste 100 af te rond.

(a) 812 – 342
....
(b) 2 342 – 1 876
....
(c) 812 + 342
....
(d) 2 342 + 1 876
....
(e) 9 + 278
....
(f) 3 231 – 1 769
....
(g) 8 234 – 2 776
....
(h) 5 213 – 3 768
....

6. Bepaal die presiese antwoord vir elk van die berekeninge in vraag 5 deur die foute uit te werk wat deur afronding veroorsaak is en daarvoor te kompenseer.

(a)
....
....
....
(b)
....
....
....
(c)
....
....
....
(d)
....
....
....

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 8 2014/07/03 09:33:54 AM

(e) ....

(f) ....

(g) ....

(h) ....

TEL OP IN KOLOMME

1. (a) Skryf 8 000 + 1 100 + 130 + 14 as een getal: ....
   (b) Skryf 3 000 + 700 + 50 + 8 as een getal: ....
   (c) Skryf 5 486 in uitgebreide notasie, soos in 1(b) gewys word.

   ....

Jy kan 3 758 + 5 486 bereken soos hier links onder gewys word.

	3 758
	5 486
Stap 1	8 000
Stap 2	1 100
Stap 3	130
Stap 4	14
	9 244

Jy kan dit kortweg doen, soos aan die regterkant gewys word. Jy moet wel jou brein 'n bietjie meer inspan, maar dit spaar papier!

3 758
5 486
9 244

2. Verduidelik hoe die getalle in elkeen van stappe 1 tot 4 verkry word.

   ....
   ....
   ....
   ....

Dit is net moontlik om die korter metode te gebruik as jy die ene eerste optel, dan die tiene, dan die honderde en laastens die duisende. Dan kan jy doen wat jy in vraag 1(a) gedoen het, sonder om die getalle apart in uitgebreide vorm neer te skryf.

3. Bereken elk van die volgende sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

(a) 3 878 + 3 784 (b) 298 + 8 594

....

....

....

(c) 10 921 + 2 472 (d) 1 298 + 18 782

....

....

....

4. 'n Boer koop 'n trok vir R645 840, 'n trekker vir R783 356, 'n ploeg vir R83 999 en 'n bakkie vir R435 690.

(a) Skat tot die naaste R100 000 hoeveel hierdie items altesaam sal kos.

....

....

(b) Gebruik 'n sakrekenaar om die totale koste te bereken.

....

....

5. 'n Belegger maak eers R543 682 op die aandelemark en verloor dan weer R264 359 op dieselfde dag.

(a) Skat tot die naaste R100 000 hoeveel geld sy daardie dag gemaak het.

....

....

(b) Gebruik 'n sakrekenaar om die werklike bedrag te bepaal.

....

VERMENIGVULDIG IN KOLOMME

1. (a) Skryf 3 489 in uitgebreide notasie: ....

   (b) Skryf 'n uitdrukking sonder hakies neer wat ekwivalent is aan

   $7 \times (3\,000 + 400 + 80 + 9)$: ....

$7 \times 3\,489$ kan bereken word soos hier links onder gewys word.

	3 489
	× 7
Stap 1	63
Stap 2	560
Stap 3	2 800
Stap 4	21 000
	24 423

Hier regs is 'n korter metode.

3 489
× 7
24 423

2. Verduidelik hoe die getalle in elke stap van 1 tot 4 links bo verkry is.

   ....

$47 \times 3\,489$ kan bereken word soos hier links onder gewys word.

	3 489
	× 47
Stap 1	63
Stap 2	560
Stap 3	2 800
Stap 4	21 000
Stap 5	360
Stap 6	3 200
Stap 7	16 000
Stap 8	120 000
	163 983

Hier regs is 'n korter metode.

3 489
× 47
24 423
139 560
163 983

3. Verduidelik hoe die getalle in elke stap van 5 tot 8 hier links bo verkry is.

   ....

4. Verduidelik hoe die getal 139 560 wat in die korter vorm regs bo verskyn, verkry is.

   ....

TREK AF IN KOLOMME

1. Skryf elk van die volgende as een getal.
   (a) 8 000 + 400 + 30 + 2 ....
   (b) 7 000 + 1 300 + 120 + 12 ....
   (c) 3 000 + 900 + 50 + 7 ....

2. As jy reg gewerk het, sal jou antwoorde vir vrae 1(a) en 1(b) dieselfde wees. As dit nie die geval is nie, doen jou werk oor.

Die uitdrukking 7 000 + 1 300 + 120 + 12 in vraag 1(b) is gevorm uit 8 000 + 400 + 30 + 2 deur

- 1 000 by 8 000 weg te vat en dit by die honderde-term te tel om 1 400 te kry,
- 100 by 1 400 weg te vat en dit by die tiene-term te tel om 130 te kry, en
- 10 by 130 weg te vat en dit by die ene-term te tel om 12 te kry.

3. Vorm 'n uitdrukking soos die uitdrukking in vraag 1(b) vir elk van die volgende:
   (a) 8 000 + 200 + 100 + 4 (b) 3 000 + 400 + 30 + 1

   ....

4. Skryf uitdrukkings soos dié in vraag 1(b) vir die getalle hier onder.
   (a) 7 214 .... (b) 8 103 ....

8 432 – 3 957 kan soos volg bereken word:

	8 432
	– 3 957
Stap 1	5
Stap 2	70
Stap 3	400
Stap 4	4 000
Stap 5	4 475

Om die aftrekking in elke kolom te doen moet jy aan 8 432 dink as 8 000 + 400 + 30 + 2. Jy moet eintlik daaraan dink as 7 000 + 1 300 + 120 + 12.
In stap 1 word die 7 in 3 957 van 12 afgetrek.

5. (a) Hoe word die 70 in stap 2 verkry? ....
   ....
   (b) Hoe word die 400 in stap 3 verkry? ....
   ....
   (c) Hoe word die 4 000 in stap 4 verkry? ....
   ....
   (d) Hoe word die 4 475 in stap 5 verkry? ....
   ....

Weens die nulle wat in stap 2, 3 en 4 verkry word, hoef die antwoorde eintlik nie apart neergeskryf te word soos op die vorige bladsy gewys is nie. Die werk kan eintlik op die kort manier, soos hier regs, gedoen word.

$$\begin{array}{r} 8\,432 \\ -\ 3\,957 \\ \hline 4\,475 \end{array}$$

6. Bereken elk van die volgende sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.
   (a) 9 123 – 3 784 (b) 8 284 – 3 547

   ....

   ....

   ....

7. Gebruik 'n sakrekenaar om jou antwoorde vir vraag 6 te kontroleer. As jou antwoorde verkeerd is, probeer weer!

8. Bereken elk van die volgende sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.
   (a) 7 243 – 3 182 (b) 6 221 – 1 888

   ....

   ....

   ....

Jy mag 'n sakrekenaar gebruik om die berekeninge hier onder te doen.

9. Bettina het R87 456 in haar spaarrekening. Sy onttrek R44 800 om 'n motor te koop. Hoeveel geld is in haar spaarrekening oor?

   ....

10. Liesbet open 'n spaarrekening deur 'n deposito van R40 000 te maak. Sy doen oor 'n tydperk die volgende transaksies op die spaarrekening:

    'n onttrekking van R4 000
    'n onttrekking van R2 780
    'n deposito van R1 200
    'n deposito van R7 550
    'n onttrekking van R5 230
    'n deposito van R8 990
    'n deposito van R1 234

    Hoeveel geld het sy nou in haar spaarrekening? ....

Hier beteken "deposito" 'n inbetaling.

11. (a) R34 537 – R13 267 (b) R135 349 – R78 239

    ....

LANGDELING

Kyk na hierdie metode om 13 254 ÷ 56 te bereken:

	13 254	
200 × 56 = 11 200	11 200	(200 is 'n skatting van die antwoord vir 13 254 ÷ 56)
	2 054	(2 054 bly oor nadat 11 200 van 13 254 afgetrek is)
30 × 56 = 1 680	1 680	(30 is 'n skatting van die antwoord vir 2 054 ÷ 56)
	374	(374 bly oor nadat 1 680 van 2 054 afgetrek is)
6 × 56 = 336	336	(6 is 'n skatting van die antwoord vir 374 ÷ 56)
236 × 56 = 13 216	38	(38 bly oor)

So 13 254 ÷ 56 = 236 res 38, of 13 254 ÷ 56 = $236\frac{38}{56} = 236\frac{19}{28}$, wat ook as 236,68 (korrek tot twee desimale syfers) geskryf kan word.

Die werk kan ook soos volg uiteengesit word:

$$
\begin{array}{r|r}
 & 6 \\
 & 30 \\
 & 200 \\ \hline
56 & 13\,254 \\
 & \underline{11\,200} \\
 & 2\,054 \\
 & \underline{1\,680} \\
 & 374 \\
 & \underline{336} \\
 & 38
\end{array}
\quad \text{of ietwat korter as} \quad
\begin{array}{r|r}
 & 236 \\ \hline
56 & 13\,254 \\
 & \underline{11\,200} \\
 & 2\,054 \\
 & \underline{1\,680} \\
 & 374 \\
 & \underline{336} \\
 & 38
\end{array}
$$

1. (a) Mlungisi se werk om 'n sekere berekening te doen word hier regs gewys. Wat is die vraag wat Mlungisi probeer beantwoord?

$$
\begin{array}{lr|r}
 & & 463 \\ \hline
 & 78 & 36\,177 \\
\text{Stap 1} & & \underline{31\,200} \\
\text{Stap 2} & & 4\,977 \\
\text{Stap 3} & & \underline{4\,680} \\
\text{Stap 4} & & 297 \\
\text{Stap 5} & & \underline{234} \\
 & & 63
\end{array}
$$

....

(b) Waar kom die getal 31 200 in stap 1 vandaan? Hoe het Mlungisi dit gekry en vir watter doel het hy dit bereken?

....

....

(c) Verduidelik stap 2 op dieselfde manier as wat jy stap 1 verduidelik het.

....

(d) Verduidelik stap 3.

....

2. Bereken elk van die volgende sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

(a) 33 030 ÷ 63

(b) 18 450 ÷ 27

3. Gebruik 'n sakrekenaar om jou antwoorde vir vraag 2 te kontroleer. As jou antwoorde verkeerd is, probeer weer. Dis belangrik dat jy langdeling reg kan doen.

4. Bereken elk van die volgende sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

(a) 76 287 ÷ 287

(b) 65 309 ÷ 44

Gebruik jou sakrekenaar vir vrae 5 en 6.

5. 'n Munisipaliteit het R85 000 begroot om nuwe straatnaamborde op te sit. Die straatnaamborde kos R72 elk. Hoeveel nuwe straatnaamborde kan opgesit word en hoeveel geld sal in die begroting oor wees?

6. 'n Meubelhandelaar het R840 000 gekwoteer om 3 450 skoolbanke te verskaf. 'n Skoolverskaffingsmaatskappy het R76 000 gekwoteer om 2 250 van dieselfde tipe skoolbank te verskaf. Watter verskaffer is die goedkoopste en wat vra elk van die verskaffers vir een skoolbank?

1.3 Veelvoude en faktore

KLEINSTE GEMENE VEELVOUD EN PRIEMFAKTORISERING

1. Die tabel wys opeenvolgende veelvoude van 6, beginnende met 6.

6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
126	132	138	144	150	156	162	168	174	180
186	192	198	204	210	216	222	228	234	240

(a) Hierdie tabel wys ook veelvoude van 'n getal. Wat is die getal? ....

15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
315	330	345	360	375	390	405	420	435	450
465	480	495	510	525	540	555	570	585	600

(b) Omkring al die getalle wat in albei tabelle voorkom.

(c) Wat is die kleinste getal wat in albei tabelle voorkom? ....

90 is 'n veelvoud van 6. Dit is ook 'n veelvoud van 15.
90 word 'n **gemene veelvoud** van 6 en 15 genoem, dit is 'n veelvoud van albei.
Die kleinste getal wat 'n veelvoud van beide 6 en 15 is, is die getal 30. Die getal 30 word die **kleinste gemene veelvoud** of **KGV** van 6 en 15 genoem.

2. Bereken, sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

(a) $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

....

(b) $2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 13$

....

(c) $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 13$

....

(d) $3 \times 5 \times 5 \times 17$

....

Gebruik 'n sakrekenaar om jou antwoorde te kontroleer of vergelyk dit met dié van 'n paar klasmaats.

2 is 'n faktor van elk van die getalle 2 310, 1 820 en 3 510.
'n Ander manier om dit te sê is: 2 is 'n **gemene deler** van 2 310, 1 820 en 3 510.

3. (a) Is 2 × 3, dit wil sê 6, 'n gemene deler van 2 310 en 3 510? ....

   (b) Is 2 × 3 × 5, dit wil sê 30, 'n gemene deler van 2 310 en 3 510? ....

   (c) Is daar enige groter getal as 30 wat 'n gemene deler van 2 310 en 3 510 is? ....

30 word die **grootste gemene deler** of **GGD** van 2 310 en 3 510 genoem.

Die **priemfaktore** van die getalle 2 310, 1 820, 3 510 en 1 275 is in vraag 2 gelys.

> Die KGV van twee getalle kan bepaal word deur al die priemfaktore van albei getalle met mekaar te vermenigvuldig, sonder herhaling (behalwe waar 'n getal as 'n faktor in een van die getalle herhaal word).
>
> Die GGD van twee getalle kan bepaal word deur die priemfaktore wat gemeenskaplik aan beide getalle is met mekaar te vermenigvuldig, dit wil sê dié wat in albei getalle se lys priemfaktore voorkom.

4. Bepaal telkens die GGD en KGV van die twee getalle.

   (a) 1 820 en 3 510

   ....

   ....

   ....

   ....

   (b) 2 310 en 1 275

   ....

   ....

   ....

   ....

   (c) 1 820 en 3 510 en 1 275

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (d) 2 310 en 1 275 en 1 820

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (e) 780 en 7 700

   ....

   ....

   ....

   ....

   (f) 360 en 1 360

   ....

   ....

   ....

   ....

1.4 Probleemoplossing: verhouding, koers (tempo) en eweredigheid

Jy mag 'n sakrekenaar gebruik in hierdie afdeling.

PROBLEME OOR VERHOUDING, KOERS (TEMPO) EN EWEREDIGHEID

1. Moeneba pluk appels in die vrugteboord. Sy pluk elke minuut omtrent 5 appels. Ongeveer hoeveel appels sal Moeneba in elk van die volgende tye pluk?

   (a) 8 minute .... (b) 11 minute ....

   (c) 15 minute .... (d) 20 minute ....

In die situasie wat in vraag 1 beskryf word, pluk Moeneba appels **teen 'n tempo van** omtrent 5 appels **per minuut**. 'n Ander manier om dit te beskryf, is om te sê **die koers** waarteen Moeneba appels pluk, **is** 5 appels **per minuut**.

2. Garth en Kate pluk ook appels in die boord, maar hulle werk albei vinniger as Moeneba. Garth pluk teen 'n tempo van omtrent 12 appels per minuut en Kate pluk teen 'n tempo van omtrent 15 appels per minuut. Voltooi die tabel om te wys ongeveer hoeveel appels hulle elkeen in verskillende tydintervalle sal pluk.

Tydperk in minute	1	2	3	8	10	20
Moeneba	5			40		
Garth	12					
Kate	15					
Al drie saam	32					

In hierdie situasie is die getal appels wat gepluk word **direk eweredig** aan die tyd wat dit neem om die appels te pluk.

As jy die tabel reg ingevul het, sal jy sien dat Kate tydens enige tydinterval 3 keer soveel appels soos Moeneba gepluk het. Ons kan sê dat die **verhouding** tussen die getal appels wat Moeneba gepluk het en die getal appels wat Kate gepluk het, tydens enige tydinterval **3 tot 1** is. Ons kan dit skryf as **3:1**. Die verhouding tussen die getal appels wat Garth gepluk het en dié wat Moeneba gepluk het, is tydens enige tydinterval 12:5.

3. (a) Wat is die verhouding tussen die getal appels wat Kate en Garth tydens enige tydinterval gepluk het? ....

   (b) Sal dit ook korrek wees om te sê dat die verhouding tussen die getal appels wat Kate en Garth gepluk het 5:4 is? Verduidelik jou antwoord.

   ....

4. Om 'n sekere soort beskuitjie te maak, moet 5 dele koekmeel met 2 dele hawermeel en 1 deel kakaopoeier gemeng word. Hoeveel hawermeel en hoeveel kakaopoeier moet gebruik word as 500 g koekmeel gebruik word?

....

5. 'n Motoris ry 'n afstand van 360 km in presies 4 ure.
   (a) Ongeveer hoe ver het die motoris in 1 uur gery? ....
   (b) Dink jy die motoris het presies 90 km in elk van die 4 ure gery? Verduidelik jou antwoord kortliks. ....

....

   (c) Ongeveer hoe ver sal die motoris in 7 ure ry? ....
   (d) Ongeveer hoeveel tyd sal hy/sy nodig hê om 900 km te ry? ....

Party mense gebruik hierdie formules om berekeninge soos dié in vraag 5 te doen:

- **gemiddelde spoed =** $\mathbf{\dfrac{afstand}{tyd}}$, wat hier afstand ÷ tyd beteken
- **afstand = gemiddelde spoed × tyd**
- **tyd =** $\mathbf{\dfrac{afstand}{gemiddelde\ spoed}}$, wat hier afstand ÷ gemiddelde spoed beteken

6. Watter van die formule(s) sal die korrekte antwoorde lewer op vrae 5(c) en (d)?

....

7. 'n Motoris lê 'n reis af in drie dele. Tussen die dele hou hy lank stil om te eet en te rus. Tydens deel A van die reis ry hy 440 km in 4 ure. Tydens deel B ry hy 540 km in 6 ure. Tydens deel C ry hy 280 km in 4 ure.
   (a) Bereken sy gemiddelde spoed oor elk van die drie dele.

....

....

....

   (b) Bereken sy gemiddelde spoed vir die reis as geheel.

....

....

....

   (c) Die motoris moet die volgende dag 874 km ry. Hoeveel tyd (ruspouses uitgesluit) sal hy nodig hê om dit te doen? Staaf jou antwoord met berekeninge.

....

....

8. Die gemiddelde spoed waarteen voertuie ry, verskil. ’n Groot vervoertrok met ’n swaar vrag ry baie stadiger as ’n passasiersmotor. ’n Klein bakkie is ook stadiger as ’n passasiersmotor. In die tabel word die gemiddelde spoed en die tye wat benodig word deur verskillende voertuie wat almal dieselfde afstand van 720 km moet ry, gewys. Voltooi die tabel.

Tyd in ure	12	9	8	6	5
Gemiddelde spoed in km/h	60				

9. Kyk na die tabel wat jy nou net voltooi het.
   (a) Wat gebeur met die tyd wat benodig word as die gemiddelde spoed toeneem?

   ....

   (b) Wat gebeur met die gemiddelde spoed as die tyd verminder word?

   ....

   (c) Wat kan jy oor die produk, gemiddelde spoed × tyd, van die getalle in die tabel sê?

   ....

In die situasie hier bo sê ons die gemiddelde spoed is **omgekeerd eweredig** aan die tyd wat vir die reis benodig word.

1.5 Probleemoplossing in finansiële kontekste

Jy mag ’n sakrekenaar gebruik in afdeling 1.5.

AFSLAG, WINS EN VERLIES

1. R12 800 word gelykop tussen 100 mense verdeel.
   (a) Hoeveel geld kry elke persoon? ....
   (b) Hoeveel geld kry agt van die mense saam? ....

’n Ander woord vir honderdstes is **persent**.

In plaas van $\frac{5}{100}$ kan ons 5% skryf. Die simbool % beteken presies dieselfde as $\frac{}{100}$.
In vraag 1(a) het jy $\frac{1}{100}$ of 1% van R12 800 bereken, en in vraag 1(b) het jy $\frac{8}{100}$ of 8% van R12 800 bereken.

Die bedrag wat ’n handelaar vir ’n artikel betaal, word die **kosprys** genoem. Die prys wat op die artikel gemerk is, word die **gemerkte prys** of **merkprys** genoem.
Die prys van die artikel na afslag is die **verkoopprys**.

2. Hier onder is die gemerkte pryse van ’n paar artikels. ’n Afslag van 15% word aan klante gebied wat kontant betaal. Bereken hoeveel ’n klant wat kontant betaal vir elk van die artikels sal betaal.

   (a) R850 ....

   (b) R140 ....

   (c) R32 600 ....

   (d) R138 ....

Lina het ’n rusbank op ’n uitverkoping gekoop. Dit was vir R3 500 gemerk maar sy het net R2 800 betaal. Sy het ’n afslag van R700 gekry.

Watter persentasie afslag het Lina gekry?

Hierdie vraag beteken:

Hoeveel honderdstes van die gemerkte prys is afgetrek?

Om die vraag te beantwoord moet ons weet hoeveel $\frac{1}{100}$ (een honderdste) van die gemerkte prys is.

3. (a) Hoeveel is $\frac{1}{100}$ van R3 500? ....

   (b) Hoeveel honderdstes van R3 500 is dieselfde as R700?

   ....

   (c) Watter persentasie afslag het Lina gekry: 10% of 20%?

   ....

4. Die kosprys, gemerkte prys en verkoopprys van drie artikels is soos volg:

   Artikel A: kosprys = R240; gemerkte prys = R360; verkoopprys = R324

   Artikel B: kosprys = R540; gemerkte prys = R700; verkoopprys = R560

   Artikel C: kosprys = R1 200; gemerkte prys = R2 000; verkoopprys = R1 700

   Die wins is die verskil tussen die kosprys en die verkoopprys.

   Bereken vir elk van die artikels hier bo die persentasie afslag en die persentasie wins.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

5. Remey het besluit om van die huis af te werk en het ’n naaimasjien vir R750 gekoop. Sy het beplan om 40 kussingoortreksels te maak en dit teen R150 elk te verkoop. Die materiaal en ander benodigdhede het altesaam R3 600 gekos.

   (a) Hoeveel wins kan Remey maak as sy al 40 oortreksels teen hierdie prys verkoop?

   ....

   ....

   ....

   (b) Remey kon net 25 van die oortreksels verkoop en sy het besluit om die res teen R100 elk te verkoop. Bereken haar persentasie wins.

   ....

   ....

   ....

6. Zadie bak en verkoop pasteie om ’n ekstra inkomste te verdien. Die bestanddele vir haar hoenderpasteie het ongeveer R68 gekos. Sy het die pasteie vir R60 verkoop. Het Zadie ’n wins gemaak of ’n verlies gely? Bereken die persentasie verlies of wins.

   ....

HUURKOOP

Soms het jy ’n item nodig maar jy het nie genoeg geld om die volle bedrag dadelik te betaal nie. Een opsie is om die item op **huurkoop (HK)** te koop. Jy sal ’n deposito moet betaal en ’n ooreenkoms moet onderteken waarin jy onderneem om maandelikse paaiemente te betaal totdat jy die volle bedrag betaal het. Dus is

HK-prys = deposito + totaal van die paaiemente

Die verskil tussen die HK-prys en die kontantprys is die rente wat die handelaar jou vra omdat jy die item oor ’n tydperk afbetaal.

1. Sara koop ’n platskerm-televisie op huurkoop. Die kontantprys is R4 199. Sy moet ’n deposito van R950 en 12 maandelikse paaiemente van R360 betaal.

   (a) Bereken die totale HK-prys.

   ....

   (b) Hoeveel rente betaal sy?

   ....

2. Susie koop 'n motor op huurkoop. Die kontantprys van die motor is R130 000. Sy betaal 'n deposito van 10% op die kontantprys en sal vir 'n tydperk van drie jaar maandelikse paaiemente van R4 600 moet betaal. David koop dieselfde motor, maar kies 'n ander opsie. Hy betaal 'n deposito van 35% op die kontantprys en sal vir 'n tydperk van twee jaar maandelikse paaiemente van R3 950 moet betaal.
   (a) Bereken die HK-prys vir albei opsies.

   ....

   ....

   (b) Bereken die verskil tussen die totale prys wat deur Susie en deur David betaal is.

   ....

   (c) Bereken die rente wat Susie en David moet betaal as 'n persentasie van die kontantprys.

   ....

   ....

   ....

   ....

ENKELVOUDIGE RENTE

Wanneer rente vir 'n aantal jare op 'n bedrag (d.w.s. 'n vaste deposito) bereken word, sonder dat die rente elke jaar vir die doel van latere renteberekeninge by die bedrag getel word, verwys ons daarna as **enkelvoudige rente**. As die bedrag vir 'n gedeelte van 'n jaar belê word, moet die tydperk as 'n breukdeel van 'n jaar uitgedruk word.

1. Rentekoerse word gewoonlik as persentasies uitgedruk. Dit maak dit makliker om koerse te vergelyk. Druk elk van die volgende as 'n persentasie uit:

   (a) 'n Koers van R5 vir elke R100

   ....

   (b) 'n Koers van R7,50 vir elke R50

   ....

   (c) 'n Koers van R20 vir elke R200

   ....

   (d) 'n Koers van x rand vir elke a rand

   ....

2. Annie deponeer R8 345 in ’n spaarrekening by Bonus Bank. Die rentekoers is 9% per jaar.

   (a) Hoeveel rente sal sy aan die einde van die eerste jaar verdien het?

   ....

   (b) Annie besluit om die deposito van R8 345 vir ’n onbepaalde tydperk in die bankrekening te los en om aan die einde van elke jaar slegs die rente te onttrek. Hoeveel rente ontvang sy oor ’n tydperk van vyf jaar?

   ....

3. Maxi het R3 500 teen ’n rentekoers van 5% per jaar belê. Haar totale rente was R875. Vir watter tydperk het sy die bedrag belê?

   ....

4. Geld word vir 1 jaar teen ’n rentekoers van 8% per jaar belê. Voltooi die tabel van ekwivalente koerse.

Som belê (R)	1 000	2 500	8 000	20 000	90 000	x
Rente verdien (R)						

5. Rente op agterstallige rekeninge word teen ’n koers van 20% per jaar gehef. Bereken die rente verskuldig op ’n rekening wat 10 dae agterstallig is as die verskuldigde bedrag R260 is. (Gee jou antwoord tot die naaste sent.)

   ....

6. ’n Bedrag geld wat by die bank belê is teen 5% enkelvoudige rente per jaar, het na 5 jaar op R6 250 te staan gekom. Hierdie eindbedrag sluit die rente in. Thuli het uitgewerk dat die eindbedrag (1 + 0,05) × bedrag belê × 5 is.

   (a) Verduidelik hoe Thuli gedink het. ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (b) Bereken die bedrag wat belê is. ....

   ....

   ....

SAAMGESTELDE RENTE

Wanneer die rente wat jaarliks verdien word by die oorspronklike bedrag getel word en die rente vir die volgende jaar op hierdie nuwe bedrag bereken word, staan die resultaat bekend as **saamgestelde rente**.

Voorbeeld:

R2 000 word teen 10% per jaar saamgestelde rente belê:

Einde van 1ste jaar: Bedrag = R2 000 + R200 rente = R2 200

Einde van 2de jaar: Bedrag = R2 200 + R220 rente = R2 420

Einde van 3de jaar: Bedrag = R2 420 + R242 rente = R2 662

1. ’n Bedrag van R20 000 word teen 5% per jaar saamgestelde rente belê.
   (a) Wat is die totale waarde van die belegging na 1 jaar?

   ....

   (b) Wat is die totale waarde van die belegging na 2 jaar?

   ....

   (c) Wat is die totale waarde van die belegging na 3 jaar?

   ....

2. Bonus Bank bied ’n beleggingskema vir ’n periode van twee jaar aan met ’n saamgestelde rentekoers van 15% per jaar. Meneer Pillay wil R800 daarin belê.
   (a) Hoeveel geld sal aan die einde van die 2-jaar periode aan hom verskuldig wees?

   ....

   ....

   (b) Hoeveel rente sal hy tydens die twee jaar verdien?

   ....

3. Andrew en Zinzi stry oor rente wat hulle kan verdien op geld wat hulle vir Kersfees gekry het. Hulle het elkeen R750 gekry. Andrew wil sy geld vir 2 jaar teen ’n saamgestelde rentekoers van 14% per jaar in ABC Bougenootskap belê. Zinzi sê dat sy beter sal doen by Bonus Bank, waar sy 15% enkelvoudige rente per jaar oor 2 jaar sal verdien. Wie is reg?

   ....

   ....

   ....

4. Meneer Martin belê R12 750 vir 3 jaar teen 5,3% saamgestelde rente wat kwartaalliks bereken word (d.w.s. vier keer per jaar).
   (a) Hoeveel omsettingsperiodes sal sy belegging altesaam hê?

   ....

   (b) Hoeveel is sy belegging na 3 jaar werd?

   ....

   ....

   (c) Bereken die totale rente wat hy op sy aanvanklike belegging verdien.

   ....

5. Bereken die rente wat deur 'n belegging (P) van R5 000 teen 10% (r) saamgestelde rente oor 'n tydperk (n) van 3 jaar gegenereer word. A is die eindbedrag. Gebruik die formule $A = P(1 + \frac{r}{100})^n$ om die rente te bereken.

   ....

   ....

WISSELKOERS EN KOMMISSIE

1. (a) Tim het £650 by Gatwick Lughawe in Engeland se buitelandse valutatoonbank gekoop teen 'n wisselkoers van R15,66 vir £1. Die toonbank het 2,5% kommissie op die transaksie gehef. Hoeveel het Tim bestee om die ponde te koop?

   ....

   ....

   (b) Wat was die waarde van R1 in Britse pond op daardie dag?

   ....

2. Mandy wil deur die internet 'n boek bestel. Die prys van die boek is $25,86. Wat is die boek se prys in rand? Gebruik 'n wisselkoers van R9,95 vir $1.

   ....

3. Bongani is 'n motorverkoopsman. Hy verdien 'n kommissie van 3% op die verkoop van 'n motor met 'n waarde van R220 000. Werk uit hoeveel kommissie hy verdien.

   ....

Hoofstuk 2
Heelgetalle

In hierdie hoofstuk sal jy met getalle kleiner as 0 werk. Hierdie getalle word negatiewe getalle genoem. Hulle het spesiale eienskappe wat hulle nuttig maak vir spesifieke doeleindes, byvoorbeeld om ons in staat te stel om 'n vergelyking soos $x + 20 = 10$ op te los.

5	+	–15	=		5	–	–15	=		5	×	–15	=	
4	+	–14	=		4	–	–14	=		4	×	–14	=	
3	+	–13	=		3	–	–13	=		3	×	–13	=	
2	+	–12	=		2	–	–12	=		2	×	–12	=	
1	+	–11	=		1	–	–11	=		1	×	–11	=	
0	+	–10	=		0	–	–10	=		0	×	–10	=	
–1	+	–9	=		–1	–	–9	=		–1	×	–9	=	
–2	+	–8	=		–2	–	–8	=		–2	×	–8	=	
–3	+	–7	=		–3	–	–7	=		–3	×	–7	=	
–4	+	–6	=		–4	–	–6	=		–4	×	–6	=	
–5	+	–5	=		–5	–	–5	=		–5	×	–5	=	
–6	+	–4	=		–6	–	–4	=		–6	×	–4	=	
–7	+	–3	=		–7	–	–3	=		–7	×	–3	=	
–8	+	–2	=		–8	–	–2	=		–8	×	–2	=	
–9	+	–1	=		–9	–	–1	=		–9	×	–1	=	
–10	+	0	=		–10	–	0	=		–10	×	0	=	
–11	+	1	=		–11	–	1	=		–11	×	1	=	
–12	+	2	=		–12	–	2	=		–12	×	2	=	
–13	+	3	=		–13	–	3	=		–13	×	3	=	
–14	+	4	=		–14	–	4	=		–14	×	4	=	
–15	+	5	=		–15	–	5	=		–15	×	5	=	

2 Heelgetalle

2.1 Watter getalle is kleiner as 0?

WAAROM MENSE BESLUIT HET OM NEGATIEWE GETALLE TE HÊ

Getalle soos –7 en –500, die optellingsinverses van telgetalle, word **negatiewe getalle** genoem. Breuke kan ook negatief wees, bv. $-\frac{3}{4}$ en –3,46.

Die telgetalle en die negatiewe getalle word saam die **heelgetalle** genoem.

Die natuurlike getalle (1; 2; 3; 4; ...) word gebruik om te tel, en breuke (rasionale getalle) word gebruik om te meet. Waarom het ons ook negatiewe getalle?

Wanneer 'n groter getal van 'n kleiner getal afgetrek word, kan die antwoord 'n negatiewe getal wees: 5 – 12 = –7, en hierdie getal word **negatief 7** genoem.

Een van die belangrikste redes vir die uitvinding van negatiewe getalle was om oplossings te verskaf vir vergelykings soos hierdie:

Vergelyking	Oplossing	Verlangde eienskap van negatiewe getalle
$17 + x = 10$	$x = -7$ want $17 + (-7) = 17 - 7$ $= 10$	1. Om 'n negatiewe getal by te tel, is dieselfde as om die ooreenstemmende positiewe getal af te trek.
$5 - x = 9$	$x = -4$ want $5 - (-4) = 5 + 4$ $= 9$	2. Om 'n negatiewe getal af te trek, is dieselfde as om die ooreenstemmende positiewe getal by te tel.
$20 + 3x = 5$	$x = -5$ want $3 \times (-5) = -15$ $20 + (-15) = 5$	3. Die produk van 'n positiewe getal en 'n negatiewe getal is 'n negatiewe getal.

EIENSKAPPE VAN HEELGETALLE

1. Bepaal die getal wat die vergelyking waar maak. Sê ook watter van die eienskappe van heelgetalle in die tabel hier bo op die vergelyking van toepassing is.

(a) $20 - x = 50$

....

....

(b) $50 + x = 20$

....

....

(c) $20 - 3x = 50$

....

....

(d) $50 + 3x = 20$

....

....

2.2 Optel en aftrek met heelgetalle

Optel en aftrek van negatiewe getalle

Voorbeelde: (–5) + (–3) en (–20) – (–7)

Dit word op dieselfde manier gedoen as optel en aftrek van positiewe getalle.

(–5) + (–3) kan ook geskryf word as –5 + (–3) of as –5 + –3

$(-5) + (-3) = -8$ en $-20 - (-7) = -13$

Dit is net soos 5 + 3 = 8 en 20 – 7 = 13, of R5 + R3 = R8 en R20 – R7 = R13.

Trek ’n groter getal van ’n kleiner getal af

Voorbeelde: 5 – 9 en 29 – 51

Kom ons beskou eers die volgende:

$5 + (-5) = 0$ $\quad$ $10 + (-10) = 0$ $\quad$ en $\quad$ $20 + (-20) = 0$

Kyk nou na 5 – 9: As ons 5 van 5 aftrek, kry ons 0, maar dan moet ons nog 4 aftrek.

$$\begin{aligned} 5 - 9 &= \underbrace{5 - 5} - 4 \\ &= \ 0 - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Ons weet dat –9 = (–4) + (–5)

Gestel die getalle is groter, byvoorbeeld 29 – 51.

$$29 - 51 = 29 - 29 - 22$$

–51 = (–29) + (–22)

Hoeveel sal oor wees van die 51 wat nog afgetrek moet word, nadat jy 29 van 29 afgetrek het om 0 te kry? Hoe kan ons uitvind? Is dit 51 – 29?

Tel ’n positiewe en ’n negatiewe getal bymekaar

Voorbeelde: 7 + (–5); 37 + (–45) en (–13) + 45

Die volgende bewering is waar indien die getal 5 is:

20 – (’n bepaalde getal) = 15

Ons het ook getalle nodig wat sinne soos die volgende waar sal maak:

20 + (’n bepaalde getal) = 15

Maar om van 20 tot by 15 te kom, moet jy 5 aftrek.

Die getal wat ons nodig het om die sin *20 + (’n bepaalde getal) = 15* waar te maak, moet die volgende vreemde eienskap hê:

As jy hierdie getal **bytel**, moet dit **dieselfde effek** hê as om **5 af te trek**.

Wiskundiges het dus ooreengekom dat die getal wat *negatief* 5 genoem word, die eienskap sal hê dat as jy dit by ’n ander getal tel, die effek dieselfde sal wees as wanneer jy die natuurlike getal 5 aftrek.

Dit beteken dat wiskundiges ooreengekom het dat 20 + (–5) gelyk is aan 20 – 5.

Anders gestel, in plaas daarvan om *negatief* 5 by 'n getal by te tel, kan jy 5 aftrek.

> Om 'n negatiewe getal by te tel, het dieselfde effek as om 'n ooreenstemmende natuurlike getal af te trek.
> Voorbeeld: 20 + (–15) = 20 – 15 = 5.

Trek 'n negatiewe getal af

Ons het op die vorige bladsy te doen gehad met gevalle soos –20 – (–7).

Die bewering

25 + (*'n bepaalde getal*) = 30

is waar indien die getal 5 is.

Ons het ook 'n getal nodig om hierdie bewering waar te maak:

25 – (*'n bepaalde getal*) = 30

As jy hierdie getal aftrek, moet dit dieselfde effek hê as om 5 by te tel.

Daar is ooreengekom dat 25 – (–5) gelyk is aan 25 + 5.

In plaas daarvan om die negatiewe getal af te trek, word die ooreenstemmende positiewe getal (die optellingsinverse) bygetel.

$$\begin{aligned} 8 - (-3) &= 8 + 3 \\ &= 11 \\ -5 - (-12) &= -5 + 12 \\ &= 7 \end{aligned}$$

> Ons kan sê dat vir elke "positiewe" getal daar 'n **ooreenstemmende** of **teenoorgestelde** negatiewe getal is. 'n Positiewe en 'n negatiewe getal wat ooreenstem, byvoorbeeld 3 en (–3), word **optellingsinverses** genoem.

Trek'n positiewe getal van 'n negatiewe getal af

Voorbeeld: –7 – 4 beteken in werklikheid (–7) – 4.

In plaas daarvan om 'n positiewe getal af te trek, kan die ooreenstemmende negatiewe getal bygetel word.

–7 – 4 kan beskou word as (–7) + (–4) = –11

BEREKENINGE MET HEELGETALLE

Bereken.

1. $-7 + 18$

2. $24 - 30 - 7$

3. $-15 + (-14) - 9$

4. $35 - (-20)$

5. $30 - 47$

6. $(-12) - (-17)$

2.3 Vermenigvuldiging en deling met heelgetalle

VERMENIGVULDIG MET HEELGETALLE

1. Bereken.
   (a) $-7 + -7 + -7 + -7 + -7 + -7 + -7 + -7 + -7 + -7$

   (b) $-10 + -10 + -10 + -10 + -10 + -10 + -10$

   (c) $10 \times (-7)$

   (d) $7 \times (-10)$

2. Sê of jy met elke bewering saamstem (✓) of nie saamstem nie (✗).
   (a) $10 \times (-7) = 70$
   (b) $9 \times (-5) = (-9) \times 5$
   (c) $(-7) \times 10 = 7 \times (-10)$
   (d) $9 \times (-5) = -45$
   (e) $(-7) \times 10 = 10 \times (-7)$
   (f) $5 \times (-9) = 45$

Vermenigvuldiging van heelgetalle is kommutatief:
$(-20) \times 5 = 5 \times (-20)$

DIE VERSPREIDINGSEIENSKAP

1. Bereken elkeen van die volgende. Let daarop dat hakies om twee redes in hierdie uitdrukkings gebruik word: om aan te dui dat bepaalde bewerkings eerste gedoen moet word, en om die heelgetalle aan te toon.

(a) $20 + (-5)$ (b) $4 \times \mathbf{(}20 + (-5)\mathbf{)}$ (c) $4 \times 20 + 4 \times (-5)$

....

....

(d) $(-5) + (-20)$ (e) $4 \times \mathbf{(}(-5) + (-20)\mathbf{)}$ (f) $4 \times (-5) + 4 \times (-20)$

....

....

2. As jy reg gewerk het, moet jou antwoorde vir vraag 1 die volgende wees: 15; 60; 60; –25; –100 en –100. As jou antwoorde verskil, kyk waar dinge verkeerd geloop het en maak jou werk reg.

3. Kyk hoeveel van die volgende jy kan bereken:

(a) $20 + (-15)$ (b) $4 \times \mathbf{(}20 + (-15)\mathbf{)}$ (c) $4 \times 20 + 4 \times (-15)$

....

....

(d) $(-15) + (-20)$ (e) $4 \times \mathbf{(}(-15) + (-20)\mathbf{)}$ (f) $4 \times (-15) + 4 \times (-20)$

....

(g) $10 + (-5)$ (h) $(-4) \times \mathbf{(}10 + (-5)\mathbf{)}$ (i) $(-4) \times 10 + ((-4) \times (-5))$

....

4. Watter eienskap van heelgetalle word in jou antwoorde vir vraag 3(a) en 3(g) gebruik? Verduidelik jou antwoord.

....

....

In vraag 3(i) moes jy twee negatiewe getalle vermenigvuldig. Wat was jou raaiskoot? Ons kan $(-4) \times \mathbf{(}10 + (-5)\mathbf{)}$ soos in (h) bereken. Dit is $(-4) \times 5 = -20$.

As ons wil hê die verspreidingseienskap moet waar wees vir heelgetalle, dan moet $(-4) \times 10 + (-4) \times (-5)$ gelyk wees aan –20.

$$(-4) \times 10 + (-4) \times (-5) = -40 + (-4) \times (-5)$$

Dan moet $(-4) \times (-5)$ gelyk wees aan 20.

5. Bereken.

(a) $10 \times 50 + 10 \times (-30)$

....

(b) $50 + (-30)$

....

(c) $10 \times \mathbf{(}50 + (-30)\mathbf{)}$

....

(d) $(-50) + (-30)$

....

(e) $10 \times (-50) + 10 \times (-30)$

....

(f) $10 \times \mathbf{(}(-50) + (-30)\mathbf{)}$

....

- Die produk van twee positiewe getalle is 'n positiewe getal, byvoorbeeld $5 \times 6 = 30$.
- Die produk van 'n positiewe getal en 'n negatiewe getal is 'n negatiewe getal, byvoorbeeld $5 \times (-6) = -30$.
- Die produk van 'n negatiewe getal en 'n positiewe getal is 'n negatiewe getal, byvoorbeeld $(-5) \times 6 = -30$.

6. (a) Onderstreep die numeriese uitdrukkings hier onder wat jy verwag dieselfde antwoorde sal hê. Moenie die berekeninge doen nie.

$16 \times (53 + 68)$ $\quad$ $53 \times (16 + 68)$ $\quad$ $16 \times 53 + 16 \times 68$ $\quad$ $16 \times 53 + 68$

(b) Watter eienskap van bewerkings word gewys deur die feit dat twee van die uitdrukkings hier bo dieselfde waarde het?

....

7. Beskou jou antwoorde op vraag 5.

(a) Versprei vermenigvuldiging oor optel in die geval van heelgetalle? ....

(b) Illustreer jou antwoord met twee voorbeelde.

....

....

8. Onderstreep die numeriese uitdrukkings hier onder wat jy verwag dieselfde antwoorde sal hê. Moenie nou die berekeninge doen nie.

$10 \times \mathbf{(}(-50) - (-30)\mathbf{)}$ $\quad$ $10 \times (-50) - (-30)$ $\quad$ $10 \times (-50) - 10 \times (-30)$

9. Doen die drie stelle berekeninge wat in vraag 8 gegee is.

....

....

10. Bereken (–10) × **(**5 + (–3)**)**.

....

....

11. Dink oor die vraag of vermenigvuldiging met ’n negatiewe getal oor optel en aftrek van heelgetalle versprei. Sal (–10) × 5 + (–10) × (–3) byvoorbeeld ook die antwoord –20 hê, soos (–10) × **(**5 + (–3)**)**?

....

....

Om seker te maak dat vermenigvuldiging oor optel en aftrek in die stelsel van heelgetalle versprei, moet ons ooreenkom dat

(’n negatiewe getal) × (’n negatiewe getal) ’n positiewe getal is,

byvoorbeeld (–10) × (–3) = 30.

12. Bereken elkeen van die volgende:

(a) (–20) × (–6)

....

(b) (–20) × 7

....

(c) (–30) × (–10) + (–30) × (–8)

....

(d) (–30) × **(**(–10) + (–8)**)**

....

(e) (–30) × (–10) – (–30) × (–8)

....

(f) (–30) – **(**(–10) + (–8)**)**

....

Hier is ’n opsomming van die eienskappe van heelgetalle wat dit moontlik maak om berekeninge met heelgetalle te doen:

- Wanneer ’n getal by sy optellingsinverse getel word, is die resultaat 0, byvoorbeeld (+12) + (–12) = 0.
- Om ’n heelgetal by te tel het dieselfde effek as om sy optellingsinverse af te trek, byvoorbeeld 3 + (–10) kan bereken word deur 3 – 10 te bereken, en die antwoord is –7.
- Om ’n heelgetal af te trek het dieselfde effek as om sy optellingsinverse by te tel, byvoorbeeld 3 – (–10) kan bereken word deur 3 + 10 te bereken as 13.
- Die produk van ’n positiewe heelgetal en ’n negatiewe heelgetal is negatief, byvoorbeeld (–15) × 6 = –90.
- Die produk van ’n negatiewe heelgetal en ’n negatiewe heelgetal is positief, byvoorbeeld (–15) × (–6) = 90.

DEEL MET HEELGETALLE

1. Bereken.

   (a) $5 \times (-7)$ ....

   (b) $(-3) \times 20$ ....

   (c) $(-5) \times (-10)$ ....

   (d) $(-3) \times (-20)$ ....

2. Gebruik jou antwoorde in vraag 1 om die volgende te bepaal:

   (a) $(-35) \div 5$ ....

   (b) $(-35) \div (-7)$ ....

   (c) $(-60) \div 20$ ....

   (d) $(-60) \div (-3)$ ....

   (e) $50 \div (-5)$ ....

   (f) $50 \div (-10)$ ....

   (g) $60 \div (-20)$ ....

   (h) $60 \div (-3)$ ....

- Die kwosiënt van 'n positiewe getal en 'n negatiewe getal is 'n negatiewe getal.
- Die kwosiënt van twee negatiewe getalle is 'n positiewe getal.

GEMENGDE BEREKENINGE MET HEELGETALLE

1. Bereken.

   (a) $20(-50 + 7)$ ....

   (b) $20 \times (-50) + 20 \times 7$ ....

   (c) $20(-50 + -7)$ ....

   (d) $20 \times (-50) + 20 \times -7$ ....

   (e) $-20(-50 + -7)$ ....

   (f) $-20 \times -50 + -20 \times -7$ ....

2. Bereken.

   (a) $40 \times (-12 + 8) -10 \times (2 + -8) - 3 \times (-3 - 8)$

   ....

   ....

(b) $(9 + 10 - 9) \times 40 + (25 - 30 - 5) \times 7$

....

(c) $-50(40 - 25 + 20) + 30(-10 + 7 + 13) - 40(-16 + 15 - 2)$

....

(d) $-4 \times (30 - 50) + 7 \times (40 - 70) - 10 \times (60 - 100)$

....

(e) $-3 \times (-14 - 6 + 5) \times (-13 - 7 + 10) \times (20 - 10 - 15)$

....

2.4 Magte, wortels en woordprobleme

Beantwoord al die vrae in hierdie afdeling sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

1. Voltooi die tabelle.

(a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x^2												
x^3												

(b)

x	–1	–2	–3	–4	–5	–6	–7	–8	–9	–10	–11	–12
x^2												
x^3												

3^2 is 9 en $(-3)^2$ is ook 9.
3^3 is 27 en $(-5)^3$ is –125.
Beide (–3) en 3 is **vierkantswortels** van 9.
3 kan die **positiewe vierkantswortel** van 9 genoem word en (–3) kan die **negatiewe vierkantswortel** van 9 genoem word.
3 word die **derdemagswortel** van 27 genoem, want $3^3 = 27$.
–5 word die derdemagswortel van –125 genoem, want $(-5)^3 = -125$.
10^2 is 100 en $(-10)^2$ is ook 100. Beide 10 en (–10) word **vierkantswortels** van 100 genoem.

Die simbool $\sqrt{\ }$ beteken dat jy die **positiewe vierkantswortel** van die getal moet neem.

2. Bereken die volgende:

(a) $\sqrt{4} - \sqrt{9}$

....

....

(b) $\sqrt[3]{27} + (-\sqrt[3]{64})$

....

....

(c) $-(3^2)$

....

(d) $(-3)^2$

....

(e) $4^2 - 6^2 + 1^2$

....

....

(f) $3^3 - 4^3 - 2^3 - 1^3$

....

....

(g) $\sqrt{81} - \sqrt{4} \times \sqrt[3]{125}$

....

....

....

(h) $-(4^2)(-1)^2$

....

....

....

(i) $\dfrac{(-5)^2}{\sqrt{37-12}}$

....

....

(j) $\dfrac{-\sqrt{36}}{-1^3 - 2^3}$

....

....

3. Bepaal die antwoorde van die volgende:

(a) Die oornagtemperatuur in Polokwane daal van 11 °C tot –2 °C. Met hoeveel grade het die temperatuur gedaal?

....

(b) Die temperatuur in Estcourt daal van 2 °C tot –1 °C in een uur, en dan nog twee grade in die volgende uur. Hoeveel grade het die temperatuur in totaal oor die twee uur gedaal?

....

(c) ’n Duikboot is 75 m onder die see-oppervlak. Dit kom dan 21 m op. Hoe ver onder die oppervlak is dit nou?

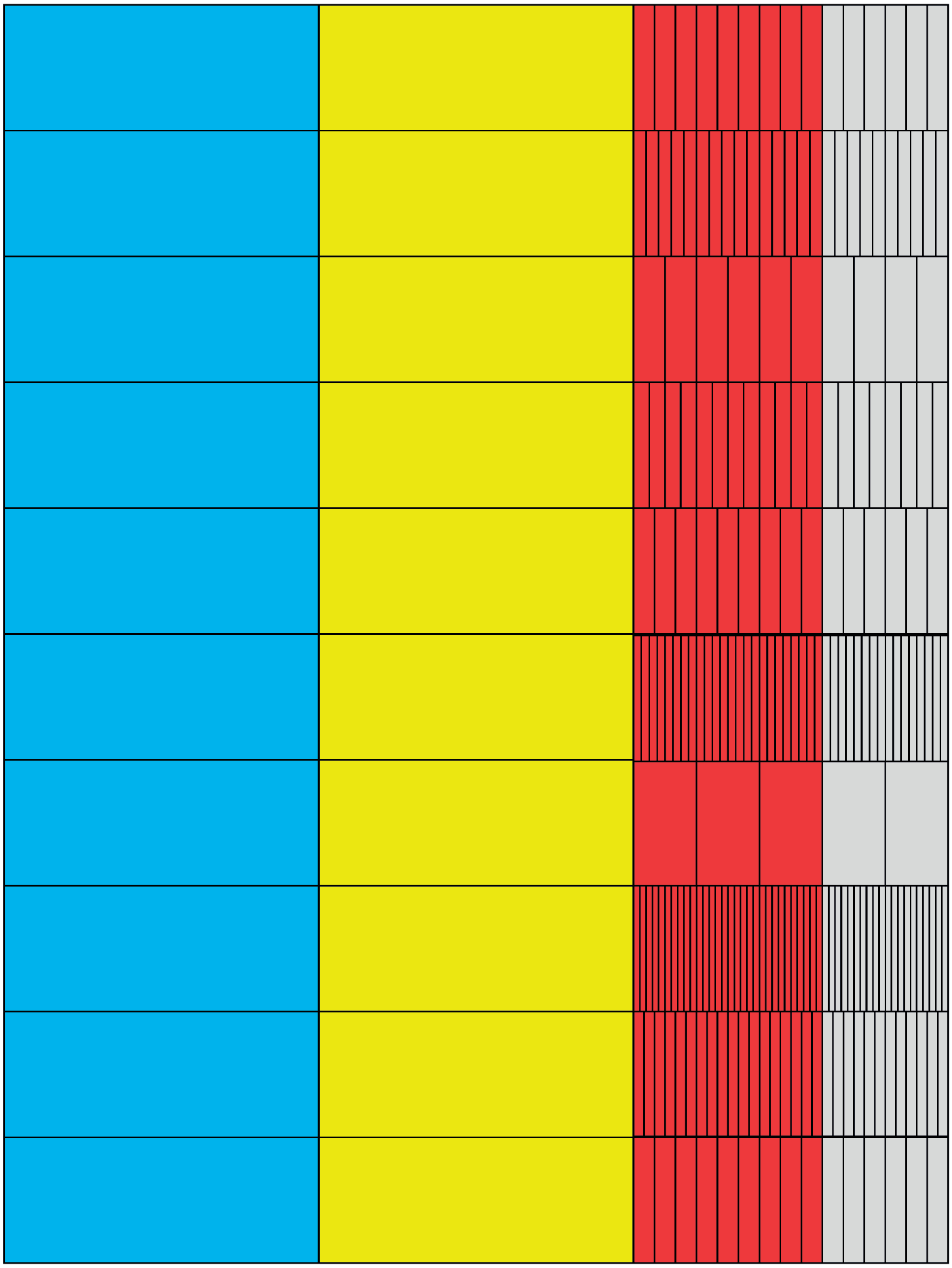
....

(d) ’n Duikboot is 37 m onder die see-oppervlak. Dit duik dan ’n verdere 15 m dieper. Hoe ver onder die oppervlak is dit nou?

....

Hoofstuk 3
Breuke

Hierdie hoofstuk is hoofsaaklik hersiening van die vorige grade se werk oor breuke. Dit word herhaal omdat dit noodsaaklik is dat jy met selfvertroue met breuke kan werk. Dit is dus belangrik dat jy al die antwoorde moet uitwerk *sonder om 'n sakrekenaar te gebruik*, en dat jy al die stappe moet wys.



Watter deel van die blok is gekleur?

3 Breuke

3.1 Ekwivalente breuke

DIESELFDE GETAL IN VERSKILLENDE VORMS

1. Hoeveel geld is elk van die volgende bedrae?

   (a) $\frac{1}{5}$ van R200 (b) $\frac{2}{10}$ van R200 (c) $\frac{4}{20}$ van R200

   ....

Het jy opgelet dat die antwoorde eenders is? Dit is omdat $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$ en $\frac{4}{20}$ **ekwivalente breuke** is. Dit is verskillende maniere om dieselfde getal te skryf.

Kyk na hierdie staaf wat in vyf gelyke dele opgedeel is.

Elke deel is **een vyfde** van die hele staaf.

2. Trek lyne op die staaf hier onder om dit op te deel in 10 gelyke dele.

   (a) Watter breuk van die hele staaf is elk van die 10 dele? ....
   (b) Hoeveel tiendes is dieselfde as een vyfde? ....
   (c) Hoeveel tiendes is dieselfde as twee vyfdes? ....
   (d) Hoeveel vyfdes is dieselfde as agt tiendes? ....

3. Trek lyne op die staaf hier onder om dit op te deel in 25 gelyke dele.

   (a) Hoeveel vyf-en-twintigstes is dieselfde as twee vyfdes? ....
   (b) Hoeveel vyfdes is dieselfde as 20 vyf-en-twintigstes? ....

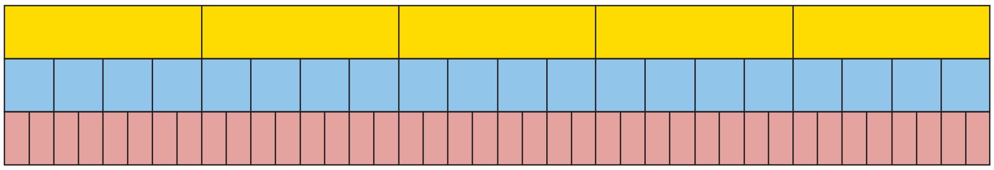
In vraag 3(b) het jy gevind dat $\frac{4}{5}$ ekwivalent is aan $\frac{20}{25}$: dit is bloot twee verskillende maniere om dieselfde breuk van die staaf te beskryf. Ons kan dit uitdruk deur $\frac{4}{5} = \frac{20}{25}$ te skryf, wat beteken dat $\frac{4}{5}$ en $\frac{20}{25}$ ekwivalent is.

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 41 2014/07/03 09:34:02 AM

4. Skryf al die ander pare ekwivalente breuke neer waarop jy afgekom het toe jy vrae 2 en 3 gedoen het.

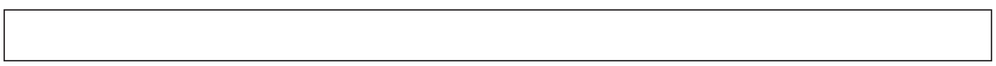
....

Die geel staaf is opgedeel in vyfdes.



5. (a) In watter breuke is die blou staaf opgedeel? ....
   (b) In watter breuke is die rooi staaf opgedeel? ....
   (c) Indien jy die geel staaf sou opdeel in twintigstes soos die blou staaf, in hoeveel dele sou jy elk van die vyfdes moes opdeel? ....
   (d) Indien jy die geel staaf sou opdeel in veertigstes soos die rooi staaf, in hoeveel dele sou jy elk van die vyfdes moes opdeel? ....
   (e) Indien jy die geel staaf sou opdeel in tagtigstes, in hoeveel dele sou jy elk van die vyfdes moes opdeel? ....
   (f) Indien jy die blou staaf sou opdeel in tagtigstes, in hoeveel dele sou jy elk van die twintigstes moes opdeel? ....

6. Gestel hierdie staaf word opgedeel in vier gelyke dele (m.a.w. kwarte).



   (a) Indien die staaf ook in 20 gelyke deeltjies opgedeel word, hoeveel van die kleiner dele sal gelyk wees aan elk van die kwarte? ....
   (b) Indien elke kwart eerder in 6 deeltjies opgedeel word, watter breuk van die hele staaf sal elke deeltjie wees? ....

7. Gebruik heelgetalle om hierdie tabel ekwivalente breuke so ver as moontlik te voltooi. Al die breuke in 'n kolom moet ekwivalent wees.

sestiendes	8	4	2	10	14	12
agstes						
kwarte						
twaalfdes						
twintigstes						

Ekwivalente breuke kan verkry word deur die teller en die noemer met dieselfde getal te vermenigvuldig, byvoorbeeld $\frac{1}{5} = \frac{4 \times 1}{4 \times 5} = \frac{4}{20}$.

8. Skryf vyf breuke neer wat ekwivalent is aan $\frac{3}{4}$.

....

9. Skryf elk van die volgende getalle as twaalfdes:

(a) $\frac{2}{3}$

....

(b) $\frac{3}{4}$

....

(c) $\frac{5}{6}$

....

(d) $\frac{1}{6}$

....

Deur dieselfde getal in die teller en die noemer in te deel, in plaas daarvan om die teller en die noemer met dieselfde getal te vermenigvuldig, kan jy ’n eenvoudiger vorm van ’n breuk kry.

Wanneer ’n breuk in die **eenvoudigste vorm** is, het die teller en noemer geen gemene faktore (delers) nie. Jy kry byvoorbeeld die breuk $\frac{4}{12}$ se eenvoudigste vorm ($\frac{1}{3}$) deur beide die teller en noemer deur die gemene faktor, 4, te deel.

10. Skryf elk van die volgende breuke in hul eenvoudigste vorm:

(a) $\frac{40}{100}$

....

(b) $\frac{4}{16}$

....

(c) $\frac{5}{25}$

....

(d) $\frac{6}{30}$

....

(e) $\frac{6}{24}$

....

(f) $\frac{8}{88}$

....

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 43 2014/07/03 09:34:05 AM

OMSKAKELING TUSSEN GEMENGDE GETALLE EN GEWONE BREUKE

Getalle wat bestaan uit ’n heelgetal en ’n gewone breuk word **gemengde getalle** genoem.

Voorbeelde van gemengde getalle: $3\frac{4}{5}$, $2\frac{7}{8}$ en $8\frac{3}{10}$

Gemengde getalle kan in uitgebreide vorm geskryf word, byvoorbeeld:

$3\frac{4}{5}$ beteken $3 + \frac{4}{5}$ $\quad$ $2\frac{7}{8}$ beteken $2 + \frac{7}{8}$ $\quad$ $8\frac{3}{10}$ beteken $8 + \frac{3}{10}$

Wanneer gemengde getalle opgetel of afgetrek word is dit moontlik om met die heelgetal-deel en die breukdeel afsonderlik te werk:

$$3\frac{4}{5} + 13\frac{3}{5}$$
$$= 16\frac{7}{5}$$
$$= 17\frac{2}{5}$$

$$13\frac{3}{5} - 3\frac{4}{5}$$
$$= 12\frac{8}{5} - 3\frac{4}{5}$$
$$= 9\frac{4}{5}$$

(dit is nodig om ’n een te “leen” by 13, aangesien $\frac{4}{5}$ nie van $\frac{3}{5}$ afgetrek kan word nie)

Hierdie metode werk egter nie vir vermenigvuldiging en deling nie, en is in sommige gevalle lastig selfs vir optel en aftrek.

’n Alternatiewe metode word dus gebruik vir vermenigvuldiging en deling, en ook dikwels verkies vir optel en aftrek, naamlik om die gemengde getalle om te skakel na **onegte breuke**, byvoorbeeld:

$$3\frac{4}{5}$$
$$= 3 + \frac{4}{5}$$
$$= \frac{15}{5} + \frac{4}{5}$$
$$= \frac{19}{5}$$

LET WEL:
Jy sou die teller 19 in een stap kon verkry deur die noemer (5) met die heelgetal (3) te maal en dan die teller (4) by te tel.

Jy kan dus $3\frac{4}{5} + 13\frac{3}{5}$ as volg bereken met hierdie metode:

$$3\frac{4}{5} + 13\frac{3}{5}$$
$$= \frac{19}{5} + \frac{68}{5}$$
$$= \frac{87}{5}$$

Die antwoord moet weer omgeskakel word na ’n gemengde getal: $\frac{87}{5} = 17\frac{2}{5}$

1. Skryf die volgende gemengde getalle as onegte breuke:

(a) $5\frac{3}{5}$

(b) $2\frac{3}{8}$

....

(c) $3\frac{4}{7}$

(d) $4\frac{5}{12}$

....

2. Skryf die volgende onegte breuke as gemengde getalle:

(a) $\frac{32}{5}$

(b) $\frac{25}{8}$

....

(c) $\frac{24}{9}$

(d) $\frac{37}{20}$

....

3.2 Optel en aftrek met breuke

Om twee of meer breuke te kan optel of aftrek, moet hulle eers uitgedruk word met *dieselfde* noemers. Om dit reg te kry, moet een of meer van die gegewe breuke dalk vervang word met ekwivalente breuke.

$$\frac{3}{20} + \frac{2}{5}$$
$$= \frac{3}{20} + \frac{2 \times 4}{5 \times 4} \quad \text{(om twintigstes te kry)}$$
$$= \frac{3}{20} + \frac{8}{20}$$
$$= \frac{11}{20}$$

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{20}$$
$$= \frac{5 \times 20}{12 \times 20} + \frac{7 \times 12}{20 \times 12}$$
$$= \frac{100}{240} + \frac{84}{240}$$
$$= \frac{184}{240}$$
$$= \frac{23}{30}$$

Ons sal later na hierdie metode om breuke op te tel en af te trek verwys as Metode A.

In die geval van $\frac{5}{12} + \frac{7}{20}$, was die vermenigvuldiging van die noemers met 12 en 20 'n manier waarop jy vir seker ekwivalente breuke met dieselfde noemer sal kry, hier twee-honderd-en-veertigstes. Die getalle kan egter ongerieflik groot raak – dink net aan hoe groot die getalle sal wees as jy hierdie metode sou gebruik vir $\frac{17}{75} + \frac{13}{85}$!

Gelukkig is daar (in baie gevalle) 'n manier om die getalle kleiner te hou wanneer jy ekwivalente breuke maak om breuke op te tel of af te trek: jy kan die **kleinste gemene veelvoud** (KGV) van die noemers gebruik. In die geval van $\frac{5}{12} + \frac{7}{20}$ is die kleiner veelvoude van die noemers:

12:	12	24	36	48	60	72	84
20:	20	40	60	80	100	120	140

Die kleinste getal wat 'n veelvoud van beide 12 en 20 is, is 60.

Beide $\frac{5}{12}$ en $\frac{7}{20}$ kan uitgedruk word in sestigstes:

$\frac{5}{12} = \frac{5 \times 5}{12 \times 5} = \frac{25}{60}$, want twaalfdes word na sestigstes omgeskakel deur elke twaalfde in vyf gelyke dele op te deel. $12 \times 5 = 60$ gelyke dele word dus geskep.

Net so is $\frac{7}{20} = \frac{7 \times 3}{20 \times 3} = \frac{21}{60}$.

Gevolglik is $\frac{5}{12} + \frac{7}{20} = \frac{25}{60} + \frac{21}{60} = \frac{46}{60} = \frac{23}{30}$

Hierdie metode kan die **KGV-metode** om breuke op te tel en af te trek genoem word.

OPTEL EN AFTREK VAN BREUKE

1. Watter metode om breuke op te tel en af te trek dink jy sal meestal vir jou die vinnigste en maklikste wees, Metode A (op bladsy 45) of die KGV-metode? Verduidelik.

   ....

   ....

2. Bereken:

   (a) $\frac{3}{8} + \frac{2}{5}$

   ....

   ....

   (b) $\frac{3}{10} + \frac{7}{8}$

   ....

   ....

   (c) $3\frac{2}{5} + 2\frac{3}{10}$

   ....

   ....

   (d) $7\frac{3}{8} + 3\frac{11}{12}$

   ....

   ....

3. Bereken elk van die volgende:

(a) $\frac{13}{20} - \frac{2}{5}$

(b) $\frac{7}{12} - \frac{1}{4}$

....

(c) $5\frac{1}{2} - 3\frac{3}{8}$

(d) $4\frac{1}{9} - 5\frac{2}{3}$

....

....

4. Paulo en Sergio koop 'n pizza. Paulo eet $\frac{1}{3}$ van die pizza en Sergio eet twee vyfdes. Hoeveel van die pizza bly oor?

....

....

5. Bereken elk van die volgende. Sê of jy Metode A of die KGV-metode gebruik.

(a) $\frac{7}{15} + \frac{11}{24}$

(b) $\frac{73}{100} - \frac{7}{75}$

....

....

(c) $\frac{3}{25} + \frac{13}{40}$

(d) $\frac{9}{16} - \frac{3}{10}$

....

....

(e) $\frac{1}{18} + \frac{7}{20}$

(f) $\frac{11}{35} - \frac{3}{14}$

....

....

(g) $\frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8}$

....

....

3.3 Vermenigvuldiging en deling met breuke

DINK NA OOR BREUKE WAT VERMENIGVULDIG EN GEDEEL WORD

1. Lees die vrae hier onder, maar moenie nou antwoorde uitwerk nie. Sê net in elke geval watter berekeninge jy dink gedoen moet word om die antwoord te kry. Jy kan later dink oor *hoe* om die bewerkings te doen.

   (a) 10 mense kom na 'n partytjie, en elkeen van hulle moet $\frac{5}{8}$ van 'n pizza kry. Hoeveel pizzas moet gekoop word om vir hul almal genoeg te wees?

   ....

   (b) $\frac{5}{8}$ van die koste van 'n nuwe kliniek moet gedra word deur die 10 dokters wat daar gaan werk. Hul het ooreengekom om die koste gelykop te verdeel. Watter deel van die koste moet deur elk van die dokters gedra word?

   ....

   (c) Indien 'n hele pizza R10 kos, hoeveel behoort $\frac{5}{8}$ van 'n pizza te kos?

   ....

   (d) Die eienaar van 'n spazawinkel het 10 hele pizzas. Hoeveel porsies van $\frac{5}{8}$ van 'n pizza kan hy opmaak uit die 10 pizzas?

   ....

2. Kyk na die verskillende metodes van berekening boaan die volgende bladsy.

   (a) Watter metode moet gebruik word by vraag 1(a)?

   ....

   (b) Watter metode moet gebruik word by vraag 1(b)?

   ....

   (c) Watter metode moet gebruik word by vraag 1(c)?

   ....

   (d) Watter metode moet gebruik word by vraag 1(d)?

   ....

Metode A: $\frac{10}{10} \times \frac{5}{8} = \frac{50}{80}$ **Metode B:** $\frac{5}{8} = \frac{50}{80}$. 50 tagtigstes ÷ 10 = $\frac{5}{80}$

Metode C: Hoeveel agstes in tien heles? 80 agstes. Hoeveel vyf-agstes in 80? 80 ÷ 5 = 16

Metode D: $\frac{5}{8}$ is 5 agstes. 10 × 5 agstes = $\frac{50}{8}$ **Metode E:** $\frac{5}{8} \div 10 = \frac{5}{8} \times \frac{10}{1} = \frac{50}{8}$

Vermenigvuldig ’n breuk met ’n heelgetal

Voorbeeld:

$8 \times \frac{3}{5}$ = 8 × 3 vyfdes = 24 vyfdes = $\frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$

Deel ’n breuk deur ’n heelgetal

Jy kan ’n breuk deur ’n heelgetal deel deur dit om te skakel na ’n ekwivalente breuk met ’n teller wat ’n veelvoud van die heelgetal is.

Voorbeeld:

$\frac{2}{3} \div 5 = \frac{10}{15} \div 5$ = 10 vyftiendes ÷ 5 = 2 vyftiendes = $\frac{2}{15}$

’n Breuk van ’n heelgetal, en ’n breuk van ’n breuk

Voorbeelde:

A. $\frac{7}{12}$ van R36

$\frac{1}{12}$ van R36 is dieselfde as R36 ÷ 12 = R3, dus $\frac{7}{12}$ van R36 is 7 × R3 = R21

B. $\frac{7}{12}$ van 36 vyftigstes

$\frac{1}{12}$ van 36 vyftigstes is dieselfde as 36 vyftigstes ÷ 12 = 3 vyftigstes,

dus $\frac{7}{12}$ van 36 vyftigstes is 7 × 3 vyftigstes = 21 vyftigstes

$\frac{7}{12} \times \frac{36}{50}$ beteken $\frac{7}{12}$ van $\frac{36}{50}$; dit is presies dieselfde.

$\frac{1}{12}$ van $\frac{36}{50}$ is dieselfde as $\frac{36}{50} \div 12 = \frac{3}{50}$, dus $\frac{7}{12}$ van $\frac{36}{50}$ is $7 \times \frac{3}{50} = \frac{21}{50}$

3. (a) Jy het in die voorbeeld hier bo $\frac{7}{12} \times \frac{36}{50}$ bereken. Wat was die antwoord?

....

(b) Bereken $\frac{7 \times 36}{12 \times 50}$ en vereenvoudig die antwoord.

....

Voorbeeld:

$\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{2}{3}$ van $\frac{15}{24} = \frac{1}{3}$ van $\frac{30}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

Dieselfde antwoord word verkry met $\frac{2 \times 5}{3 \times 8}$

Om twee breuke te vermenigvuldig, maal jy bloot die tellers sowel as die noemers.

$\frac{2}{3} \times \frac{9}{20} = \frac{2 \times 9}{3 \times 20} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$

Deel deur 'n breuk

Om deur 'n breuk te deel verg ander logika:

Indien daar 40 pizzas is, hoeveel leerders kan elk $\frac{3}{5}$ van 'n pizza kry?

Die getal vyfdes in 40 pizzas: 40 × 5 = 200 vyfdes van 'n pizza.

Die aantal 3-vyfdes is dus 200 ÷ 3 = 66 porsies van $\frac{3}{5}$ pizza, dan bly daar nog 2 vyfdes van 'n pizza oor.

Aangesien die porsie vir elke leerder 3 vyfdes van 'n pizza is, is die 2 vyfdes wat oorbly, 2 derdes van 'n porsie.

So, om 40 ÷ $\boldsymbol{\frac{3}{5}}$ te bereken het ons vermenigvuldig met **5** en gedeel deur **3** en dit gee **66 en twee-derdes porsies**.

Om die waarheid te sê, ons het 40 × $\frac{5}{3}$ bereken.

Deel is die inverse bewerking van vermenigvuldig.
Om dus deur 'n breuk te deel, vermenigvuldig jy met sy inverse.

Voorbeeld:

$\frac{18}{60} \div \frac{2}{3} = \frac{18}{60} \times \frac{3}{2} = \frac{54}{120} = \frac{9}{20}$

VERMENIGVULDIG MET EN DEEL DEUR BREUKE

1. Bereken elk van die volgende:

(a) $\frac{3}{4}$ van $\frac{12}{25}$

(b) $\frac{3}{4} \times \frac{12}{100}$

(c) $\frac{3}{4}$ van $\frac{13}{25}$

(d) $\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{2}$

(e) $\frac{3}{20} \times \frac{5}{6}$

(f) $\frac{3}{20}$ van $\frac{3}{20}$

2. 'n Klein fabriek vervaardig koperpanne. Presies $\frac{3}{50}$ kg koper is nodig om een pan te vervaardig.

(a) Hoeveel panne kan vervaardig word as $\frac{18}{50}$ kg koper beskikbaar is?

(b) Hoeveel panne kan vervaardig word as $\frac{20}{50}$ kg koper beskikbaar is?

(c) Hoeveel panne kan vervaardig word as $\frac{2}{5}$ kg koper beskikbaar is?

(d) Hoeveel panne kan vervaardig word as $\frac{3}{4}$ kg koper beskikbaar is?

(e) Hoeveel panne kan vervaardig word as $\frac{144}{50}$ kg koper beskikbaar is?

(f) Hoeveel panne kan vervaardig word as 5 kg koper beskikbaar is?

3. Bereken:

(a) $\frac{18}{50} \div \frac{3}{50}$

....

(b) $\frac{9}{25} \div \frac{3}{50}$

....

(c) $\frac{144}{50} \div \frac{3}{50}$

....

(d) $2\frac{44}{50} \div \frac{3}{50}$

....

(e) $2\frac{22}{25} \div \frac{3}{50}$

....

(f) $\frac{5}{8} \div \frac{3}{50}$

....

(g) $20 \div \frac{3}{50}$

....

(h) $2 \div \frac{3}{50}$

....

(i) $1 \div \frac{3}{50}$

....

(j) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{50}$

....

4. ’n Reghoek is $3\frac{5}{8}$ cm lank, en $2\frac{3}{5}$ cm breed.

(a) Wat is die oppervlakte van die reghoek?

....

....

(b) Wat is die omtrek van die reghoek?

....

....

5. ’n Reghoek is $5\frac{5}{6}$ cm lank, en sy oppervlakte is $8\frac{1}{6}$ cm^2.

Hoe breed is hierdie reghoek?

....

....

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 52 2014/07/03 09:34:31 AM

6. Bereken:

(a) $2\frac{3}{8}$ van $5\frac{4}{5}$

(b) $3\frac{2}{7} \times 2\frac{7}{12}$

....

(c) $8\frac{2}{5} \div 3\frac{3}{10}$

(d) $3\frac{3}{10} \times 3\frac{3}{10}$

....

(e) $2\frac{5}{8} \div 5\frac{7}{10}$

(f) $\frac{3}{5} \times 1\frac{2}{3} \times 1\frac{3}{4}$

....

7. Bereken:

(a) $\frac{2}{3}(\frac{3}{4} + \frac{7}{10})$

(b) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{7}{10}$

....

(c) $\frac{5}{8}(\frac{4}{5} - \frac{1}{3})$

(d) $\frac{5}{8} \times \frac{4}{5} - \frac{5}{8} \times \frac{1}{3}$

....

8. ’n Stuk grond met ’n oppervlakte van 40 ha word verdeel in 30 gelyke plotte. Die prys van die hele stuk grond is R45 000. (Onthou “ha” is die afkorting vir hektaar.)

(a) Jim koop $\frac{2}{5}$ van die grond.

(i) Hoeveel plotte is dit, en hoeveel behoort dit te kos?

....

....

(ii) Wat is die oppervlakte van die grond wat Jim koop?

....

(b) Charlene koop $\frac{1}{3}$ van die grond. Hoeveel plotte is dit, en hoeveel behoort dit te kos?

....

....

(c) Bongani koop die res van die grond. Bepaal die breuk van die grond wat hy koop.

....

KWADRATE, DERDEMAGTE, VIERKANTS- EN DERDEMAGSWORTELS

1. Bereken:

(a) $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

....

(b) $\frac{7}{10} \times \frac{7}{10}$

....

(c) $2\frac{5}{8} \times 2\frac{5}{8}$

....

(d) $1\frac{5}{12} \times 1\frac{5}{12}$

....

(e) $3\frac{5}{7} \times 3\frac{5}{7}$

....

(f) $10\frac{3}{4} \times 10\frac{3}{4}$

....

$\frac{9}{16}$ is die kwadraat van $\frac{3}{4}$, want $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$. $\frac{3}{4}$ is dus die vierkantswortel van $\frac{9}{16}$.

2. Vind die vierkantswortel van elk van die volgende getalle:

(a) $\sqrt{\frac{25}{49}}$

....

(b) $\sqrt{\frac{36}{121}}$

....

(c) $\sqrt{\frac{64}{25}}$

....

(d) $\sqrt{2\frac{46}{49}}$

....

3. Bereken.

(a) $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

....

(b) $\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10}$

....

(c) $\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10}$

....

(d) $\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8}$

....

4. Vind die derdemagswortel van elk van die volgende getalle:

(a) $\sqrt[3]{\frac{27}{1\,000}}$ (b) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$

....

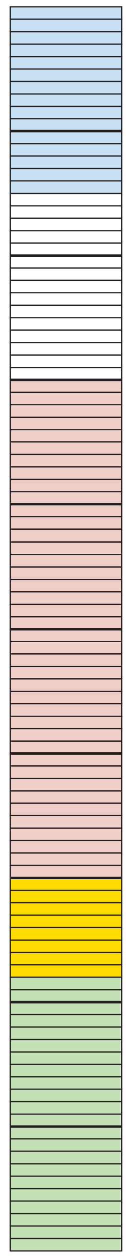
(c) $\sqrt[3]{\frac{1\,000}{216}}$ (d) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$

....

....

3.4 Ekwivalente vorms

BREUKE, DESIMALE EN PERSENTASIES



1. Die reghoekige strook aan die regterkant is in klein deeltjies opgedeel.
   (a) Hoeveel van hierdie deeltjies is daar in die reghoek? ....
   (b) Hoeveel van hierdie deeltjies is daar in een tiende van die reghoek?

   ....

   (c) Watter breuk van die reghoek is blou?

   ....

   (d) Watter breuk van die reghoek is pienk?

   ....

In plaas van "6 honderdstes" kan ons sê "6 persent" of, kortliks, "6%". Dit beteken dieselfde. 15 persent van die reghoek hier regs is blou.

2. (a) Watter persentasie van die reghoek is groen?

   ....

   (b) Watter persentasie van die reghoek is pienk?

   ....

0,37 en 37% en $\frac{37}{100}$ is **ekwivalente vorms** van dieselfde waarde (37 honderdstes).

3. Druk elk van die volgende op drie maniere uit: as ’n desimaal, ’n persentasie en ’n breuk (in eenvoudigste vorm):

   (a) 3 tiendes

   ....

   (b) 7 honderdstes

   ....

   (c) 37 honderdstes

   ....

   (d) 7 tiendes

   ....

   (e) 2 vyfdes

   ....

   (f) 7 twintigstes

   ....

4. Voltooi die tabel:

Desimaal	Persentasie	Gewone breuk (eenvoudigste vorm)
0,2		
	40%	
		$\frac{3}{8}$
0,05		

5. (a) Jannie eet ’n kwart van ’n waatlemoen. Watter persentasie van die waatlemoen is dit?

   ....

   (b) Sibu drink 75% van die melk in ’n bottel. Watter breukdeel van die melk in die bottel het hy gedrink?

   ....

   (c) Jem gebruik 0,18 van die verf in ’n blik. Indien hy die helfte van wat oorbly die volgende keer gebruik, watter breuk (in eenvoudigste vorm) bly oor?

   ....

Hoofstuk 4
Die desimale notasie vir breuke

In hierdie hoofstuk gaan jy met breuke werk wat in die desimale notasie geskryf is. Wanneer breuke in die desimale notasie geskryf is, kan ons berekeninge met hulle doen op dieselfde manier as wat ons berekeninge met telgetalle doen.

Dis belangrik om altyd in gedagte te hou dat die gewone breukvorm, die desimale vorm en die persentasievorm bloot verskillende maniere is om presies dieselfde getalle uit te druk. Hierdie getalle word rasionale getalle genoem.

$$7 \times 1\ 000\ 000$$

$$+$$

$$4 \times 100\ 000$$

$$+$$

$$7 \times 10\ 000$$

$$+$$

$$6 \times 1\ 000$$

$$+$$

$$3 \times 100$$

$$+$$

$$6 \times 10$$

$$+$$

$$9 \times 1$$

$$+$$

3 tiendes + 7 duisendstes

$$+$$

$$\frac{3}{10\,000} + \frac{8}{100\,000} + \frac{7}{1\,000\,000}$$

4 Die desimale notasie vir breuke

4.1 Ekwivalente vorms

Desimale breuke en gewone breuke is bloot verskillende maniere om dieselfde getal uit te druk. Dit is verskillende **notasies** wat dieselfde waarde wys.

Om 'n desimale getal as 'n gewone breuk te skryf:
Skryf die desimale getal as 'n gewone breuk met 'n noemer wat 'n mag van tien is (10, 100, 1 000, ens.) en vereenvoudig dit dan indien moontlik, byvoorbeeld

$$0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{7}{20}$$

Om 'n gewone breuk as 'n desimale getal te skryf:
Verander die gewone breuk na 'n ekwivalente breuk met 'n mag van tien as 'n noemer, byvoorbeeld

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

As jy jou sakrekenaar mag gebruik, tik net 3 ÷ 4 in en die antwoord sal as 0,75 gegee word. Op party sakrekenaars sal jy 'n addisionele knoppie moet druk om die presiese breuk na 'n desimaal te herlei.

Notasie beteken 'n stel simbole om iets op 'n spesiale manier te wys.

GEWONE BREUKE, DESIMALE EN PERSENTASIES

In hierdie oefening mag jy nie 'n sakrekenaar gebruik nie.

1. Skryf die volgende desimale as gewone breuke in hulle eenvoudigste vorm:

(a) 0,56

....

(b) 3,87

....

(c) 1,9

....

(d) 5,205

....

2. Skryf die volgende gewone breuke as desimale:

(a) $\frac{9}{20}$ (b) $\frac{7}{5}$

....

(c) $\frac{24}{25}$ (d) $2\frac{3}{8}$

....

3. Skryf die volgende persentasies as gewone breuke in hulle eenvoudigste vorm:

(a) 70% (b) 5% (c) 12,5%

....

4. Skryf die volgende desimale as persentasies:

(a) 0,6 (b) 0,43 (c) 0,08

....

(d) 0,265 (e) 0,005

....

5. Skryf die volgende gewone breuke as persentasies:

(a) $\frac{7}{10}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{33}{50}$

....

(d) $\frac{60}{60}$ (e) $\frac{2}{25}$ (f) $\frac{29}{50}$

....

6. Jane en Devi is in verskillende skole. By Jane se skool was die jaarpunt vir Wiskunde uit 80, en Jane het 60 uit 80 gekry. By Devi se skool was die jaarpunt uit 50 en Devi het 40 uit 50 gekry.

(a) Watter breuk van die totale punte, in eenvoudigste vorm, het Devi gekry?

....

(b) Watter persentasie het Devi en Jane vir Wiskunde gekry?

....

(c) Wie het die beste presteer, Jane of Devi?

....

7. Tydens ’n korfbalwedstryd het Lebo twaalf keer probeer om ’n doel aan te teken. Net vier van haar pogings was suksesvol.

   (a) Watter breuk van haar pogings was suksesvol?

   ....

   ....

   (b) Watter persentasie van haar pogings was nie suksesvol nie?

   ....

4.2 Berekeninge met desimale

Wanneer jy desimale optel en aftrek:
Tel tiendes by tiendes.
Trek tiendes van tiendes af.
Tel honderdstes by honderdstes.
Trek honderdstes van honderdstes af.
En so aan!

Wanneer jy desimale vermenigvuldig, verander jy die desimale na telgetalle, doen die berekening en verander hulle weer terug na desimale.

Voorbeeld: Om 13,1 × 1,01 te bereken, bereken jy eers 131 × 101 (wat gelyk is aan 13 231). Dan, aangesien jy die 13,1 met 10 vermenigvuldig het, en die 1,01 met 100 om hulle telgetalle te maak, moet jy hierdie antwoord deur 10 × 100 (d.w.s. 1 000) deel.

Die finale antwoord is dus 13,231.

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 61 2014/07/03 09:34:43 AM

Wanneer jy desimale deel, kan jy ekwivalente breuke gebruik om jou te help.

Voorbeeld: $21{,}7 \div 0{,}7 = \frac{21{,}7}{0{,}7} = \frac{21{,}7}{0{,}7} \times \frac{10}{10} = \frac{217}{7} = 31$

Let op hoe jy beide die teller en noemer van die breuk met dieselfde getal vermenigvuldig (in hierdie geval, 10). Vermenigvuldig altyd met die *kleinste* mag van 10 wat albei waardes telgetalle sal maak.

BEREKENINGE MET DESIMALE

Jy mag nie in hierdie oefening 'n sakrekenaar gebruik nie. Maak seker dat jy alle stappe van jou berekening wys.

1. Bereken die waarde van die volgende:

(a) 3,3 + 4,83

....

....

....

(b) 0,6 + 18,3 + 4,4

....

....

....

(c) 9,3 + 7,6 – 1,23

....

....

(d) (16,0 – 7,6) – 0,6

....

....

(e) 9,43 – (3,61 + 1,14)

....

....

....

(f) 1,21 + 2,5 – (2,3 – 0,23)

....

....

....

2. Bereken die waarde van die volgende:

(a) 4 × 0,5

....

(b) 15 × 0,02

....

(c) 0,8 × 0,04

....

(d) 0,02 × 0,15

....

(e) 1,07 × 0,2

....

(f) 0,016 × 0,02

....

3. Bereken die waarde van die volgende:

(a) $7{,}2 \div 3$ (b) $12 \div 0{,}3$ (c) $0{,}15 \div 0{,}5$

....

....

(d) $10 \div 0{,}002$ (e) $0{,}3 \div 0{,}006$ (f) $0{,}024 \div 0{,}08$

....

....

4. Omkring die waarde wat gelyk aan of die naaste aan die antwoord op elke berekening is:

(a) $3 \times 0{,}5$

A: 6

B: 1,5

C: 0,15

(b) $4{,}4 \div 0{,}2$

A: 8,8

B: 2,2

C: 22

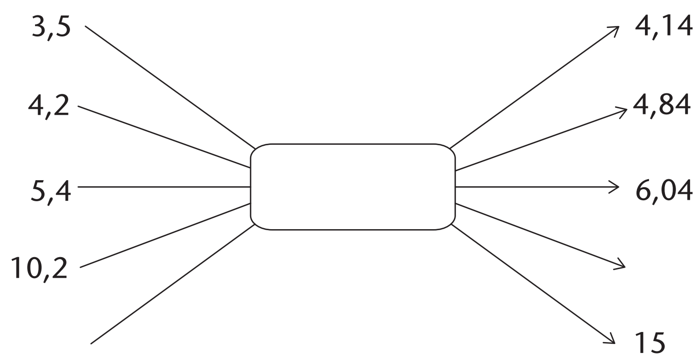
(c) $56 \times 1{,}675$

A: meer as 56

B: meer as 84

C: meer as 112

5. Bepaal die operator en die onbekende getalle in die vloeidiagram, en vul hulle in:



6. Bereken die volgende:

(a) $(0{,}1)^2$ (b) $(0{,}03)^2$ (c) $(2{,}5)^2$

....

(d) $\sqrt{0,04}$ (e) $\sqrt{0,16}$ (f) $\sqrt{0,49}$

....

(g) $(0,2)^3$ (h) $(0,4)^3$ (i) $(0,03)^3$

....

(j) $\sqrt[3]{0,064}$ (k) $\sqrt[3]{0,125}$ (l) $\sqrt[3]{0,216}$

....

7. Bereken die volgende:

(a) $2,5 \times 2 \div 10$ (b) $4,2 - 5 \times 1,2$

....

....

(c) $\dfrac{5,4 + 7,35}{0,05}$ (d) $4,2 \div 0,21 + 0,45 \times 0,3$

....

....

....

4.3 Los probleme op

ALLERHANDE SOORTE PROBLEME

Jy mag nie in hierdie oefening 'n sakrekenaar gebruik nie. Maak seker dat jy al die stappe van jou werk wys.

1. Is $6,54 \times 0,81 = 0,654 \times 8,1$? Verduidelik jou antwoord.

....

....

....

2. Daar word vir jou gesê dat $45 \times 24 = 1\ 080$. Gebruik dit om die volgende te bepaal:

(a) $4,5 \times 2,4$ (b) $4,5 \times 24$ (c) $4,5 \times 0,24$

....

(d) $0{,}045 \times 24$ (e) $0{,}045 \times 0{,}024$ (f) $0{,}045 \times 24$

....

3. Sonder om te deel, kies watter antwoord tussen hakies die korrekte antwoord, of die naaste aan die korrekte antwoord is.

(a) $14 \div 0{,}5$ (7; 28; 70) (b) $0{,}58 \div 0{,}7$ (8; 80; 0,8)

....

(c) $2{,}1 \div 0{,}023$ (10; 100; 5)

....

4. (a) John word gevra om $6{,}5 \div 0{,}02$ te bereken. Hy doen die volgende:

Stap 1: $6{,}5 \div 2 = 3{,}25$

Stap 2: $3{,}25 \times 100 = 325$

Is hy reg? Waarom?

....

....

....

....

(b) Gebruik John se metode in (a) hier bo om die volgende te bereken:

(i) $4{,}8 \div 0{,}3$ (ii) $21 \div 0{,}003$

....

....

5. Gegewe: $0{,}174 \div 0{,}3 = 0{,}58$. Gebruik hierdie feit om die antwoorde vir die volgende neer te skryf sonder om enige verdere berekeninge te doen:

(a) $0{,}3 \times 0{,}58$ (b) $1{,}74 \div 3$

....

(c) $17{,}4 \div 30$ (d) $174 \div 300$

....

(e) $0{,}0174 \div 0{,}03$ (f) $0{,}3 \times 5{,}8$

....

4.4 Meer probleme

MEER PROBLEME EN BEREKENINGE

Jy mag 'n sakrekenaar gebruik vir hierdie oefening.

1. Bereken die volgende en rond alle antwoorde korrek tot 2 desimale plekke af:
   (a) $8{,}567 + 3{,}0456$ (b) $2{,}781 - 6{,}0049$

   ....

   (c) $1{,}234 \times 4{,}056$ (d) $\frac{5{,}678 + 3{,}245}{1{,}294 - 0{,}994}$

   ....

2. Wat is die verskil tussen 0,890 en 0,581?

   ....

3. 'n Reghoek is 12,34 cm breed en 31,67 cm lank.
   (a) Wat is die omtrek van die reghoek?

   ....

   ....

   (b) Wat is die oppervlakte van die reghoek? Rond jou antwoord tot twee desimale plekke af.

   ....

   ....

4. Alison koop 'n koeldrank vir R5,95, 'n sjokolade vir R3,25 en 'n pakkie skyfies vir R4,60. Sy betaal met 'n R20-noot.
   (a) Hoeveel het sy bestee?

   ....

   ....

   (b) Hoeveel kleingeld het sy gekry?

   ....

   ....

5. ’n Trekker gebruik 11,25 ℓ brandstof in 0,75 uur. Hoeveel liter gebruik dit in een uur?

....

....

6. Mevrou Ruka het haar munisipale rekening ontvang.
   (a) Haar waterverbruik vir een maand kos R32,65. Die eerste 5,326 kl is gratis en daarna betaal sy R5,83 per kiloliter.
   Hoeveel water het die Ruka-huishouding gebruik?

....

....

   (b) Mevrou Ruka se elektrisiteitsheffing vir dieselfde maand was R417,59. Die eerste 10 kWh is gratis. Vir die volgende 100 kWh is die koste R1,13 per kWh, en daarna is die koste vir elke kWh R1,42. Hoeveel elektrisiteit het die Ruka-huishouding gebruik?

....

....

....

7. ’n Rol rokmateriaal is 25 m lank. Jy het 1,35 m materiaal nodig om een rok te maak. Hoeveel rokke kan uit die rol materiaal gemaak word en hoeveel materiaal bly oor?

....

....

....

8. As 1 liter petrol 0,679 kg weeg, wat sal 28,6 ℓ petrol weeg?

....

9. Die lesing op ’n watermeter is 321,573 kl aan die begin van die maand. Aan die einde van die maand is die lesing 332,523 kl. Hoeveel water is in hierdie maand gebruik, in ℓ?

....

....

4.5 Desimale in algebraïese uitdrukkings en vergelykings

DESIMALE IN ALGEBRA

1. Vereenvoudig die volgende:

(a) $\sqrt{0{,}09x^{36}}$

(b) $7{,}2x^3 - 10{,}4x^3$

(c) $(2{,}4x^2y^3)(10y^3x)$

(d) $11{,}75x^2 - 1{,}2x \times 5x$

(e) $\dfrac{3{,}4x - 1{,}2x}{1{,}1x \times 4}$

(f) $\sqrt[3]{0{,}008x^{12}} + \sqrt{0{,}16x^8}$

(g) $3x^2 + 0{,}1x^2 - 45{,}6 + 3{,}9$

(h) $\dfrac{0{,}4y + 1{,}2y}{0{,}6x - 3x}$

2. Vereenvoudig die volgende:

(a) $\dfrac{0{,}5x^9}{0{,}02x^3}$

(b) $\dfrac{0{,}325}{x^2} - \dfrac{1{,}675}{x^2}$

(c) $\frac{3,6x}{1,5y^3} \times \frac{5y}{0,6x}$

(d) $\frac{9,5x^2}{1,2y^2} \div \frac{0,05x}{0,04y^8}$

3. Los die volgende vergelykings op:

(a) $0,24 + x = 0,31$

(b) $x + 5,61 = 7,23$

(c) $x - 3,14 = 9,87$

(d) $4,21 - x = 2,74$

(e) $0,96x = 0,48$

(f) $x \div 0,03 = 1,5$

WERKBLAD

Jy mag nie 'n sakrekenaar gebruik nie, behalwe vir vraag 5. Maak seker dat jy al die stappe in jou werk wys, waar van toepassing.

1. Voltooi die volgende tabel:

Persentasie	Gewone breuk	Desimaal
2,5%		
	$\frac{15}{250}$	
		0,009

2. Bereken die volgende:

(a) $6,78 - 4,92$ (b) $1,7 \times 0,05$ (c) $7,2 \div 0,36$

....

(d) $4,2 - 0,4 \times 1,2 + 7,37$ (e) $(0,12)^2$ (f) $\frac{3\sqrt{0,04}}{\sqrt[3]{0,027}}$

....

....

3. $36 \times 19 = 684$. Gebruik hierdie resultaat om die volgende te bepaal:

(a) $3,6 \times 1,9$ (b) $0,036 \times 0,19$ (c) $68,4 \div 0,19$

....

4. Vereenvoudig:

(a) $(4,95x - 1,2) - (3,65x + 3,1)$ (b) $\frac{2,75x^{50}}{0,005x^{25}}$

....

....

5. Mulalo het winkel toe gegaan en 2 buisies tandepasta vir R6,98 elk, 3 blikkies koeldrank vir R6,48 elk, en 5 blikkies sousbone vir R7,95 elk gekoop. Hoeveel kleingeld het hy gekry, as hy met 'n R100-noot betaal het?

....

HOOFSTUK 5
Eksponente

In hierdie hoofstuk sal jy werk oor eksponente wat jy in vorige grade gedoen het, hersien. Jy sal ook leer wat gebeur wanneer ’n getal tot ’n mag wat ’n negatiewe getal is, verhef word en jy sal ook eenvoudige vergelykings in eksponensiële vorm oplos.

In Graad 8 het jy van wetenskaplike notasie geleer. In hierdie hoofstuk sal ons die wetenskaplike notasie uitbrei om baie klein getalle soos 0,0000123 in te sluit.

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

5 Eksponente

5.1 Hersiening

Jy weet reeds dat eksponente 'n kort manier is om herhaalde vermenigvuldiging van dieselfde getal met homself te beskryf, byvoorbeeld $5 \times 5 \times 5 = 5^3$. Die **eksponent**, wat in hierdie voorbeeld 3 is, staan vir hoeveel keer die waarde vermenigvuldig word. Die getal wat vermenigvuldig word, wat in hierdie voorbeeld 5 is, word die **grondtal** genoem.

As daar gemengde bewerkings is, moet die magte voor vermenigvuldiging en deling bereken word, byvoorbeeld $5^2 \times 3^2 = 25 \times 9$.

Jy het in vorige grade ook oor die eienskappe van eksponente geleer:

Eienskap	Voorbeeld
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$5^4 \div 5^2 = 5^{4-2} = 5^2$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(2^3)^2 = 2^{2 \times 3} = 2^6$
$(a \times t)^n = a^n \times t^n$	$(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2$
$a^0 = 1$	$32^0 = 1$

DIE EKSPONENSIËLE VORM VAN 'N GETAL

1. Skryf die volgende in eksponensiële notasie:
   (a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (b) $s \times s \times s \times s$ (c) $(-6) \times (-6) \times (-6)$

   ....

   (d) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times s \times s \times s \times s$ (e) $3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$ (f) $500 \times (1{,}02) \times (1{,}02)$

   ....

2. Skryf elkeen van die getalle in eksponensiële notasie, op 'n paar verskillende maniere indien moontlik:
   (a) 81 (b) 125 (c) 1 000

   ....

   (d) 64 (e) 216 (f) 1 024

   ....

VOLGORDE VAN BEWERKINGS

1. Bereken die waarde van $7^2 - 4$.
   Bathabile het die berekening soos volg gedoen: $7^2 - 4 = 14 - 4 = 10$
   Nathaniel het die berekening anders gedoen: $7^2 - 4 = 49 - 4 = 45$
   Watter leerder het die berekening korrek gedoen? Gee redes vir jou antwoord.

   ....

   ....

2. Bereken $5 + 3 \times 2^2 - 10$, met verduidelikings.

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Verduidelik hoe om $2^6 - 6^2$ te bereken.

   ....

   ....

   ....

4. Verduidelik hoe om $(4 + 1)^2 + 8 \times \sqrt[3]{64}$ te bereken.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

EIENSKAPPE VAN EKSPONENTE

1. Gebruik die eienskappe van eksponente om die volgende te bereken:

(a) $2^2 \times 2^4$	(b) $3^4 \div 3^2$	(c) $3^0 + 3^4$
....	....	....
....	....	....
....	....	....

(d) $(2^3)^2$ (e) $(2 \times 5)^2$ (f) $(2^2 \times 7)^3$

....

....

....

2. Voltooi die tabel. Vervang y met die gegewe getal. Die eerste kolom is as voorbeeld gedoen.

	y	2	3	4	5
(a)	$y \times y^4$	2×2^4 $= 2^{1+4}$ $= 2^5$ $= 32$			
(b)	$y^2 \times y^3$	$2^2 \times 2^3$ $= 4 \times 8$ $= 32$			
(c)	y^5	$2^5 = 32$			

3. Is die uitdrukkings $y \times y^4$ en $y^2 \times y^3$ en y^5 ekwivalent? Verduidelik.

....

....

....

4. Voltooi die tabel. Vervang y met die gegewe getal.

	y	2	3	4	5
(a)	$y^4 \div y^2$	$2^4 \div 2^2$ $= 16 \div 4$ $= 4$			
(b)	$y^3 \div y^1$	$2^3 \div 2^1$ $= 8 \div 2$ $= 4$			
(c)	y^2	$2^2 = 4$			

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 75 2014/07/03 09:34:51 AM

5. (a) Is $y^4 \div y^2 = y^3 \div y^1 = y^2$ volgens die tabel? Verduidelik waarom dit so is.

....

....

....

(b) Evalueer $y^4 \div y^2$ vir $y = 15$.

....

6. Voltooi die tabel:

	x	2	3	4	5
(a)	2×5^x	2×5^2 $= 2 \times 25$ $= 50$			
(b)	$(2 \times 5)^x$	$(2 \times 5)^2$ $= 10^2$ $= 100$			
(c)	$2^x \times 5^x$	$2^2 \times 5^2$ $= 4 \times 25$ $= 100$			

7. (a) Volgens die tabel hier bo, is $2 \times 5^x = (2 \times 5)^x$? Verduidelik waarom dit so is.

....

(b) Watter uitdrukkings in die tabel in vraag 6 is ekwivalent? Verduidelik.

....

....

8. Hier onder is berekeninge wat Wilson as huiswerk gedoen het. Merk elke probleem as korrek of verkeerd en verduidelik die foute.

(a) $b^3 \times b^8 = b^{24}$

....

....

(b) $(5x)^2 = 5x^2$

. . . .

. . . .

(c) $(-6a) \times (-6a) \times (-6a) = (-6a)^3$

. . . .

5.2 Heelgetaleksponente

Tot dusver het jy slegs met positiewe eksponente gewerk. Maar wat gebeur wanneer 'n getal tot 'n mag wat 'n negatiewe getal is, verhef word? Wat beteken x^{-5} byvoorbeeld? Ons wil hê die eienskap vir vermenigvuldiging van magte moet geld, byvoorbeeld $x^5 \times x^{-5} = x^{5-5} = x^0 = 1$.

Omdat $x^5 \times x^{-5} = 1$, weet ons dat x^{-5} die vermenigvuldigingsinverse van x^5 is.

$x^5 \times \frac{1}{x^5} = 1$ as $x \neq 0$.

Dus is $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$

Net so moet die eienskap vir deling van magte geld, byvoorbeeld $\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2}$

Maar ons weet dat $\frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2}$ as $x \neq 0$. Dus is $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

Ons definieer $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ vir $x \neq 0$, n is 'n natuurlike getal.

NEGATIEWE EKSPONENTE

1. Voltooi die getalpatrone in die tabel:

(a)	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$
(b)	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$
(c)	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
(d)	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$	$5^1 = 5$
(e)	$2^0 =$	$3^0 =$	$4^0 =$	$5^0 =$
(f)	$2^{-1} =$	$3^{-1} =$	$4^{-1} =$	$5^{-1} =$
(g)	$2^{-2} =$	$3^{-2} =$	$4^{-2} =$	$5^{-2} =$
(h)	$2^{-3} =$	$3^{-3} =$	$4^{-3} =$	$5^{-3} =$

2. Wat moet die betekenis van a^0 en a^{-1} wees om die struktuur van patrone in die tabel te behou?

....

3. (a) Gebruik 'n wetenskaplike sakrekenaar om die desimale waardes van die gegewe magte te bepaal.

Voorbeeld: Om 3^{-1} te bepaal, gebruik die sleutelvolgorde: **3** $\boldsymbol{y^x}$ **1 ± =**

Mag	2^{-1}	5^{-1}	$(-2)^{-1}$	$(0{,}3)^{-1}$	0^{-1}	10^{-1}	10^{-2}
Desimale waarde							

(b) Verduidelik die betekenis van 10^{-3}.

....

4. Bepaal die waarde van elkeen van die volgende op twee maniere:

A. Deur die definisie van magte te gebruik (byvoorbeeld $5^2 \times 5^0 = 25 \times 1 = 25$).

B. Deur die eienskappe van eksponente te gebruik (byvoorbeeld $5^2 \times 5^0 = 5^{2+0} = 5^2 = 25$).

(a) $(3^3)^{-2}$ (b) $4^2 \times 4^{-2}$ (c) $5^{-2} \times 5^{-1}$

Eerste manier:

....

....

....

Tweede manier:

....

....

....

....

5. Bereken die waarde van elkeen van die volgende. Druk jou antwoorde as gewone breuke uit.

(a) 2^{-3}

(b) $3^2 \times 3^{-2}$

(c) $(2 + 3)^{-2}$

(d) $3^{-2} \times 2^{-3}$

(e) $2^{-3} + 3^{-3}$

(f) 10^{-3}

(g) $2^3 + 2^{-3}$

(h) $(3^{-1})^{-1}$

(i) $(2^{-3})^2$

6. Watter van die volgende is waar? Korrigeer enige stelling wat onwaar is.

(a) $6^{-1} = -6$

(b) $3x^{-2} = \frac{1}{3x^2}$

(c) $3^{-1}x^{-2} = \frac{1}{3x^2}$

(d) $(ab)^{-2} = \frac{1}{a^2b^2}$

(e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

(f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$

5.3 Los eenvoudige eksponensiële vergelykings op

’n Eksponensiële vergelyking is ’n vergelyking waarin die veranderlike deel van die eksponent is. Wanneer jy dus eksponensiële vergelykings oplos, los jy vrae op van die vorm: “**Tot watter mag moet die grondtal verhef word sodat die bewering waar is?**”

Om hierdie soort vergelyking op te los, moet jy die volgende onthou:

As $a^m = a^n$, dan is $m = n$.

Met ander woorde, as die grondtal aan weerskante van die vergelyking dieselfde is, is die eksponente dieselfde.

Voorbeeld:

$3^x = 243$

$3^x = 3^5$ (herskryf deur dieselfde grondtal te gebruik)

$x = 5$ (aangesien die grondtalle dieselfde is, stel ons die eksponente gelyk)

Party eksponensiële vergelykings is effens meer ingewikkeld:

Voorbeeld: $3^{x+3} = 243$

$3^{x+3} = 3^5$ (herskryf deur dieselfde grondtal te gebruik)

$x + 3 = 5$ (stel die eksponente gelyk)

$x = 2$

Kontroleer: LK $3^{2+3} = 3^5 = 243$

Onthou dat die eksponent ook negatief kan wees. Om sulke vergelykings op te los, volg jy egter dieselfde metode.

Voorbeeld: $2^x = \frac{1}{32}$

$2^x = 2^{-5}$ (herskryf deur dieselfde grondtal te gebruik)

$x = -5$ (stel die eksponente gelyk)

LOS EKSPONENSIËLE VERGELYKINGS OP

1. Gebruik die tabel om die vrae wat volg te beantwoord.

x	2	3	4	5
2^x	4	8	16	32
3^x	9	27	81	243
5^x	25	125	625	3 125

Vir watter waarde van x geld die volgende?

(a) $2^x = 32$ ....

(b) $3^x = 81$ ....

(c) $5^x = 3\,125$ ....

(d) $2^x = 8$ ....

(e) $5^x = 625$ ....

(f) $3^x = 9$ ....

(g) $5^{x+1} = 25$ ....

(h) $3^{x+2} = 27$ ....

(i) $2^{x-1} = 8$ ....

2. Los die eksponensiële vergelykings op. Jy kan jou sakrekenaar gebruik indien nodig.

(a) $4^x = \frac{1}{64}$ ....

(b) $6^{2x} = 1\,296$ ....

(c) $2^{x-1} = \frac{1}{8}$ ....

(d) $3^{x+2} = \frac{1}{729}$ ....

(e) $5^{x+1} = 15\,625$ ....

(f) $2^{x+3} = \frac{1}{4}$ ....

(g) $4^{x+3} = \frac{1}{256}$ ....

(h) $3^{2-x} = 81$ ....

(i) $5^{3x} = \frac{1}{125}$ ....

5.4 Wetenskaplike notasie

Wetenskaplike notasie is ’n manier om getalle te skryf wat te groot of te klein is om duidelik in desimale vorm geskryf te word. Die middellyn van ’n waterstofatoom is byvoorbeeld ’n baie klein getal. Dit is 0,000000053 mm. Die afstand van die Son na die Aarde is gemiddeld 150 000 000 km.

In wetenskaplike notasie word die middellyn van die waterstofatoom geskryf as $5,3 \times 10^{-8}$ en die gemiddelde afstand van die Son na die Aarde as $1,5 \times 10^{8}$. Dit is makliker om getalle soos hierdie te vergelyk en te bereken, aangesien dit baie lastig is om die nulle te tel wanneer jy met sulke getalle werk.

Beskou die voorbeelde hieronder:

Desimale notasie	**Wetenskaplike notasie**
6 130 000	$6,13 \times 10^{6}$
0,00001234	$1,234 \times 10^{-5}$

’n Getal wat in wetenskaplike notasie geskryf word, word as die produk van twee getalle geskryf in die vorm $\pm\, a \times 10^{n}$ waar a ’n desimale getal tussen 1 en 10 en n ’n heelgetal is.

Enige getal kan in wetenskaplike notasie geskryf word, byvoorbeeld:

$40 = 4,0 \times 10$

$2 = 2 \times 10^{0}$

Die desimale getal 324 000 000 word in wetenskaplike notasie as $3,24 \times 10^{8}$ geskryf, omdat die desimale komma 8 plekke na links geskuif word om die getal 3,24 te vorm.

Die desimale getal 0,00000065 in wetenskaplike notasie geskryf, is $6,5 \times 10^{-7}$, omdat die desimale komma 7 plekke na regs geskuif word om die getal 6,5 te vorm.

SKRYF BAIE KLEIN EN BAIE GROOT GETALLE

1. Druk die volgende getalle uit in wetenskaplike notasie:

(a) 134,56

....

(b) 0,0000005678

....

(c) 876 500 000

....

(d) 0,0000000000321

....

(e) 0,006789

....

(f) 89 100 000 000 000

....

(g) 0,001

....

(h) 100

....

2. Druk die volgende getalle uit in gewone desimale notasie:

(a) $1{,}234 \times 10^{6}$

....

(b) 5×10^{-1}

....

(c) $4{,}5 \times 10^{5}$

....

(d) $6{,}543 \times 10^{-11}$

....

3. Waarom sê ons dat 34×10^{3} nie in wetenskaplike notasie geskryf is nie? Herskryf dit in wetenskaplike notasie.

....

4. Is elkeen van hierdie getalle in wetenskaplike notasie geskryf? Indien nie, herskryf dit sodat dit in wetenskaplike notasie is.

(a) $90{,}3 \times 10^{-5}$

....

....

(b) 100×10^{2}

....

....

(c) $1{,}36 \times 10^{5}$

....

....

(d) $2{,}01 \times 10^{-2}$

....

....

(e) $0{,}01 \times 10^{3}$

....

....

(f) $0{,}6 \times 10^{8}$

....

....

BEREKENINGE DEUR WETENSKAPLIKE NOTASIE TE GEBRUIK

Voorbeeld: $123\,000 \times 4\,560\,000$

$= 1{,}23 \times 10^5 \times 4{,}56 \times 10^6$ (skryf in wetenskaplike notasie)

$= 1{,}23 \times 4{,}56 \times 10^5 \times 10^6$ (vermenigvuldiging is kommutatief)

$= 5{,}6088 \times 10^{11}$ (gebruik 'n sakrekenaar om die desimale te vermenigvuldig, maar tel die magte in jou kop bymekaar)

1. Gebruik wetenskaplike notasie om elkeen van die volgende te bereken. Gee die antwoord in wetenskaplike notasie.

(a) $135\,000 \times 246\,000\,000$

....

....

....

(b) $987\,654 \times 123\,456$

....

....

....

(c) $0{,}000065 \times 0{,}000216$

....

....

....

....

(d) $0{,}000000639 \times 0{,}0000587$

....

....

....

....

Voorbeeld: $5 \times 10^3 + 4 \times 10^4$

$= 0{,}5 \times 10^4 + 4 \times 10^4$ (vorm gelyksoortige terme)

$= 4{,}5 \times 10^4$ (kombineer gelyksoortige terme)

2. Bereken die volgende. Laat die antwoord in wetenskaplike notasie.

(a) $7{,}16 \times 10^5 + 2{,}3 \times 10^3$

....

....

....

(b) $2{,}3 \times 10^{-4} + 6{,}5 \times 10^{-3}$

....

....

....

(c) $4{,}31 \times 10^7 + 1{,}57 \times 10^6$

....

....

....

(d) $6{,}13 \times 10^{-10} + 3{,}89 \times 10^{-8}$

....

....

....

Hoofstuk 6
Patrone

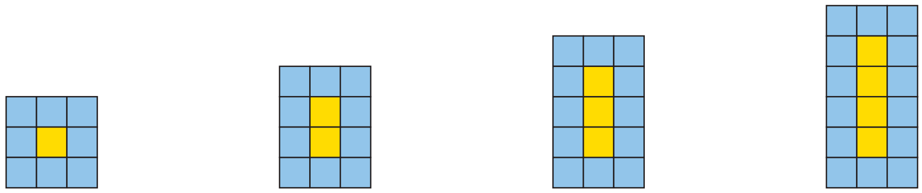
In hierdie hoofstuk sal jy leer van verskillende soorte getalpatrone. Party getalpatrone word binne meetkundige patrone aangetref. Jy sal leer om te identifiseer hoe patrone gevorm word en jy sal patrone van jou eie maak. Jy sal ook leer om formules te maak wat gebruik kan word om getalpatrone te beskryf.

1	2	3	5	8	13	21	34	55
2	3	5	8	13	21	34	55	89
3	5	8	13	21	34	55	89	144
5	8	13	21	34	55	89	144	233
8	13	21	34	55	89	144	233	377
13	21	34	55	89	144	233	377	610
21	34	55	89	144	233	377	610	987
34	55	89	144	233	377	610	987	1597
55	89	144	233	377	610	987	1597	2584
89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181
144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765
233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946
377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711
610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657
987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368

6 Patrone

6.1 Meetkundige patrone

ONDERSOEK EN BREI UIT



Rangskikking 1 Rangskikking 2 Rangskikking 3 Rangskikking 4

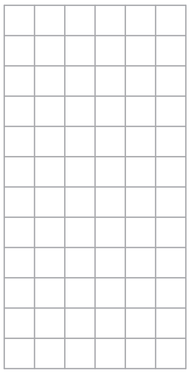
1. Blou en geel vierkantige teëls word gebruik om die rangskikkings hier bo te vorm.
   (a) Hoeveel geel teëls is daar in elke rangskikking?

   ....

   (b) Hoeveel blou teëls is daar in elke rangskikking?

   ....

   (c) As nog rangskikkings op dieselfde manier gemaak word, hoeveel blou teëls en hoeveel geel teëls sal daar in rangskikking 5 wees? Kontroleer jou antwoord deur die rangskikking op die rooster aan die regterkant te teken.

   ....

   (d) Voltooi hierdie tabel.

Getal geel teëls	1	2	3	4	5	8
Getal blou teëls						

   (e) Hoeveel blou teëls sal daar in 'n soortgelyke rangskikking met 26 geel teëls wees?

   ....

   (f) Hoeveel blou teëls sal daar in 'n soortgelyke rangskikking met 100 geel teëls wees?

   ....

(g) Beskryf hoe jy gedink het om jou antwoord vir (f) te kry.

....

....

....

....

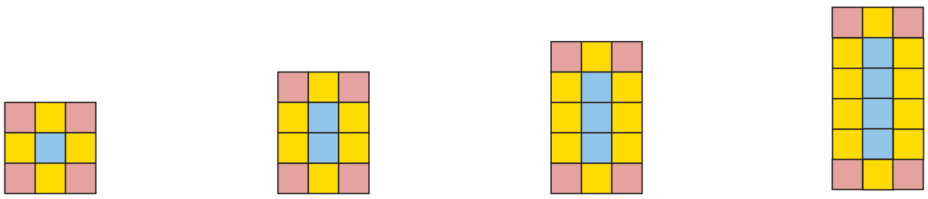
....

....

....

....

2. (a) In hierdie rangskikkings is daar rooi teëls ook. Voltooi die tabel.



Getal blou teëls	1	2	3	4	5	6	7
Getal geel teëls							
Getal rooi teëls							

(b) Hoeveel rooi teëls is daar in elke rangskikking?

....

(c) Hoeveel geel teëls is daar in elke rangskikking?

....

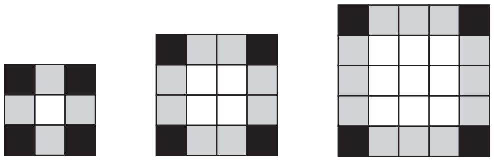
Die getal rooi teëls in rangskikkings soos dié in vraag 2 is **konstant**. Dit is altyd 4, ongeag die getal blou en geel teëls wat daar is.

Die getal blou teëls is verskillend vir verskillende rangskikkings. Ons kan sê die getal blou teëls **verander**. Ons kan ook sê die getal blou teëls is 'n **veranderlike**.

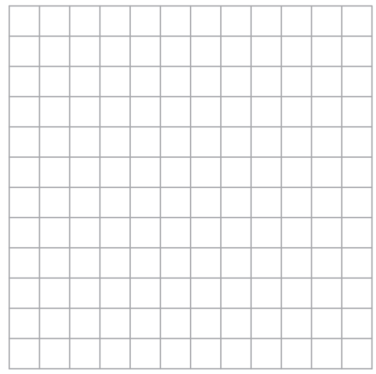
3. Is die getal geel teëls in die rangskikkings hier bo 'n konstante of is dit 'n veranderlike?

....

4. Kyk na hierdie drie rangskikkings. Hulle bestaan uit swart vierkante, grys vierkante en wit vierkante.



(a) Teken nog 'n rangskikking van dieselfde soort, maar met 'n ander lengte, op die rooster hier regs.



(b) Beskryf wat konstant is in hierdie rangskikkings.

....

(c) Wat is die veranderlikes in hierdie rangskikkings?

....

....

Die kleinste rangskikking hier bo kan rangskikking 1 genoem word, die volgende groter een kan rangskikking 2 genoem word, ensovoorts.

5. (a) Voltooi die tabel vir rangskikkings soos dié in vraag 4.

Rangskikkingnommer	1	2	3	4	5	6	7	10	20
Getal swart vierkante									
Getal grys vierkante									
Getal wit vierkante									

(b) Hoeveel grys vierkante dink jy sal daar in rangskikking 15 wees? Verduidelik jou antwoord.

....

....

(c) Hoeveel swart vierkante dink jy sal daar in rangskikking 15 wees? Verduidelik jou antwoord.

....

(d) Hoeveel wit vierkante dink jy sal daar in rangskikking 15 wees? Verduidelik jou antwoord.

....

....

Die getal grys vierkante in die onderskeie rangskikkings in vraag 4 vorm ’n patroon:
4; 8; 12; 16; 20; 24; . . . , en so aan.

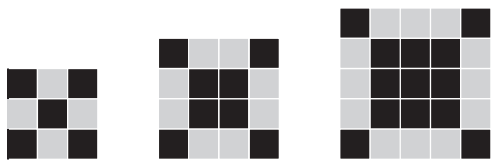
Die getal wit vierkante in die onderskeie rangskikkings vorm ook ’n patroon:
1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; . . . , en so aan.

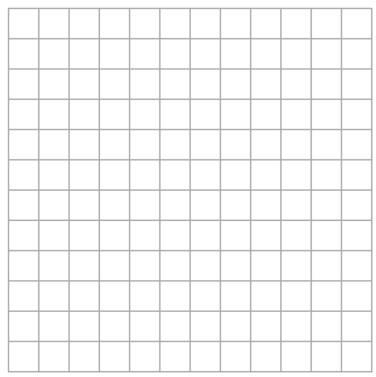
6. Wat is die volgende vyf getalle in elkeen van die patrone hier bo?

....

....

7. (a) Teken die volgende rangskikking wat dieselfde patroon volg.





(b) Hoeveel swart teëls is daar in die rangskikking wat jy geteken het? ....

(c) Hoeveel swart teëls sal daar in elkeen van die volgende vier rangskikkings wees?

....

NOG IETS OM TE DOEN

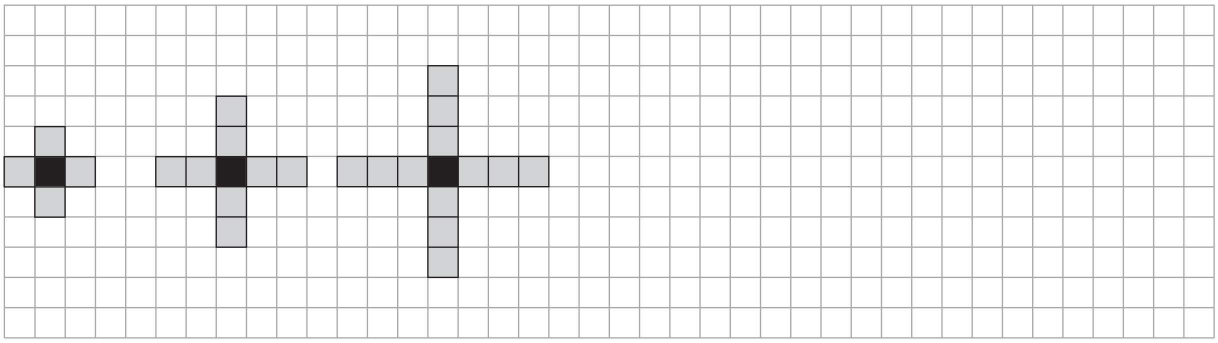
Kyk weer na die rangskikkings in vraag 4. As daar 20 grys teëls in so ’n rangskikking is, hoeveel wit teëls is daar? Skryf jou antwoord in die tabel hier onder in. Voltooi ook die tabel.

Getal grys vierkante	20	36	52			
Getal wit vierkante				256	225	625

6.2 Nog patrone

TEKEN EN ONDERSOEK

1. (a) Teken nog twee rangskikkings van swart en grys vierkante om 'n patroon te maak.



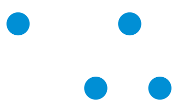
(b) Is daar 'n konstante in jou patroon? Indien wel, wat is die waarde daarvan?

....

(c) Is daar 'n veranderlike in jou patroon? Indien wel, wat is die waardes daarvan?

....

2. (a) Maak nog drie rangskikkings met kolletjies om die ry 1; 3; 6; 10; 15; ... te vorm.



(b) Hoeveel kolletjies sal daar in die sesde en sewende rangskikking wees? Verduidelik.

....

....

....

(c) Hoeveel kolletjies is daar altesaam in rangskikking 1 en 2? ....

(d) Hoeveel kolletjies is daar altesaam in rangskikking 2 en 3? ....

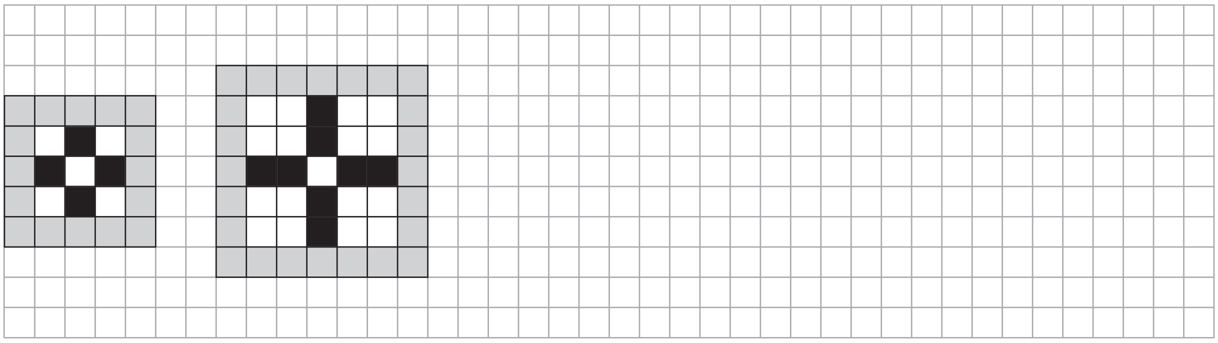
(e) Hoeveel kolletjies is daar altesaam in rangskikking 3 en 4? ....

(f) Hoeveel kolletjies is daar altesaam in rangskikking 4 en 5? ....

(g) Beskryf die patroon in jou antwoorde vir (c), (d), (e) en (f).

....

3. (a) Teken nog twee rangskikkings om 'n patroon te maak.



(b) Wat is die veranderlikes in jou patroon?

....

(c) Die getal swart vierkante is 'n veranderlike in hierdie rangskikkings. Die waarde van hierdie veranderlike is 4 in die eerste rangskikking en 8 in die tweede rangskikking. Wat is die waarde van hierdie veranderlike in die derde rangskikking? ....

(d) Wat is die waardes van elkeen van die veranderlikes in die vyfde rangskikking in jou patroon? Verduidelik jou antwoorde.

....

....

....

4. (a) Maak nou 'n patroon van jou eie.

(b) Gebruik die tabel om die veranderlikes in jou patroon en hul waardes aan te dui.

Rangskikkingnommer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

6.3 Verskillende soorte patrone in getallerye

DOEN DIESELFDE DING HERHAALDELIK

1. (a) Skryf die volgende drie getalle in die rye neer.

Ry A:	5	9	13	17	21	.....	.....	.....
Ry B:	5	10	20	40	80	.....	.....	.....
Ry C:	5	10	17	26	37	.....	.....	.....

(b) Beskryf die verskille in die maniere waarop die drie rye gevorm word.

....

....

....

2. Jy gaan nou 'n ry vorm met die eerste term 5. Skryf 5 aan die linkerkant op die stippellyn hier onder. Tel dan 8 by die eerste term (5) om die tweede term van jou ry te vorm. Skryf die tweede term langs die eerste term (5) neer. Tel nou 8 by die tweede term om die derde term te vorm. Gaan so voort om nog tien terme by te voeg.

Die getalle in 'n ry word ook die **terme** van die ry genoem.

....

'n Ry kan gevorm word deur herhaaldelik dieselfde getal by te tel of af te trek. In hierdie geval is die **verskil** tussen opeenvolgende terme in 'n ry **konstant**.

'n Ry kan ook gevorm word deur herhaaldelik te vermenigvuldig of te deel. In hierdie geval is die **verhouding** tussen opeenvolgende terme **konstant**.

'n Ry kan ook gevorm word op so 'n manier dat nóg die verskil nóg die verhouding tussen opeenvolgende terme konstant is.

Om nog terme van ry A in vraag 1(a) neer te skryf, het jy **herhaaldelik** 4 **bygetel**.

Om nog terme van ry B in vraag 1(a) neer te skryf, het jy **herhaaldelik** met 2 **vermenigvuldig**.

Om nog terme van ry C in vraag 1(a) neer te skryf, het jy nie elke keer dieselfde getal bygetel of met dieselfde getal vermenigvuldig nie.

3. Skryf die volgende drie terme van elke ry neer. Beskryf in elke geval ook wat die patroon is, byvoorbeeld "daar is 'n konstante verskil van –5 tussen opeenvolgende terme".
   (a) 100; 92; 84; 76; ....

   ....

   ....
   (b) 1; 4; 9; 16; ....

   ....

   ....
   (c) 2; 8; 18; 32; ....

   ....

   ....
   (d) 3; 6; 11; 18; ....

   ....

   ....
   (e) 640; 320; 160; ....

   ....

   ....
   (f) 1; 2; 4; 7; 11; ....

   ....

   ....

4. Volg elke keer die instruksie om 'n ry met agt terme te vorm.
   (a) Begin met 1 en vermenigvuldig herhaaldelik met 2.

   ....
   (b) Begin met 256 en trek herhaaldelik 32 af.

   ....
   (c) Begin met 256 en deel herhaaldelik deur 2.

   ....

Die ry wat jy in vraag 2 gevorm het, kan met 'n tabel soos hierdie getoon word:

Termnommer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Termwaarde	5	13	21	29	37	45	53	61	69	77

5. Vorm 'n ry deur die instruksie te volg. Skryf die termnommers en die termwaardes in die gegewe tabel.
   (a) Term 1 = 10. Tel herhaaldelik 15 by.

Termnommer							
Termwaarde							

   (b) Term 1 = 10. Termwaarde = 15 × termnommer – 5.

Termnommer							
Termwaarde							

   (c) Term 1 = 10. Vermenigvuldig herhaaldelik met 2.

Termnommer						
Termwaarde						

   (d) Term 1 = 20. Termwaarde = $10 \times 2^{\text{termnommer}}$

Termnommer						
Termwaarde						

   (e) Term 1 = 10. Termwaarde = $10 \times 2^{\text{termnommer} - 1}$

Termnommer						
Termwaarde						

   (f) **Term 4** = 30. Tel herhaaldelik 5 by.

Termnommer							
Termwaarde							

6. Instruksies om 'n getallery te vorm is op twee verskillende maniere gegee in vraag 5. Hoe sal jy die twee verskillende maniere beskryf om instruksies te gee om 'n getallery te vorm?

....

....

6.4 Formules vir getallerye

Die formule vir ’n getallery kan op twee verskillende maniere geskryf word:

- ’n Beskrywing van die **verband tussen opeenvolgende terme**. Met ander woorde, die berekeninge wat jy met ’n term doen om die volgende term te verkry, soos in vraag 5(a), (c) en (f) op die vorige bladsy. Die eerste (of ’n ander) term moet gegee word. Hierdie soort formule het twee dele, die eerste term en die verband tussen terme.
- ’n Beskrywing van die **verband tussen die waarde van die term en sy posisie in die ry**. Hierdie verband beskryf die berekeninge wat **met die termnommer** gedoen kan word om die **termwaarde** te verkry, soos in vraag 5(b), (d) en (e) op die vorige bladsy.

SKRYF TWEE FORMULES VIR DIESELFDE RY

1. Kies enige heelgetal kleiner as 10 as die eerste term van ’n ry.
   (a) Gebruik die eerste term wat jy gekies het en vorm ’n ry deur herhaaldelik 5 by te tel.

   ....

   (b) Vermenigvuldig elke termnommer hier onder met 5 om ’n ry te vorm.

Termnommer	1	2	3	4	5	6	7	8
Termwaarde								

   (c) Wat is eenders aan die twee rye wat jy gevorm het?

   ....

   (d) Vul nou jou eie ry in dieselfde tabel in:

Termnommer	1	2	3	4	5	6	7	8
Termwaarde in (b)								
Termwaarde van jou eie ry in (a)								

(e) Wat moet jy by elke termwaarde in (b) bytel of daarvan aftrek om dieselfde ry te verkry as die een wat jy in (a) gemaak het?

....

(f) Vul die volgende in om 'n formule vir elke ry neer te skryf:

Vir ry in (b): Termwaarde = ... (termnommer) ....

Vir die ry in (a): Termwaarde = ... (termnommer) ....

2. Jy gaan nou herhaal wat jy in vraag 1 gedoen het, maar met 'n ander stel rye. In hierdie ry word die termnommer met 3 vermenigvuldig om die termwaarde te verkry:

Termnommer	1	2	3	4	5	6	7	8
Termwaarde	3	6	9	12	15	18	21	24

Bepaal nou 'n formule om die verband tussen die **termwaarde** en die **termnommer** vir elkeen van hierdie rye te beskryf:

(a) Die ry wat begin met 8 en gevorm word deur herhaaldelik 3 by te tel

....

....

(b) Die ry wat begin met 12 en gevorm word deur herhaaldelik 3 by te tel

....

....

(c) Die ry wat begin met 2 en gevorm word deur herhaaldelik 3 by te tel

....

....

3. Skryf die eerste agt terme van die volgende rye neer en beskryf hoe elke term uit die vorige term bereken kan word.

(a) Termwaarde = 10 × termnommer + 5

Termnommer	1	2	3	4	5	6	7	8
Termwaarde								

....

(b) Termwaarde = 5 × termnommer – 3

Termnommer	1	2	3	4	5	6	7	8
Termwaarde								

....

4. Skryf vir elke ry 'n formule neer om elke term uit die vorige term te verkry en probeer ook 'n formule skryf wat elke term koppel aan sy posisie in die ry. Kontroleer elke formule deur dit toe te pas en skryf die resultate in die gegewe tabel.

(a) 7 11 15 19 23 27 31 35 39 43

A. Verband tussen opeenvolgende terme: ....

....

B. Verband tussen die termwaarde en die term se posisie in die ry: ....

....

Termnommer	1	2	3	4	5
Termwaarde deur A te gebruik					
Termwaarde deur B te gebruik					

(b) 60 57 54 51 48 45 42 39 36

A. Verband tussen opeenvolgende terme: ....

....

B. Verband tussen termwaarde en sy posisie in ry: ....

....

Termnommer	1	2	3	4	5
Termwaarde deur A te gebruik					
Termwaarde deur B te gebruik					

(c) 1 2 4 8 16 32 64 128

A. Verband tussen opeenvolgende terme: ....

....

B. Verband tussen termwaarde en sy posisie in ry: ....

....

Termnommer	1	2	3	4	5
Termwaarde deur A te gebruik					
Termwaarde deur B te gebruik					

HOOFSTUK 7
Funksies en verbande

In hierdie hoofstuk gaan jy met verbande werk tussen versamelings getalle wat invoergetalle en uitvoergetalle genoem word. Jy gaan die uitvoergetalle bepaal wat met gegewe invoergetalle ooreenstem, en andersom. Jy gaan reëls gebruik om die uitvoergetalle te bereken, en jy gaan vergelykings oplos om die invoergetalle te bepaal. Die reëls om die uitvoergetalle te bereken kan in woorde, as vloeidiagramme of as formules gegee word.

-10	100	-19	-36	-51	-64	-75	-84	-91
-9	81	-17	-32	-45	-56	-65	-72	-77
-8	64	-15	-28	-39	-48	-55	-60	-63
-7	49	-13	-24	-33	-40	-45	-48	-49
-6	36	-11	-20	-27	-32	-35	-36	-35
-5	25	-9	-16	-21	-24	-25	-24	-21
-4	16	-7	-12	-15	-16	-15	-12	-7
-3	9	-5	-8	-9	-8	-5	0	7
-2	4	-3	-4	-3	0	5	12	21
-1	1	-1	0	3	8	15	24	35
0	0	1	4	9	16	25	36	49
1	1	3	8	15	24	35	48	63
2	4	5	12	21	32	45	60	77
3	9	7	16	27	40	55	72	91
4	16	9	20	33	48	65	84	105
5	25	11	24	39	56	75	96	119
6	36	13	28	45	64	85	108	133
7	49	15	32	51	72	95	120	147
8	64	17	36	57	80	105	132	161
9	81	19	40	63	88	115	144	175
10	100	21	44	69	96	125	156	189

7 Funksies en verbande

7.1 Bepaal uitvoergetalle vir gegewe invoergetalle

TWEE VERSKILLENDE VERSAMELINGS INVOERGETALLE

In hierdie aktiwiteit gaan jy berekeninge doen met:

Versameling A: die natuurlike getalle kleiner as 10, dit wil sê die getalle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9.

Versameling B: veelvoude van 10 wat groter is as 10 maar kleiner as 100, dit wil sê die getalle 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 en 90.

1. Jy gaan 'n getal kies, dit met 5 vermenigvuldig en dan die antwoord van 50 aftrek.

   (a) Kies enige getal uit versameling A en doen die berekeninge hier bo.

   ....

   (b) Kies enige getal uit versameling B en doen die berekeninge hier bo.

   ....

   (c) As jy enige ander getal uit versameling B kies, dink jy die antwoord sal ook 'n negatiewe getal wees?

   ....

   ....

2. (a) Skryf al die verskillende uitvoergetalle neer wat verkry sal word as die stel berekeninge 50 – 5x op die verskillende getalle in versameling A uitgevoer word.

   Uitvoergetalle is getalle wat jy kry wanneer jy die reël op die invoergetalle toepas.

   ....

   ....

   (b) Skryf die uitvoergetalle neer wat verkry sal word wanneer die stel berekeninge 50 – 5x op versameling B toegepas word.

   ....

   ....

3. (a) Voltooi die volgende tabel vir versameling A:

Invoergetalle	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Waardes van $50 - 5x$									

(b) Voltooi die volgende tabel vir versameling B:

Invoergetalle	20	30	40	50	60	70	80	90
Waardes van $50 - 5x$								

4. In hierdie vraag is jou versameling invoergetalle die ewe getalle 2; 4; 6; 8; 10; . . .

(a) Wat sal al die uitvoergetalle wees as die rekenvoorskrif $2n + 1$ op die versameling ewe getalle toegepas word? Maak 'n lys.

....

....

(b) Wat sal die uitvoergetalle wees as die rekenvoorskrif $2n - 1$ toegepas word?

....

(c) Wat sal die uitvoergetalle wees as die rekenvoorskrif $2n + 5$ toegepas word?

....

(d) Wat sal die uitvoergetalle wees as die rekenvoorskrif $3n + 1$ toegepas word?

....

5. (a) Watter soort uitvoergetalle sal verkry word as die rekenvoorskrif $x - 1\,000$ op natuurlike getalle kleiner as 1 000 toegepas word?

....

(b) Watter soort uitvoergetalle sal verkry word as die rekenvoorskrif $\frac{x}{10} + 10$ op natuurlike getalle kleiner as 10 toegepas word?

....

....

(c) As jy die reël $30x + 2$ gebruik en invoergetalle gebruik wat positiewe breuke met noemers 2, 3 en 5 is, watter soort uitvoergetalle sal jy kry?

....

....

7.2 Verskillende maniere om dieselfde verband voor te stel

Dink terug aan die werk wat jy in afdeling 6.4 van hoofstuk 6 gedoen het. Daar was twee veranderlike hoeveelhede in elke vraag.

'n Hoeveelheid wat verander word 'n **veranderlike hoeveelheid** of net 'n **veranderlike** genoem.

As een veranderlike hoeveelheid deur 'n ander een beïnvloed word, sê ons daar is 'n **verband** tussen die twee veranderlikes. Jy kan soms uitwerk watter getal aan 'n spesifieke waarde van die ander veranderlike gekoppel is.

'n Algebraïese uitdrukking soos $10x + 5$ beskryf watter berekeninge gedoen moet word om die uitvoergetal te bepaal wat met 'n gegewe invoergetal ooreenstem.

Die uitvoergetal kan ook die **uitvoerwaarde**, of die **waarde van die uitdrukking**, wat $10x + 5$ in hierdie geval is, genoem word.

Toepassing van die rekenvoorskrif $10x + 5$ gee net een uitvoergetal vir enige invoergetal en dit is baie duidelik wat daardie getal is. As die rekenvoorskrif byvoorbeeld op $x = 3$ toegepas word, is die uitvoergetal 35.

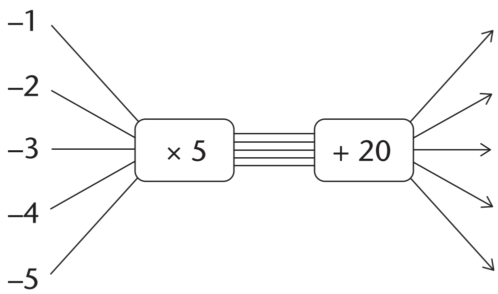
'n Verband tussen twee veranderlikes waarin daar net een uitvoergetal vir elke invoergetal is, word 'n **funksie** genoem.

Funksies kan op verskillende maniere voorgestel word:

- Met 'n tabel wat die waardes van die twee veranderlikes wys. 'n Tabel wys duidelik watter waarde van die uitvoerveranderlike ooreenstem met elke bepaalde waarde van die invoerveranderlike.
- Met 'n vloeidiagram, wat wys watter berekeninge gedoen moet word om die uitvoergetal te bereken wat met 'n gegewe invoergetal ooreenstem.
- Met 'n formule, wat ook beskryf watter berekeninge gedoen moet word om die uitvoergetal te bereken wat met 'n gegewe invoergetal ooreenstem.
- Met 'n grafiek.

Voorbeelde van hierdie vier maniere om 'n funksie te beskryf word op die volgende bladsye gegee.

1. Voltooi die vloeidiagram:



’n Voltooide vloeidiagram wys twee soorte inligting:

- Dit wys watter berekeninge gedoen word om die uitvoergetalle te lewer.
- Dit wys watter uitvoergetal aan watter invoergetal gekoppel is.

Die vloeidiagram wat jy voltooi het wys die volgende inligting:

- Dit wys dat elke invoergetal met 5 vermenigvuldig word en dan word 20 bygetel om die uitvoergetalle te lewer.
- Dit wys watter uitvoergetalle met watter invoergetalle ooreenstem.

Die berekeninge wat gedoen moet word kan ook met ’n uitdrukking beskryf word. Die uitdrukking $5x + 20$ beskryf watter berekeninge jy in vraag 1 gedoen het. Jy kan dit ook as ’n formule skryf:

- ’n Woordformule:
  uitvoergetal = 5 × invoergetal + 20
- ’n Algebraïese formule:
  uitvoergetal = $5x + 20$

Die uitvoergetalle van ’n funksie word ook **funksiewaardes** genoem. Die formule kan dus ook geskryf word as
funksiewaarde = $5x + 20$

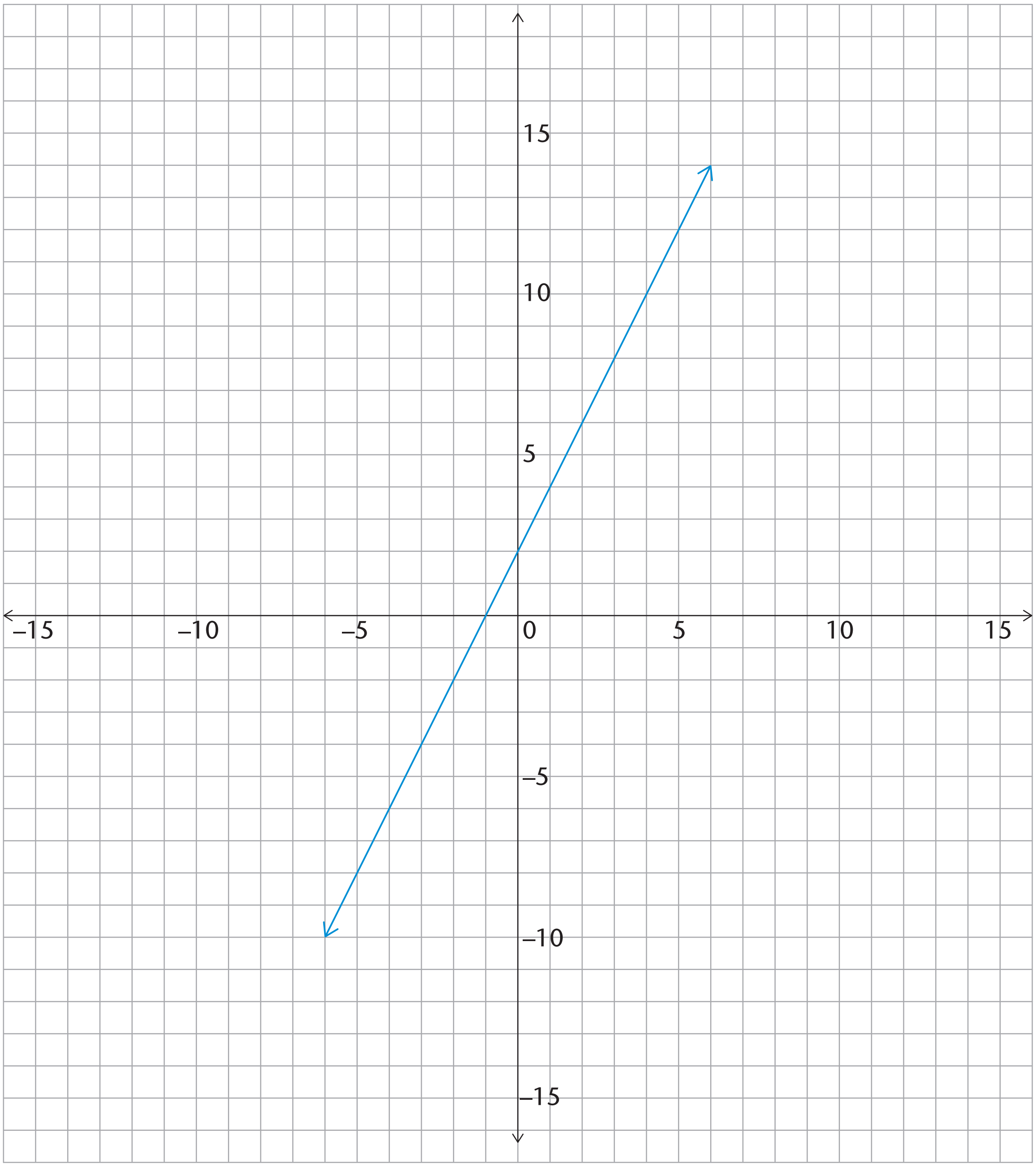
2. Voltooi hierdie tabel vir die funksie wat deur $5x + 20$ beskryf word.

Invoergetalle	–1	–2	–3	–4	–5
Funksiewaardes					

3. Teken ’n grafiek van hierdie funksie op die volgende bladsy.

4. ’n Grafiek van ’n bepaalde funksie word hier onder gegee. Voltooi die tabel vir hierdie funksie.

Invoergetalle					
Funksiewaardes					



Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 106 2014/07/03 09:34:59 AM

7.3 Verskillende voorstellings van dieselfde verband

Doen hierdie werk op die volgende bladsye. Daar is 'n bladsy vir elke vraag.

Stel elk van die volgende funksies voor met
(a) 'n vloeidiagram
(b) 'n tabel van waardes vir die versameling heelgetalle van –5 tot 5
(c) 'n grafiek.

1. Die verband wat beskryf word deur die uitdrukking $3x + 4$

2. Die verband wat beskryf word deur die uitdrukking $2x - 5$

3. Die verband wat beskryf word deur die uitdrukking $\frac{1}{2}x + 2$

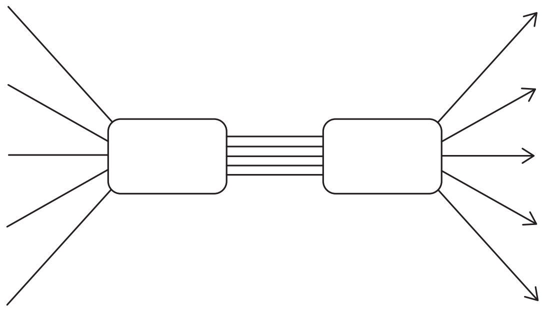
4. Die verband wat beskryf word deur die uitdrukking $-3x + 4$

5. Die verband wat beskryf word deur die uitdrukking $2{,}5x + 1{,}5$

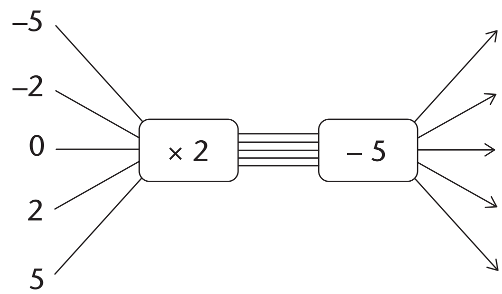
6. Die verband wat beskryf word deur die uitdrukking $0{,}2x + 1{,}4$

7. Die verband wat beskryf word deur die uitdrukking $-2x - 4$

1.

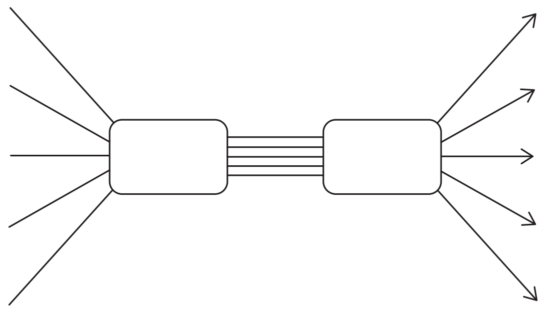


2.

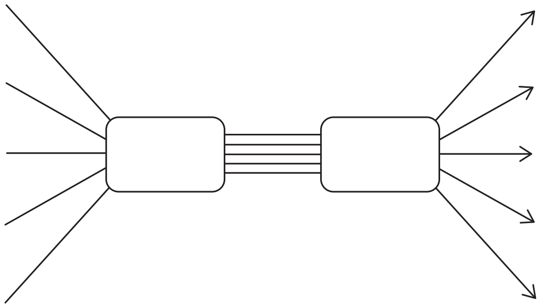


Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 109 2014/07/03 09:35:00 AM

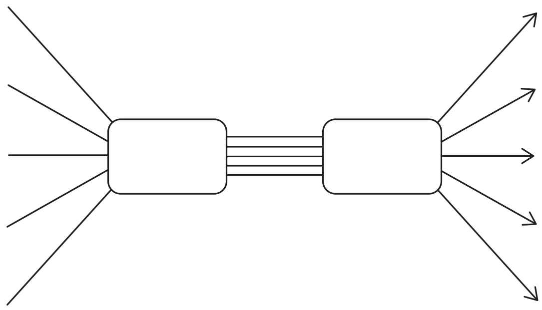
3.



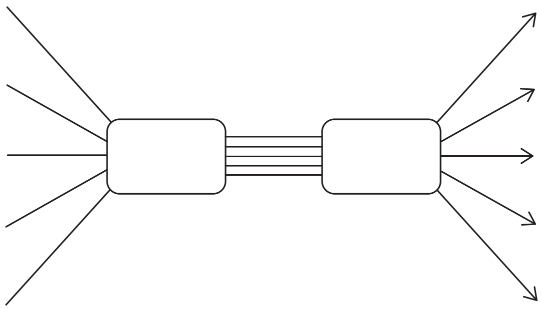
4.



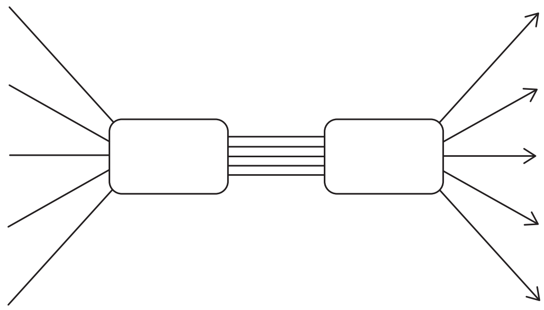
5.



6.



7.



Hoofstuk 8
Algebraïese uitdrukkings

’n Algebraïese uitdrukking is ’n beskrywing van ’n stel bewerkings wat in ’n bepaalde volgorde gedoen moet word. In hierdie hoofstuk gaan jy leer om ’n ander stel bewerkings te spesifiseer wat dieselfde resultate as ’n gegewe stel bewerkings sal lewer. Twee verskillende uitdrukkings wat dieselfde resultate lewer word ekwivalente uitdrukkings genoem.

8 Algebraïese uitdrukkings

8.1 Algebraïese taal

WOORDE, DIAGRAMME EN UITDRUKKINGS

1. Voltooi hierdie tabel.

	Woorde	Vloeidiagram	Uitdrukking
	Vermenigvuldig 'n getal met 5 en trek dan 3 van die antwoord af.	→ $\boxed{\times 5}$ → $\boxed{-3}$ →	$5x - 3$
(a)	Tel 5 by 'n getal en vermenig-vuldig die antwoord met 3.	→ $\boxed{}$ → $\boxed{}$ →	
(b)		→ $\boxed{-3}$ → $\boxed{\times 5}$ →	
(c)			$3(2x + 3)$

'n **Algebraïese uitdrukking** dui **'n opeenvolging van bewerkings** aan wat ook in woorde en, in sommige gevalle, met vloeidiagramme beskryf kan word.

Uitdrukkings in hakies moet altyd eerste bereken word. As daar nie hakies in 'n algebraïese uitdrukking is nie, beteken dit dat vermenigvuldiging en deling eerste gedoen moet word, en optelling en aftrekking daarna.

Byvoorbeeld, as $x = 5$ beteken die uitdrukking $12 + 3x$ "vermenigvuldig 5 met 3 en tel dan 12 by". Dit beteken *nie* "tel 12 en 3 bymekaar en vermenigvuldig dan met 5" nie.

As jy wil sê "tel 12 en 3 bymekaar en vermenigvuldig dan met 5", moet die numeriese uitdrukking $5 \times (12 + 3)$ of $(12 + 3) \times 5$ wees.

2. Beskryf elk van hierdie reekse berekeninge met 'n algebraïese uitdrukking:
   (a) Vermenigvuldig 'n getal met 10, trek 5 van die antwoord af en vermenigvuldig die antwoord met 3.

   ....

   (b) Trek 5 van 'n getal af, vermenigvuldig die antwoord met 10 en vermenigvuldig hierdie antwoord met 3.

   ....

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 117 2014/07/03 09:35:02 AM

3. Evalueer elkeen van hierdie uitdrukkings vir $x = 10$:

(a) $200 - 5x$ ....

(b) $(200 - 5)x$ ....

(c) $5x + 40$ ....

(d) $5(x + 40)$ ....

(e) $40 + 5x$ ....

(f) $5x + 5 \times 40$ ....

'N PAAR WOORDE WAT ONS IN ALGEBRA GEBRUIK

'n Uitdrukking met net een term, soos $3x^2$, word 'n **eenterm** genoem. 'n Uitdrukking wat 'n som van twee terme is, soos $5x + 4$, word 'n **tweeterm** genoem. 'n Uitdrukking wat 'n som van drie terme is, soos $3x^3 + 2x + 9$, word 'n **drieterm** genoem.

Die simbool x word dikwels gebruik om die **veranderlike** in 'n algebraïese uitdrukking voor te stel, maar ander lettersimbole kan ook gebruik word. In die eenterm $3x^2$, word die 3 die **koëffisiënt** van x^2 genoem. In die tweeterm $5x + 4$ en in die drieterm $3x^2 + 2x + 9$ word die getalle 4 en 9 **konstantes** genoem.

1. Gebruik die voltooide eerste ry as 'n voorbeeld en voltooi die tabel.

Uitdrukking	Soort uitdrukking	Simbool wat die veranderlike voorstel	Konstante	Koëffisiënt van
$x^2 + 6x + 10$	Drieterm	x	10	die tweede term is 6
$6s^3 + s^2 + 5$				s^2 is ......
$\frac{k}{3} + 12$				die eerste term is
$4p^{10}$				p^{10} is ......

2. Kyk na die patroon-veelterm wat met $7x^5 + 5x^4 + 3x^3 + x^2 + \ldots$ begin.

(a) Wat is die koëffisiënt van die vierde term? ....

(b) Wat is die eksponentwaarde van die vyfde term? ....

(c) Dink jy die sesde term sal 'n konstante wees? Waarom? ....

....

EKWIVALENTE ALGEBRAÏESE UITDRUKKINGS

1. Bereken die numeriese waarde van die uitdrukkings vir die verskillende waardes van x. Doen die berekeninge in jou oefeningboek. Vul dan jou antwoorde in.

	x	-2	-1	0	1	2
(a)	$3x + 2$					
(b)	$2x - 3$					
(c)	$3x + 2 + 2x - 3$					
(d)	$2x - 3 + 3x + 2$					
(e)	$5x - 1$					
(f)	$(3x + 2)(2x - 3)$					
(g)	$3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$					
(h)	$6x^2 - 5x - 6$					
(i)	$\frac{(3x+2)(2x-3)}{3x+2}$					
(j)	$\frac{6x^2-5x-6}{3x+2}$					

2. Maak 'n lys van al die algebraïese uitdrukkings hier bo wat dieselfde numeriese waarde vir dieselfde waarde van x het, al lyk hulle verskillend:

....

....

....

Ekwivalente uitdrukkings is algebraïese uitdrukkings wat uit verskillende stelle van bewerkings bestaan, maar dieselfde numeriese waarde vir enige gegewe waarde van x het.

Dit is dikwels gerieflik om nie met ’n gegewe uitdrukking te werk nie, maar dit met ’n ekwivalente uitdrukking te **vervang**.

3. Voltooi hierdie tabel.

x	2	3	5	10	–5	–10
$12x - 7 + 3x + 10 - 5x$						

4. Voltooi hierdie tabel.

x	2	3	5	10	–5	–10
$10x + 3$						

5. (a) Is $10x + 3$ ekwivalent aan $12x - 7 + 3x + 10 - 5x$? Verduidelik jou antwoord.

....

....

....

(b) Gestel jy moet weet hoeveel $12x - 7 + 3x + 10 - 5x$ vir $x = 37$ en $x = -43$ is. Wat dink jy is die maklikste manier om dit uit te vind? ....

....

KONVENSIES OM ALGEBRAÏESE UITDRUKKINGS TE SKRYF

Hier is ’n paar dinge waaroor wiskundiges ooreengekom het. Dit maak wiskundige werk baie makliker as almal by hierdie ooreenkomste hou.

’n **Konvensie** is iets waaroor mense ooreengekom het om op dieselfde manier te doen.

Die vermenigvuldigteken word dikwels in algebraïese uitdrukkings weggelaat. Ons skryf gewoonlik $4x$ in plaas van $4 \times x$ en $4(x - 5)$ in plaas van $4 \times (x - 5)$.

’n Verdere konvensie is om ’n bekende getal eerste te skryf in ’n produk, dit wil sê ons skryf $3 \times x$ in plaas van $x \times 3$, en ons skryf $3x$ **maar nie** $x3$ nie.

1. Skryf elk van die volgende oor op die manier waarop dit gewoonlik in algebraïese uitdrukkings geskryf word.

(a) $x \times 4 + x \times y - y \times 3$

(b) $7 \times (10 - x) + (5 \times x + 3)10$

....

Mense oral in die wêreld het ooreengekom dat, in uitdrukkings wat nie hakies bevat nie, optel en aftrek gedoen moet word soos dit van links na regs in die uitdrukking voorkom.

Volgens hierdie konvensie beteken $x - y + z$ dat jy eers y van x moet aftrek en dan z moet bytel. Byvoorbeeld, as $x = 10$, $y = 5$ en $z = 3$, is $x - y + z$ dus $10 - 5 + 3$ en dit beteken $10 - 5 = 5$, dan $5 + 3 = 8$. Dit beteken nie $5 + 3 = 8$, dan $10 - 8 = 2$ nie.

2. Bereken $50 - 20 + 30$ en $50 + 30 - 20$ en $50 - 30 + 20$.

....

3. Evalueer elk van die volgende uitdrukkings vir $x = 10$, $y = 5$ en $z = 2$.

(a) $x + y - z$

....

(b) $x - z + y$

....

(c) $10y - 3x + 5z - 4y$

....

(d) $10y - 3x - 5z + 4y + 3x$

....

Mense het ook ooreengekom dat **vermenigvuldiging** (en deling) **voor optel en aftrek** gedoen moet word in uitdrukkings wat nie hakies bevat nie.

Dus moet $5 + 3 \times 4$ verstaan word as "vermenigvuldig 4 met 3 en tel dan die antwoord by 5" en nie as "tel 5 en 3 bymekaar en vermenigvuldig dan die antwoord met 4" nie.

Dus moet $3 \times 4 + 5$ ook verstaan word as "vermenigvuldig 4 met 3 en tel dan 5 by die antwoord" en nie as "tel 4 en 5 bymekaar en vermenigvuldig dan die antwoord met 3" nie.

4. Doen elk van die volgende berekeninge:

(a) vermenigvuldig 4 met 3 en tel dan 5 by die antwoord

....

(b) tel 4 en 5 bymekaar en vermenigvuldig die antwoord met 3

....

(c) vermenigvuldig 4 met 3 en tel dan die antwoord by 5

....

(d) tel 5 en 3 bymekaar en vermenigvuldig dan die antwoord met 4

....

5. Herskryf die instruksies in 4(a) en 4(c) sonder om woorde te gebruik.

....

....

6. Bereken elk van die volgende.

(a) $10 \times 5 + 30$ (b) $30 + 10 \times 5$

....

(c) $10 \times 5 - 30$ (d) $30 - 10 \times 5$

....

7. (a) Tel 4 en 5 bymekaar en trek dan die antwoord van 20 af.

....

(b) Trek 4 van 20 af en tel dan 5 by.

....

(c) Tel 4 en 5 bymekaar en vermenigvuldig dan die antwoord met 3.

....

(d) Vermenigvuldig 3 met 5 en tel dan die antwoord by 4.

....

As ons die berekeninge in 7(a) en 7(c) wil spesifiseer sonder om woorde te gebruik, het ons 'n paar uitdagings.

Ons kan nie $20 - 4 + 5$ vir "*tel 4 en 5 bymekaar en trek dan die antwoord van 20 af*" skryf nie, want dit sal "*trek 4 van 20 af en tel dan 5 by*" beteken. Ons het 'n manier nodig, sonder om woorde te gebruik, om in hierdie geval aan te dui dat ons eers wil optel en daarna wil aftrek.

Net so kan ons nie $4 + 5 \times 3$ vir "*tel 4 en 5 bymekaar en vermenigvuldig die antwoord met 3*" skryf nie, want dit sal "*vermenigvuldig 3 met 5 en tel dan die antwoord by 4*" beteken. Ons het 'n manier nodig, sonder om woorde te gebruik, om in hierdie geval aan te dui dat ons wil hê die optelling moet voor die vermenigvuldiging gedoen word.

Wiskundiges het ooreengekom om hakies te gebruik om die uitdagings hier bo aan te spreek. Die volgende konvensie word oral in die wêreld gebruik:

> Elke keer as daar hakies in 'n uitdrukking is, moet die berekeninge tussen hakies eerste gedoen word.

Dus beteken $20 - (4 + 5)$ tel 4 en 5 bymekaar en trek dan die antwoord van 20 af, maar $20 - 4 + 5$ beteken trek 4 van 20 af en tel dan 5 by.

$(4 + 5) \times 3$ of $3 \times (4 + 5)$ beteken *tel 4 en 5 bymekaar en vermenigvuldig dan die antwoord met 3*, maar $4 + 5 \times 3$ beteken *vermenigvuldig 3 met 5 en tel dan die antwoord by 4*.

$10 + 2(5 + 9)$ beteken *tel 5 en 9 bymekaar, vermenigvuldig die antwoord met 2 en tel dan hierdie antwoord by 10*: $5 + 9 = 14$ $14 \times 2 = 28$ $28 + 10 = 38$

8. Bereken elk van die volgende.

(a) $100 + 50 - 30$

....

(b) $100 + (50 - 30)$

....

(c) $100 - 50 + 30$

....

(d) $100 - (50 + 30)$

....

(e) $3(10 - 4) + 2$

....

(f) $10(5 + 7) + 3(18 - 8)$

....

(g) $250 - 10 \times (18 + 2) + 35$

....

(h) $(20 + 20) \times (20 - 10)$

....

(i) $(250 - 10) \times (18 + 2) + 35$

....

(j) $20 + 20 \times (20 - 10)$

....

(k) $200 + (100 \times 2(15 + 5))$

....

(l) $(200 + 100) \times 2 \times 15 + 5$

....

In algebra skryf ons gewoonlik $3(x + 2y)$ in plaas van $(x + 2y) \times 3$, en ons skryf $3(x - 2y)$ in plaas van $(x - 2y) \times 3$. Jy moenie toelaat dat hierdie konvensionele manier van skryf in algebra jou verwar nie. Die uitdrukking $3(x + 2y)$ beteken nie dat vermenigvuldiging met 3 die eerste ding is wat jy moet doen wanneer jy die uitdrukking vir sekere waardes van x en y evalueer nie. Die eerste ding wat jy moet doen, is om die waardes van x en y bymekaar te tel. Dit is wat die hakies vir jou sê!

Om die instruksies $3(x + 2y)$ uit te voer is egter nie die enigste manier waarop jy kan uitvind hoeveel $3(x + 2y)$ vir enige gegewe waardes van x en y is nie. In plaas daarvan om $3(x + 2y)$ uit te werk, kan jy $3x + 6y$ uitwerk. In hierdie geval sal jy elke term vermenigvuldig voordat jy hulle bymekaartel.

9. Evalueer elk van die volgende uitdrukkings vir $x = 10$, $y = 5$ en $z = 2$.

(a) $xy + z$

....

(b) $x(y + z)$

....

(c) $x + yz$

(d) $xy + xz$

....

....

(e) $xy - z$

(f) $x(y - z)$

....

....

(g) $x - yz$

(h) $xy - yz$

....

....

(i) $x + (y - z)$

(j) $x - (y - z)$

....

....

(k) $x - (y + z)$

(l) $x - y - z$

....

....

(m) $x + y - z$

(n) $x - y + z$

....

....

8.2 Eienskappe van bewerkings

1. Bereken die volgende:

(a) $5(3 + 4)$

(b) $5 \times 3 + 5 \times 4$

....

....

(c) $6 \times 3 + (4 + 6)$

(d) $(6 + 4) + 3 \times 6$

....

....

(e) $3 \times (4 \times 5)$

(f) $(3 \times 4) \times 5$

....

....

Jy moes raakgesien het dat die resultate in elke ry dieselfde is. Dit is omdat bewerkings met getalle sekere eienskappe het, naamlik die **verspreidingseienskap** (of **distributiewe eienskap**), die **omruilingseienskap** (of **kommutatiewe eienskap**) en die **groeperingseienskap** (of **assosiatiewe** eienskap).

Die **verspreidingseienskap** (of distributiewe eienskap) word gebruik elke keer wat jy 'n getal in dele vermenigvuldig, byvoorbeeld:

Die getal vier-en-dertig is eintlik 30 + 4. Jy kan 5 × 34 bereken deur 5 × 30 en 5 × 4 te bereken en dan die twee antwoorde bymekaar te tel:

$$5 \times 34 = 5 \times 30 + 5 \times 4$$

Die woord "distribueer" beteken om te **versprei**. Die verspreidingseienskap kan soos volg beskryf word:

$a(b + c) = ab + ac$

waar a, b en c enige getalle kan wees.

Ons kan sê: "vermenigvuldiging versprei oor optel".

2. Bereken elk van die volgende:

(a) $5(x - y)$ vir $x = 10$ en $y = 8$

....

(b) $5x - 5y$ vir $x = 10$ en $y = 8$

....

(c) $5(x - y)$ vir $x = 100$ en $y = 30$

....

(d) $5x - 5y$ vir $x = 100$ en $y = 30$

....

(e) $5(x - y + z)$ vir $x = 10, y = 3, z = 2$

....

(f) $5x - 5y + 5z$ vir $x = 10, y = 3, z = 2$

....

3. Ons sê "vermenigvuldiging versprei oor optel".
Versprei vermenigvuldiging oor aftrek ook?
Gee voorbeelde om jou antwoord te staaf.

....

....

Vir enige waardes van x en y,

- gee $x + y$ en $y + x$ dieselfde antwoorde, en
- gee xy en yx dieselfde antwoorde.

Dit word die **omruilingseienskap** (of **kommutatiewe eienskap**) van optel en vermenigvuldiging genoem.

4. Ons sê "optel is kommutatief" en "vermenigvuldiging is kommutatief".
Is aftrek ook kommutatief? Staaf jou antwoord met 'n voorbeeld.

....

Die **groeperingseienskap** (of **assosiatiewe eienskap**) stel jou in staat om drie of meer getalle in enige volgorde te rangskik wanneer jy optel of vermenigvuldig. Vir enige waardes van x, y en z het die volgende uitdrukkings almal dieselfde antwoord:

$x + y + z$ $\qquad$ $y + x + z$ $\qquad$ $z + y + x$

5. Bereken 16 + 33 + 14 + 17 op die maklikste moontlike manier.

....

Die groeperingseienskap van vermenigvuldiging stel jou in staat om iets soos die volgende te vereenvoudig.

$abc + bca + cba$

Omdat die volgorde van vermenigvuldiging nie die resultaat verander nie, kan ons hierdie uitdrukking herskryf as: $abc + abc + abc$. Ons kan dit vereenvoudig deur gelyksoortige terme te kombineer om $3abc$ te kry.

Jy sal hierdie eienskappe dwarsdeur hierdie hoofstuk kan gebruik en wanneer jy algebraïese manipulasies doen.

Wanneer jy 'n uitdrukking vorm om ekwivalent te wees aan 'n gegewe uitdrukking sê ons dat jy die uitdrukking *manipuleer*.

6. Vervang elk van die volgende uitdrukkings met 'n eenvoudiger uitdrukking wat dieselfde antwoord sal gee. **Moenie nou enige berekeninge doen nie.** Sê net elke keer hoe jou vervanging dit makliker maak.

(a) $17 \times 43 + 17 \times 57$

....

....

(b) $7 \times 5 \times 8 \times 4 + 12 \times 8 \times 4 \times 7 - 9 \times 4 \times 5 \times 8$

....

....

(c) $43 \times 17 + 57 \times 17$

....

....

(d) $43x + 57x$ (vir $x = 213$ of enige ander waarde)

....

....

7. Watter eienskappe van bewerkings het jy in elke deel van vraag 6 gebruik?

....

....

8.3 Kombineer gelyksoortige terme in algebraïese uitdrukkings

HERRANGSKIK TERME EN KOMBINEER DAN GELYKSOORTIGE TERME

Om te kontroleer of twee uitdrukkings dalk ekwivalent is, kan jy albei uitdrukkings vir verskeie verskillende waardes van die veranderlike evalueer.

1. Voorspel in elke geval hier onder eers of die twee uitdrukkings ekwivalent is en kontroleer dan deur albei uitdrukkings vir $x = 1$, $x = 10$, $x = 2$ en $x = -2$ in die tabelle te evalueer.

   (a) $x(x + 3)$ en $x^2 + 3$

   (b) $x(x + 3)$ en $x^2 + 3x$

Sommige uitdrukkings kan vereenvoudig word deur die terme te herrangskik en gelyksoortige terme te kombineer. In die uitdrukking $5x^2 + 13x + 7 + 2x^2 - 8x - 12$ is die terme $5x^2$ en $2x^2$ gelyksoortige terme.

> Twee of meer gelyksoortige terme kan gekombineer word om 'n enkele term te vorm.

$5x^2 + 2x^2$ kan met $7x^2$ vervang word, want vir enige waarde van x, byvoorbeeld $x = 2$ of $x = 10$, sal berekening van $5x^2 + 2x^2$ en $7x^2$ dieselfde uitvoerwaarde gee (probeer dit!).

2. Voltooi die tabel.

x	10	2	5	1
$5x^2 + 2x^2$				
$7x^2$				
$13x - 8x$				
$5x$				

Dit is moeilik om die gelyksoortige terme in 'n lang uitdrukking soos byvoorbeeld $3x^2 + 13x + 7 + 2x^2 - 8x - 12$ raak te sien. Gelukkig kan jy die terme in 'n uitdrukking herrangskik sodat die gelyksoortige terme langs mekaar is.

3. (a) Voltooi die tweede en derde rye van die tabel hier onder. Jy sal die volgende twee rye voltooi wanneer jy vraag (g) doen.

x	10	2	5	1
$3x^2 + 13x + 7 + 2x^2 - 8x - 12$				
$3x^2 + 2x^2 + 13x - 8x + 7 - 12$				

(b) Wat sien jy raak? ....

(c) Hoe verskil die een uitdrukking in die tabel hier bo van die ander een?

....

(d) Kombineer die gelyksoortige terme in $3x^2 + 2x^2 + 13x - 8x + 7 - 12$ om 'n korter ekwivalente uitdrukking te maak.

....

(e) Evalueer jou korter uitdrukking vir $x = 10$, $x = 2$ en $x = 5$.

....

....

(f) Is jou korter uitdrukking ekwivalent aan $3x^2 + 13x + 7 + 2x^2 - 8x - 12$? Verduidelik hoe jy weet of dit is, of nie is nie.

....

....

....

(g) Evalueer $5x^2 + 5x - 5$ en $5(x^2 + x - 1)$ vir $x = 10$, $x = 2$, $x = 5$ en $x = 1$, en skryf jou antwoorde in die laaste twee rye van die tabel hier bo.

4. Vereenvoudig elke uitdrukking:

(a) $(3x^2 + 5x + 8) + (5x^2 + x + 4)$

....

(b) $(7x^2 + 3x + 5) + (2x^2 - x - 2)$

....

(c) $(6x^2 - 7x - 4) + (4x^2 + 5x + 5)$

....

(d) $(2x^2 - 5x - 9) - (5x^2 - 2x - 1)$

....

(e) $(-2x^2 + 5x - 3) + (-3x^2 - 9x + 5)$

....

(f) $(y^2 + y + 1) + (y^2 - y - 1)$

....

5. Voltooi die tabel. (Wenk: Maak dit vir jouself makliker deur eers te vereenvoudig!)

....

....

....

....

x	2,5	3,7	6,4	12,9	35	–4,7	–0,04
$(3x + 6{,}5) + (7x + 3{,}5)$							
$(13x - 6) + (26 - 12x)$							

6. Vereenvoudig:

(a) $(2r^2 + 3r - 5) + (7r^2 - 8r - 12)$

....

(b) $(2r^2 + 3r - 5) - (7r^2 - 8r - 12)$

....

(c) $(2x + 5xy + 3y) - (12x - 2xy - 5y)$

....

(d) $(2x + 5xy + 3y) + (12x - 2xy - 5y)$

....

7. Evalueer die volgende uitdrukkings vir $x = 3$, $x = -2$, $x = 5$ en $x = -3$.
   (a) $2x(x^2 - x - 1) + 5x(2x^2 + 3x - 5) - 3x(x^2 + 2x + 1)$

   ....

   ....

   ....

   (b) $(3x^2 - 5x + 7) - (7x^2 + 3x - 5) + (5x^2 - 2x + 8)$

   ....

   ....

   ....

8. Skryf ekwivalente uitdrukkings sonder hakies.
   (a) $3x^4 - (x^2 + 2x)$ ....
   (b) $3x^4 - (x^2 - 2x)$ ....
   (c) $3x^4 + (x^2 - 2x)$ ....
   (d) $x - (y + z - t)$ ....

9. Skryf ekwivalente uitdrukkings sonder hakies, herrangskik sodat gelyksoortige terme saam gegroepeer is, en kombineer dan die gelyksoortige terme.
   (a) $2y^2 + (y^2 - 3y)$ ....
   (b) $3x^2 + (5x + x^2)$ ....
   (c) $6x^2 - (x^4 + 3x^2)$ ....
   (d) $2t^2 - (3t^2 - 5t^3)$ ....
   (e) $6x^2 + 3x - (4x^2 + 5x)$ ....
   (f) $2r^2 - 5r + 7 + (3r^2 - 7r - 8)$ ....
   (g) $5(x^2 + x) + 2(x^2 + 3x)$ ....
   (h) $2x(x - 3) + 5x(x + 2)$ ....

10. Skryf ekwivalente uitdrukkings sonder hakies en vereenvoudig hierdie uitdrukkings sover as moontlik.

    Voorbeeld $5r^2 - 2r(r + 5) = 5r^2 - 2r^2 - 10r$
    $= 3r^2 - 10r$

    (a) $3x^2 + x(x + 3)$ ....
    (b) $5x + x(7 - 2x)$ ....
    (c) $6r^2 - 2r(r - 5)$ ....
    (d) $2a(a + 3) + 5a(a - 2)$ ....

(e) $6y(y + 1) - 3y(y + 2)$

(f) $4x(2x - 3) - 3x(x + 2)$

....

....

(g) $2x^2(x - 5) - x(3x^2 - 2)$

(h) $x(x - 1) + x(2x + 3) - 2x(3x + 1)$

....

....

8.4 Vermenigvuldiging van algebraïese uitdrukkings

VERMENIGVULDIG VEELTERME MET EENTERME

1. (a) Bereken 3×38 en 3×62 en tel die twee antwoorde bymekaar.

....

....

(b) Tel 38 en 62 bymekaar en vermenigvuldig dan die antwoord met 3.

....

(c) As jy nie dieselfde antwoord vir (a) en (b) gekry het nie, het jy 'n fout gemaak. Doen dit weer en weer tot jy dit regkry.

Die feit dat jy dieselfde antwoord in vraag 1(a) en 1(b) kry as jy korrek gewerk het, is 'n voorbeeld van die **verspreidingseienskap**.

Wat jy in vraag 1 gesien het, was dat
$3 \times 100 = 3 \times 38 + 3 \times 62$.

Dit kan ook uitgedruk word deur $3(38 + 62) = 3 \times 38 + 3 \times 62$ te skryf.

Die verspreidingseienskap kan soos volg beskryf word:
$a(b + c) = ab + ac$ en
$a(b - c) = ab - ac$,
waar a, b en c enige getalle kan wees.

2. (a) Bereken 10×56 ....

(b) Bereken $10 \times 16 + 10 \times 40$ ....

3. (a) Skryf enige twee getalle kleiner as 100 neer. Kom ons noem hulle x en y. Tel jou twee getalle bymekaar en vermenigvuldig die antwoord met 3.

....

(b) Bereken $3 \times x$ en $3 \times y$ en tel die twee antwoorde bymekaar.

....

(c) As jy nie dieselfde antwoord vir (a) en (b) kry nie, het jy iewers 'n fout gemaak. Maak jou werk reg.

4. Voltooi die tabel.

x	12	50	5
y	4	30	10
$5x - 5y$			
$5(x - y)$			
$5x + 5y$			
$5(x + y)$			

Om die rekenvoorskrif $5(x + y)$ uit te voer is nie die enigste manier waarop jy kan uitvind wat die waarde van $5(x + y)$ is vir enige gegewe waardes van x en y nie. Jy kan ook $5x + 5y$ gebruik. In hierdie geval sal jy 5 eers met x maal, en dan met y voor jy optel.

5. (a) Vir $x = 10$ en $y = 20$, evalueer $8(x + y)$ deur eers 10 en 20 bymekaar te tel en dan met 8 te vermenigvuldig.

....

(b) Evalueer nou $8(x + y)$ deur $8x + 8y$ te bepaal, met ander woorde bereken eers 8×10 en 8×20.

....

6. In vraag 5 het jy $8(x + y)$ op twee verskillende maniere geëvalueer vir die gegewe waardes van x en y. Evalueer nou ook $20(x - y)$ op twee verskillende maniere vir $x = 5$ en $y = 3$.

....

....

7. Gebruik die verspreidingseienskap in elk van die volgende gevalle om 'n ander uitdrukking te maak wat ekwivalent is aan die gegewe uitdrukking.

(a) $a(b + c)$ (b) $a(b + c + d)$

....

(c) $x(x + 1)$

(d) $x(x^2 + x + 1)$

(e) $x(x^3 + x^2 + x + 1)$

(f) $x^2(x^2 - x + 3)$

Wat jy in hierdie vraag doen word soms "vermenigvuldiging van 'n veelterm met 'n eenterm" genoem.
Jy kan ook sê dat jy elke keer die uitdrukking **uitbrei**, of dat jy 'n ekwivalente uitdrukking in **uitgebreide vorm** skryf.

(g) $2x^2(3x^2 + 2)$

(h) $3x^3(2x^2 + 4x - 5)$

(i) $-2x^4(x^3 - 2x^2 - 4x + 5)$

(j) $a^2b(a^3 - a^2 + a + 1)$

(k) $x^2y^3(3x^2y + xy^2 - y)$

(l) $-2x(x^3 - y^3)$

(m) $2a^2b(3a^2 + 2a^2b^2 + 4b^2)$

(n) $2ab^2(3a^3 - 1)$

8. Brei die dele van elke uitdrukking uit en vereenvoudig. Evalueer dan die uitdrukking vir $x = 5$.

(a) $5(x - 2) + 3(x + 4)$

(b) $x(x + 4) - 4\ (x + 4)$

(c) $x(x - 4) + 4(x - 4)$

(d) $x(x^2 + 3x + 9) - 3(x^2 + 3x + 9)$

(e) $x(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 3x + 9)$

(f) $x^2(x^2 - 3x + 4) - x(x^3 + 4x^2 + 2x + 3)$

9. Skryf in uitgebreide vorm.

(a) $x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$

(b) $x^2y(x^2 - 2xy + y^2) - xy^2(2x^2 - 3xy - y^2)$

....

(c) $ab^2c(b^2c^2 - ac) + b^2c^4(a^2 + abc^2)$

....

(d) $p^2q(pq^2 + p + q) + pq(p - q^2)$

....

KWADRATE EN DERDEMAGTE EN WORTELS VAN EENTERME

1. Evalueer elk van die volgende uitdrukkings vir $x = 2$, $x = 5$ en $x = 10$.

(a) $(3x)^2$

....

(b) $9x^2$

....

(c) $(2x)^2$

....

(d) $4x^2$

....

(e) $(2x)^3$

....

(f) $8x^3$

....

(g) $(2x + 3x)^2$

....

(h) $(10x - 7x)^2$

....

2. Skryf 'n ekwivalente eenterm sonder hakies.

(a) $(5x)^2$

....

(b) $(5x)^3$

....

(c) $(20x)^2$

....

(d) $(10x)^3$

....

(e) $(2x + 7x)^2$

....

(f) $(20x - 13x)^3$

....

Die vierkantswortel van $16x^2$ is $4x$, want $(4x)^2 = 16x^2$.

3. Skryf die vierkantswortel van elk van die volgende uitdrukkings neer.

(a) $\sqrt{(7x)^2}$

....

(b) $\sqrt{9x^2}$

....

(c) $\sqrt{(20x)^2}$

....

(d) $\sqrt{100x^2}$

....

(e) $\sqrt{(20x-15x)^2}$

....

(f) $\sqrt{25x^2}$

....

(g) $\sqrt{(21x-16x)^2}$

....

(h) $\sqrt{(5x)^2}$

....

Die derdemagswortel van $64x^3$ is $4x$, want $(4x)^3 = 64x^3$.

4. Skryf die derdemagswortel van elk van die volgende uitdrukkings neer:

(a) $\sqrt[3]{(7x)^3}$

....

(b) $\sqrt[3]{27x^3}$

....

(c) $\sqrt[3]{(20x)^3}$

....

(d) $\sqrt[3]{1\,000x^3}$

....

(e) $\sqrt[3]{(20x-15x)^3}$

....

(f) $\sqrt[3]{125x^3}$

....

8.5 Deel veelterme deur heelgetalle en eenterme

1. Voltooi die tabel.

x	20	10	5	–5	–10	–20
$(100x - 5x^2) \div 5x$						
$20 - x$						

Kan jy jou waarnemings verduidelik?

....

....

2. (a) R240 prysgeld moet gelykop tussen 20 netbalspelers verdeel word. Hoeveel moet elke speler kry? ....

(b) Mpho het besluit om die volgende berekeninge te doen: $(140 \div 20) + (100 \div 20)$. Moenie Mpho se berekeninge doen nie, maar dink hieroor: Sal Mpho dieselfde antwoord kry wat jy vir vraag (a) gekry het? ....

(c) Gert het besluit om die volgende berekeninge te doen: $(240 \div 12) + (240 \div 8)$. Sonder om die berekeninge te doen, sê of Gert dieselfde antwoord sal kry wat jy vir vraag (a) gekry het. ....

3. Doen die nodige berekeninge om uit te vind of die volgende stellings waar of onwaar is:
   (a) $(140 + 100) \div 20 = (140 \div 20) + (100 \div 20)$

   ....

   (b) $240 \div (12 + 8) = (240 \div 12) + (240 \div 8)$

   ....

   (c) $(300 - 60) \div 20 = (300 \div 20) - (60 \div 20)$

   ....

Deling is **regs-distributief** oor optel en aftrek, byvoorbeeld $(2 + 3) \div 5 = (2 \div 5) + (3 \div 5)$. Die deelteken is regs van die hakies. Maar deling is nie links-distributief nie, byvoorbeeld $10 \div (2 + 4) \neq (10 \div 2) + (10 \div 4)$.

Nog voorbeelde: $(200 + 40) \div 20 = (200 \div 20) + (40 \div 20) = 10 + 2 = 12$, en $(500 + 200 - 300) \div 50 = (500 \div 50) + (200 \div 50) - (300 \div 50)$

4. Evalueer elke uitdrukking vir $x = 2$ en $x = 10$.

(a) $(10x^2 + 5x) \div 5$	(b) $(10x^2 \div 5) + (5x \div 5)$ ....
....	....
(c) $2x^2 + x$	(d) $(10x^2 + 5x) \div 5x$ ....
....	....
(e) $(10x^2 \div 5x) + (5x \div 5x)$	(f) $2x + 1$
....	....

Die verspreidingseienskap van deling kan soos volg uitgedruk word:

$(x + y) \div z = (x \div z) + (y \div z)$

$(x - y) \div z = (x \div z) - (y \div z)$

5. (a) Moenie enige berekeninge doen nie. Watter van die volgende uitdrukkings *dink jy* sal dieselfde waarde as $(10x^2 + 20x - 15) \div 5$, vir $x = 10$ sowel as $x = 2$ hê?

   $2x^2 + 20x - 15$ $\quad$ $10x^2 + 20x - 3$ $\quad$ $2x^2 + 4x - 3$ $\quad$ ....

   (b) Doen die nodige berekeninge om jou antwoord te kontroleer.

   ....

6. Vereenvoudig:

(a) $(2x + 2y) \div 2$

(b) $(4x + 8y) \div 4$

(c) $(20xy + 16x) \div 4x$

(d) $(42x - 6) \div 6$

(e) $(28x^4 - 7x^3 + x^2) \div x^2$

(f) $(24x^2 + 16x) \div 8x$

(g) $(30x^2 - 24x) \div 3x$

7. Vereenvoudig:

(a) $(9x^2 + xy) \div xy$

(b) $(48a - 30ab + 16ab^2) \div 2a$

(c) $(3a^3 + a^2) \div a^2$

(d) $(13a - 17ab) \div a$

(e) $(3a^2 + 5a^3) \div a$

(f) $(39a^2b + 13ab + ab^2) \div ab$

Die instruksie $72 \div 6$ kan ook as $\frac{72}{6}$ geskryf word.

Hierdie skryfwyse, wat net soos die skryfwyse vir gewone breuke lyk, word dikwels gebruik om deling aan te dui.

In plaas van $(10x^2 + 20x - 15) \div 5$ kan ons dus $\frac{10x^2 + 20x - 15}{5}$ skryf.

Aangesien $(10x^2 + 20x - 15) \div 5$ ekwivalent is aan $(10x^2 \div 5) + (20x \div 5) - (15 \div 5)$, is $\frac{10x^2 + 20x - 15}{5}$ ekwivalent aan $\frac{10x^2}{5} + \frac{20x}{5} - \frac{15}{5}$.

8. Vind 'n eenvoudiger ekwivalente uitdrukking vir elk van die volgende uitdrukkings (hierdie uitdrukkings maak duidelik nie sin as $x = 0$ nie).

(a) $\frac{16x^2 - 12x}{4x}$

(b) $\frac{16x^3 - 12x}{4x}$

(c) $\frac{16x^3 - 12x^2}{4x}$

(d) $\frac{16x^3 - 12x^2}{4x^2}$

(e) $\frac{16x^3 - 12x^2}{2x}$

(f) $\frac{16x^3 - 12x}{8x}$

9. Kontroleer of elk van die volgende stellings waar is vir $x = 10$; $x = 100$; $x = 5$; $x = 1$ en $x = -2$.

(a) $\frac{x^2}{x} = x$ ....

(b) $\frac{x^3}{x} = x^2$ ....

(c) $\frac{x^3}{x^2} = x$ ....

(d) $\frac{5x^3}{x} = 5x^2$ ....

(e) $\frac{5x^3}{x} = 5^3$ ....

(f) $\frac{5x}{x^2} = \frac{5}{x}$ ....

10. (a) Verduidelik waarom $\frac{100x - 5x^2}{5x} = 20 - x$ vir alle waardes van x behalwe $x = 0$.

....

(b) Verduidelik waarom $\frac{15x^2 - 10x}{5x}$ ekwivalent is aan $3x - 2$, behalwe as $x = 0$.

....

11. Voltooi die tabel. (Wenk: Vereenvoudig eers die uitdrukkings om dinge vir jouself makliker te maak!)

x	1,5	2,8	–3,1	0,72
$\frac{3x+12}{3}$				
$\frac{18x^2+6}{6}$				
$\frac{5x^2+7x}{x}$				

12. Vereenvoudig elke uitdrukking tot die ekwivalente vorm wat so min as moontlik bewerkings sal vereis.

(a) $\frac{3a + a^2}{a}$ ....

(b) $\frac{x^3 + 2x^2 - x}{x}$ ....

(c) $\frac{2a + 12ab}{2a}$ ....

(d) $\frac{12x^2 + 10x}{2x}$ ....

(e) $\frac{21ab - 14a^2}{7a}$ ....

(f) $\frac{15a^2b + 30ab^2}{5ab}$ ....

(g) $\frac{7x^3 + 21x^2}{7x^2}$ ....

(h) $\frac{3x^2 + 9x}{3x}$ ....

13. Los die vergelykings op.

(a) $\frac{3x^2 + 15x}{3x} = 20$

(b) $\frac{30x - 18x^2}{6x} = 2$

....

....

14. Voltooi die tabel.

	x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
(a)	$\dfrac{x^3+2x^2-x}{x}$					
(b)	$\dfrac{7x^3+21x^2}{7x^2}$					
(c)	$\dfrac{50x^2+5x}{5x}$					

15. Vereenvoudig die volgende uitdrukkings.

(a) $\dfrac{3x(5x+4)+6x(5x+3)}{5x}$

(b) $\dfrac{14x^2-28x}{7x}+\dfrac{24x-18x^2}{3x}$

....

....

....

8.6 Produkte en kwadrate van tweeterme

Hoe kan ons die uitgebreide vorm van $(x + 2)(x + 3)$ bepaal?

Om $(x + 2)(x + 3)$ uit te brei, kan jy eers $(x + 2)$ hou soos dit is en die verspreidingseienskap toepas:

$(\mathbf{x+2})(x+3)$
$= (\mathbf{x+2})x + (\mathbf{x+2})3$
$= x^2 + 2x + 3x + 6$
$= x^2 + 5x + 6$

1. Beskryf hoe jy kan kontroleer of $(x + 2)(x + 3)$ werklik ekwivalent is aan $x^2 + 5x + 6$.

....

....

Om $(x - y)(x + 3y)$ uit te brei kan dit as $(x - y)x + (x - y)3y$ geskryf word en die twee dele kan dan verder uitgebrei word.

$(x-y)(x+3y)$
$= (x-y)x + (x-y)3y$
$= x^2 - xy + 3xy - 3y^2$
$= x^2 + 2xy - 3y^2$

2. Doen 'n paar berekeninge om te kontroleer of $(x - y)(x + 3y)$ en $x^2 + 2xy - 3y^2$ ekwivalent is. Skryf die resultate van jou berekeninge in die tabel.

x					
y					

3. Brei elkeen van hierdie uitdrukkings uit.

(a) $(x + 3)(x + 4)$

(b) $(x + 3)(4 - x)$

(c) $(x + 3)(x - 5)$

(d) $(2x^2 + 1)(3x - 4)$

(e) $(x + y)(x + 2y)$

(f) $(a - b)(2a + 3b)$

(g) $(k^2 + m)(k^2 + 2m)$

(h) $(2x + 3)(2x - 3)$

(i) $(5x + 2)(5x - 2)$

(j) $(ax - by)(ax + by)$

4. Brei elkeen van hierdie uitdrukkings uit.

(a) $(a + b)(a + b)$

(b) $(a - b)(a - b)$

(c) $(x + y)(x + y)$

(d) $(x - y)(x - y)$

(e) $(2a + 3b)(2a + 3b)$

(f) $(2a - 3b)(2a - 3b)$

(g) $(5x + 2y)(5x + 2y)$

(h) $(5x - 2y)(5x - 2y)$

(i) $(ax + b)(ax + b)$

(j) $(ax - b)(ax - b)$

5. Kan jy raai wat die antwoord op elk van die volgende vrae sal wees sonder om dit uit te werk soos jy in vraag 3 gemaak het? Probeer dit en kontroleer dan jou antwoorde. Brei hierdie uitdrukkings uit:

(a) $(m + n)(m + n)$

(b) $(m - n)(m - n)$

(c) $(3x + 2y)(3x + 2y)$

(d) $(3x - 2y)(3x - 2y)$

Al die uitdrukkings in vraag 4 en 5 is **kwadrate van tweeterme**, byvoorbeeld $(ax + b)^2$ en $(ax - b)^2$.

6. Brei uit:

(a) $(ax + b)^2$

(b) $(ax - b)^2$

(c) $(2s + 5)^2$

(d) $(2s - 5)^2$

(e) $(ax + by)^2$

(f) $(ax - by)^2$

(g) $(2s + 5r)^2$

(h) $(2s - 5r)^2$

7. Brei uit en vereenvoudig.

(a) $(4x + 3)(6x + 4) + (3x + 2)(8x + 5)$

(b) $(4x + 3)(6x + 4) - (3x + 2)(8x + 5)$

8.7 Vervanging in algebraïese uitdrukkings

1. In vraag 2 moet jy die waardes van verskillende uitdrukkings vir 'n paar gegewe waardes van x bepaal. Kyk mooi na die verskillende uitdrukkings in die tabel. Dink jy party van hulle kan dalk ekwivalent wees? Vereenvoudig die langer uitdrukking en kyk of jy die korter uitdrukking kry.

2. Voltooi die tabel.

	x	13	–13	2,5	10
(a)	$(2x + 3)(3x - 5)$				
(b)	$10x^2 + 5x - 7 + 3x^2 - 4x - 3$				
(c)	$3(10x^2 - 5x + 2) - 5x(6x - 4)$				
(d)	$13x^2 + x - 10$				
(e)	$6x^2 - x - 15$				
(f)	$5x + 6$				

3. Voltooi hierdie tabel.

	x	1	2	3	4
(a)	$(2x + 3)(5x - 3) + (10x + 9)(1 - x)$				
(b)	$\frac{9x^2 + 30x}{3x}$				
(c)	$3x(10x - 5) - 5x(6x - 4)$				
(d)	$5x(4x + 3) - 2x(7 + 13x) + 2x(3x + 2)$				

4. Beskryf enige patrone wat jy in jou antwoorde vir vraag 3 raaksien.

....

....

....

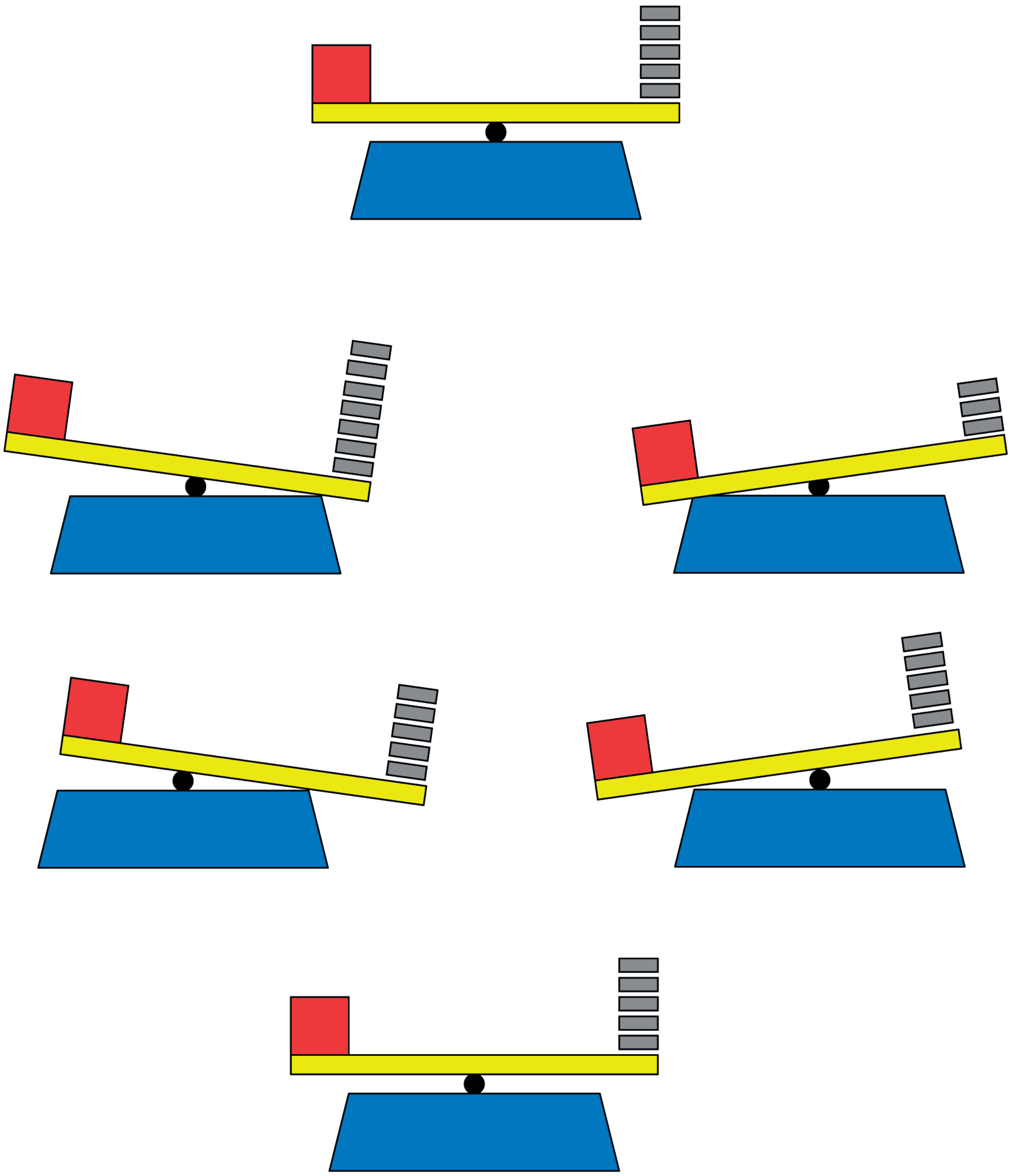
5. Voltooi hierdie tabel.

	x	1,5	2,5	3,5	4,5
(a)	$(2x + 3)(5x - 3) + (10x + 9)(1 - x)$				
(b)	$\frac{9x^2 + 30x}{3x}$				
(c)	$3x(10x - 5) - 5x(6x - 4)$				
(d)	$5x(4x + 3) - 2x(7 + 13x) + 2x(3x + 2)$				

Hoofstuk 9
Vergelykings

In hierdie hoofstuk sal jy na getalle soek wat bewerings waar maak. Dit word die oplossing van vergelykings genoem. Jy sal vergelykings op twee verskillende maniere oplos, naamlik deur inspeksie en deur hulle 'om te keer'.

Jy sal vind dat twee vergelykings dieselfde oplossing kan hê. Sulke vergelykings word ekwivalente vergelykings genoem. Jy sal ook ontdek dat nie alle bewerings algebraïese vergelykings is nie. Sommige bewerings is algebraïese identiteite en ander is in werklikheid algebraïese onmoontlikhede. Jy sal leer wat die verskil tussen hierdie drie tipes bewerings is.



9 Vergelykings

9.1 Los vergelykings op deur inspeksie

1. Ses vergelykings is onder die tabel gegee. Gebruik die tabel om uit te vind vir watter van die gegewe waardes van x dit waar sal wees dat die linkerkant van die vergelyking gelyk is aan die regterkant.

Om die oplossing van 'n vergelyking te soek deur tabelle te gebruik, word **oplossing deur inspeksie** genoem.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$2x + 3$	–3	–1	1	3	5	7	9	11
$x + 4$	1	2	3	4	5	6	7	8
$9 - x$	12	11	10	9	8	7	6	5
$3x - 2$	–11	–8	–5	–2	1	4	7	10
$10x - 7$	–37	–27	–17	–7	3	13	23	33
$5x + 3$	–12	–7	–2	3	8	13	18	23
$10 - 3x$	19	16	13	10	7	4	1	–2

(a) $2x + 3 = 5x + 3$

....

(b) $5x + 3 = 9 - x$

....

(c) $2x + 3 = x + 4$

....

(d) $10x - 7 = 5x + 3$

....

(e) $3x - 2 = x + 4$

....

(f) $9 - x = 2x + 3$

....

Twee vergelykings kan dieselfde oplossing hê. $5x = 10$ en $x + 2 = 4$ het byvoorbeeld dieselfde oplossing; $x = 2$ is die oplossing vir albei vergelykings.

Twee vergelykings word **ekwivalent** genoem as hulle dieselfde oplossing het.

2. Watter van die vergelykings in vraag 1 het dieselfde oplossing? Verduidelik.

....

....

9.2 Los vergelykings op deur optellings- en vermenigvuldigingsinverses te gebruik

1. Bepaal die waarde van x.

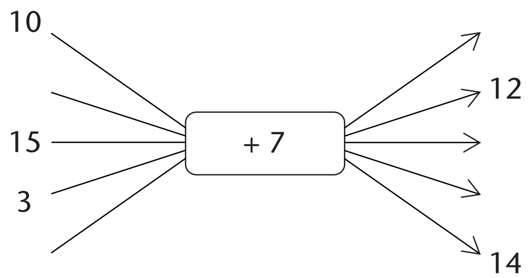
   (a) $x \longrightarrow \boxed{+7} \longrightarrow 10$

   (b) $x \longrightarrow \boxed{\times 2} \longrightarrow \boxed{+3} \longrightarrow 13$

   ....

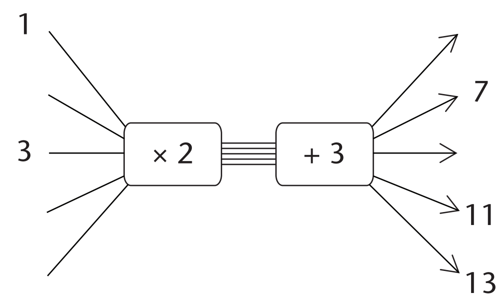
2. Voltooi die vloeidiagramme. Jy moet al die ontbrekende getalle invul.

   (a)



Om die tweede invoergetal te kry, kan jy vir jouself sê: "Nadat ek 7 bygetel het, het ek 12 gehad. Wat het ek gehad voordat ek 7 bygetel het?"

   (b)

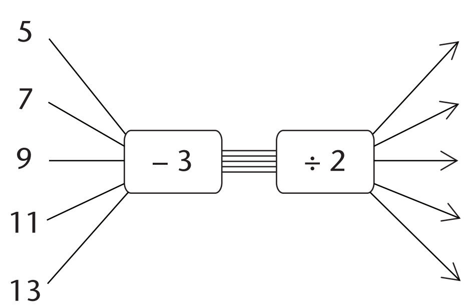


Om die invoergetal te kry wat met 13 ooreenstem, kan jy jouself afvra: "Wat het ek gehad voordat ek 3 bygetel het?" En dan: "Wat het ek gehad voordat ek met 2 vermenigvuldig het?"

3. Gebruik jou antwoorde vir vraag 2 om jou antwoorde vir vraag 1 te kontroleer.
4. Beskryf die instruksies in vloeidiagram 2(b) in woorde en ook met 'n uitdrukking in simbole.

   ....

5. Voltooi die vloeidiagram.



Hierdie vloeidiagram word die **inverse** van die vloeidiagram in vraag 2(b) genoem.

6. Vergelyk die invoergetalle en die uitvoergetalle van die vloeidiagramme in vraag 2(b) en vraag 5. Wat merk jy op?

....

....

7. (a) Tel 5 by enige getal en trek dan 5 van jou antwoord af. Wat kry jy?

....

(b) Vermenigvuldig enige getal met 10 en deel dan die antwoord deur 10. Wat kry jy?

....

As jy 'n getal bytel en dan dieselfde getal aftrek, is jy terug waar jy begin het. Dit is waarom optel en aftrek **inverse bewerkings** genoem word.

As jy met 'n getal vermenigvuldig en dan deur dieselfde getal deel, is jy terug waar jy begin het. Dit is waarom vermenigvuldiging en deling **inverse bewerkings** genoem word.

Die uitdrukking $5x - 3$ sê *"vermenigvuldig met 5 en trek dan 3 af"*. Hierdie instruksie kan ook met 'n vloeidiagram gegee word: $\to \boxed{\times 5} \to \boxed{-3} \to$

Die vergelyking $5x - 3 = 47$ kan ook as 'n vloeidiagram geskryf word:

$\to \boxed{\times 5} \to \boxed{-3} \to 47$

8. Los die vergelykings hier onder op. Jy kan dit doen deur die inverse bewerkings te gebruik. Jy kan 'n vloeidiagram maak om jou te help om die bewerkings te sien.

(a) $2x + 5 = 23$

....

....

(b) $3x - 5 = 16$

....

....

(c) $5x - 60 = -5$

....

....

(d) $\frac{1}{3}x + 11 = 19$

....

....

(e) $10(x + 3) = 88$

....

....

....

(f) $2(x - 13) = 14$

....

....

....

9.3 Stel vergelykings op

STEL VERGELYKINGS OP

Jy kan maklik 'n vergelyking opstel wat 5 as die oplossing het. Hier is 'n voorbeeld:

Begin deur die oplossing te skryf	$x = 5$
Tel 3 aan albei kante by	$x + 3 = 8$
Vermenigvuldig albei kante met 5	$5x + 15 = 40$

1. Wat is die oplossing van die vergelyking $5x + 15 = 40$? ....
2. Stel jou eie vergelyking op met die oplossing $x = 3$.

   ....

   ....

   ....

3. Bongile het soos volg gewerk om die vergelyking $2(x + 8) = 30$ te maak, maar hy het 'n deel van sy werk uitgevee.

Begin deur die oplossing te skryf	$x =$
Tel 8 aan albei kante by	$= 15$
Vermenigvuldig albei kante met 2	$2(x + 8) = 30$

   Voltooi Bongile se skryfwerk om die vergelyking $2(x + 8) = 30$ op te los.

4. Dit is hoe Bongile 'n moeiliker vergelyking gemaak het:

Begin deur die oplossing te skryf	$x =$
Vermenigvuldig met 3 aan albei kante	$3x =$
Trek 9 aan albei kante af	$3x - 9 = 6$
Tel $2x$ aan albei kante by	$5x - 9 = 2x + 6$

   (a) Wat was aan die regterkant voor Bongile 9 afgetrek het? ....

   (b) Wat is die oplossing van $5x - 9 = 2x + 6$? ....

5. Bongile het met 'n oplossing begin en met 'n vergelyking geëindig. Vul die stappe in wat Bongile gevolg het om die vergelyking op te stel en die vergelyking op te los:

$$\begin{aligned} x &= \\ 8x &= \\ 8x + 3 &= \\ 3x + 3 &= 35 - 5x \end{aligned}$$

LOS VERGELYKINGS OP

Om ’n vergelyking op te stel, kan jy dieselfde bewerking aan albei kante toepas.

Om ’n vergelyking op te los, kan jy die inverse bewerking aan albei kante toepas.

	x	$= 4$	
Vermenigvuldig met 8	$8x$	$= 32$	Deel deur 8
Tel 3 by	$8x + 3$	$= 35$	Trek 3 af
Trek $5x$ af	$3x + 3$	$= 35 - 5x$	Tel $5x$ by

Gebruik enige toepaslike metode om die vergelykings hier onder op te los.

1. (a) $5x + 3 = 24 - 2x$

 ....

 ....

 ....

 (b) $2x + 4 = -9$

 ....

 ....

 ....

 (c) $3 - x = x - 3$

 ....

 ....

 ....

 (d) $6(2x + 1) = 0$

 ....

 ....

 ....

2. (a) $4(1 - 2x) = 12 - 7x$

 ....

 ....

 ....

 ....

 (b) $8(1 - 3x) = 5(4x + 6)$

 ....

 ....

 ....

 ....

 (c) $7x - 10 = 3x + 7$

 ....

 ....

 ....

 ....

 (d) $1{,}6x + 7 = 3{,}5x + 3{,}2$

 ....

 ....

 ....

 ....

GETALPATRONE EN VERGELYKINGS

1. (a) Watter van die volgende reëls sal die getalpatroon oplewer wat in die tweede ry van die tabel hier onder gegee word?

   A. Termwaarde = $8n$ waar n die termnommer is

   B. Termwaarde = $6n - 1$ waar n die termnommer is

   C. Termwaarde = $6n + 2$ waar n die termnommer is

   D. Termwaarde = $10n - 2$ waar n die termnommer is

   E. Termwaarde = $5n + 3$ waar n die termnommer is

   ....

Termnommer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Termwaarde	8	13	18	23	28	33	38	43	48

   (b) Die sesde term van die ry het die waarde 33. Watter term sal die waarde 143 hê? Jy kan 'n vergelyking opstel en oplos om uit te vind.

   ....

   (c) Pas reël E op jou antwoord toe om te kontroleer of jou antwoord korrek is.

   ....

2. (a) Skryf die reël neer wat die getalpatroon in die tweede ry van hierdie tabel sal oplewer. Jy sal dalk 'n bietjie moet eksperimenteer om uit te vind wat die reël is.

Termnommer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Termwaarde	5	8	11	14	17	20	23	26	29

   ....

   (b) Watter term sal die waarde 221 hê?

   ....

3. Die reël vir getalpatroon A is $4n + 11$ en die reël vir patroon B is $7n - 34$.

   (a) Voltooi die tabel vir die twee patrone.

Termnommer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Patroon A									
Patroon B									

   (b) Vir watter waarde van n is die terme van die twee patrone gelyk?

   ....

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 150 2014/07/03 09:35:20 AM

9.4 Vergelykings en situasies

1. Beskou hierdie situasie.

   Om 'n kamer in 'n sekere gebou te huur, moet jy 'n deposito van R400 betaal en dan R80 per dag.

   (a) Hoeveel geld het jy nodig om die kamer vir 10 dae te huur?

   ....

   (b) Hoeveel geld het jy nodig om die kamer vir 15 dae te huur?

   ....

2. Watter van die volgende beskryf die metode wat jy gebruik het om vraag 1(a) en (b) te beantwoord die beste? Onderstreep dit.

   A. Totale koste = R400 + R80

   B. Totale koste = 400(getal dae + 80)

   C. Totale koste = 80 × getal dae + 400

   D. Totale koste = (80 + 400) × getal dae

3. Vir hoeveel dae kan jy die kamer wat in vraag 1 beskryf is huur, as jy R2 800 het?

   ....

   ....

   ....

As jy wil weet vir hoeveel dae jy die kamer kan huur as jy R720 het, kan jy 'n vergelyking opstel en dit oplos:

Jy weet die totale koste is R720 en jy weet dat jy die totale koste soos volg kan uitwerk: Totale koste = $80x + 400$, waar x die getal dae is. Dus $80x + 400 = 720$ en $x = 4$ dae.

Bepaal in elkeen van die volgende gevalle die onbekende getal deur 'n vergelyking op te stel en dit op te los.

4. Om 'n sekere kamer te huur, moet jy 'n deposito van R300 betaal en dan R120 per dag.

   (a) Vir hoeveel dae kan jy die kamer huur as jy 'n totaal van R1 740 kan betaal? (As jy sukkel om die vergelyking op te stel, mag dit jou help om eers te besluit hoe jy sal uitwerk wat dit sal kos om die kamer vir 6 dae te huur.)

   ....

   ....

(b) Wat sal dit kos om die kamer vir 10 dae, vir 11 dae en vir 12 dae te huur?

....

....

....

(c) Vir hoeveel dae kan jy die kamer huur as jy R3 300 beskikbaar het?

....

....

....

(d) Vir hoeveel dae kan jy die kamer huur as jy R3 000 beskikbaar het?

....

....

....

5. Ben en Thabo besluit om 'n paar berekeninge met 'n bepaalde getal te doen. Ben vermenigvuldig die getal met 5 en tel 12 by. Thabo kry dieselfde antwoord as Ben wanneer hy die getal met 9 vermenigvuldig en 16 aftrek. Wat is die getal waarmee hulle gewerk het?

....

6. Die koste om 'n bepaalde motor vir 'n tydperk van x dae te huur, kan met die volgende formule bereken word: Huurkoste in rand = $260x + 310$
Watter inligting oor die huur van die motor sal jy kry as jy die volgende vergelyking oplos? $260x + 310 = 2\,910$

....

....

7. Sarah het 'n deposito van R320 vir 'n stalletjie by 'n mark betaal en sy betaal ook R70 per dag huur vir die stalletjie. Sy verkoop vrugte en groente by die stalletjie en stel vas dat sy elke dag ongeveer R150 wins kan maak. Na hoeveel dae sal sy soveel verdien het as wat sy in totaal vir die stalletjie betaal het?

....

....

9.5 Los vergelykings op deur die eienskappe van eksponente te gebruik

Jy moet dalk terugblaai na Hoofstuk 5 om jou geheue oor die eienskappe van eksponente te verfris.

Een tipe eksponensiële vergelyking waarmee jy in Graad 9 te doen het, het een of meer terme met 'n grondtal wat verhef word tot 'n mag wat 'n veranderlike bevat.

Voorbeeld: $2^x = 16$

Wanneer ons die onbekende waarde moet bepaal, vra ons die vraag: "**Tot watter mag moet die grondtal verhef word sodat die bewering waar is?**"

Voorbeeld:	$2^x = 16$	Maak seker dat die terme met x op hul eie aan een kant is.
	$2^x = 2^4$	Skryf die bekende term met dieselfde grondtal as die term met die eksponent.
	$x = 4$	Stel die eksponente gelyk.

In die voorbeeld hier bo kan ons die eksponente gelykstel omdat die twee getalle gelyk is slegs wanneer hulle tot dieselfde mag verhef word.

1. Los op vir x:

(a) $5^{x-1} = 125$

....

....

....

(b) $2^{x+3} = 8$

....

....

....

(c) $10^x = 10\,000$

....

....

....

(d) $4^{x+2} = 64$

....

....

....

(e) $7^{x+1} = 1$

....

....

....

(f) $x^0 = 1$

....

....

....

Voorbeeld: Los op vir x: $3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = 3^{-3}$ (Herskryf $\frac{1}{27}$ as 'n getal met grondtal 3.)

$x = -3$ (Stel die eksponente gelyk.)

2. Los op vir x.

(a) $7^x = \frac{1}{49}$

....

....

....

(b) $10^x = 0{,}001$

....

....

....

(c) $6^x = \frac{1}{216}$

....

....

....

....

(d) $10^{x-1} = 0{,}001$

....

....

....

....

(e) $4^{-x} = \frac{1}{16}$

....

....

....

(f) $7^x = 7^{-3}$

....

....

....

In 'n ander tipe vergelyking wat eksponente behels, is die veranderlike deel van die grondtal.

Voorbeeld: $x^5 = 32$

Wanneer ons die onbekende waarde moet bepaal, vra ons die vraag: "**Watter getal moet tot die gegewe mag verhef word sodat die bewering waar is?**"

Vir hierdie vergelykings moet jy onthou wat jy oor die magte van getalle soos 2, 3, 4, 5 en 10 weet.

LOS VERGELYKINGS OP MET 'N VERANDERLIKE IN DIE GRONDTAL

1. Voltooi die tabel en beantwoord die vrae wat volg:

	x	2	3	4	5
(a)	x^3	$2^3 = 8$			
(b)	x^5	$2^5 = 32$			
(c)	x^4	$2^4 = 16$			

Vir watter waarde van x is die volgende vergelykings waar?

(a) $x^3 = 64$ (b) $x^5 = 32$ (c) $x^4 = 256$

....

(d) $x^3 = 8$ (e) $x^4 = 16$ (f) $x^5 = 3\ 125$

....

2. Los op vir x en gee 'n rede:

(a) $x^3 = 216$ (b) $x^2 = 324$

....

(c) $x^4 = 10\ 000$ (d) $8^x = 512$

....

(e) $18^x = 324$ (f) $6^x = 216$

....

WERKBLAD

1. Ahmed het 'n getal met 5 vermenigvuldig, 3 by die antwoord getel en toe die getal waarmee hy begin het afgetrek. Die antwoord was 11. Met watter getal het hy begin?

....

....

....

2. Gebruik enige gepaste metode om die vergelykings op te los.

(a) $3(x - 2) = 4(x + 1)$

....

....

....

....

(b) $5(x + 2) = -3(2 - x)$

....

....

....

....

(c) $1{,}5x = 0{,}7x - 24$

....

....

....

(d) $5(x + 3) = 5x + 12$

....

....

....

(e) $2{,}5x = 0{,}5(x + 10)$

....

....

....

(f) $7(x - 2) = 7(2 - x)$

....

....

....

(g) $\frac{1}{2}(2x - 3) = 5$

....

....

....

....

(h) $2x - 3(3 + x) = 5x + 9$

....

....

....

....

KWARTAAL 1
Hersiening en assessering

Hersiening

Onthou om al die stappe in jou werk te wys.

TELGETALLE

1. Skryf al die getalle wat in die wolk voorkom in die tabel oor en plaas 'n regmerkie in al die getaltipekolomme waaraan die getal behoort. Die eerste getal is reeds as voorbeeld gedoen.

-3 $\quad 5 \quad 2{,}5 \quad -7 \quad \pi \quad \frac{22}{7} \quad 0{,}\dot{6}$

Getal-waarde	Getallestelsel				
	Reële getalle	Natuurlike getalle	Heelgetalle	Rasionale getalle	Irrasionale getalle
–3	✓		✓	✓	

2. Die Ndlovu-gesin reis na die Kruger Nasionale Park vir 'n vakansie. Hier is 'n opsomming van hulle reis:

Tyd	Kilometerlesing	Beskrywing
06:12	123 564	Vertrek vanaf hul huis
08:32	123 785	Stop vir ontbyt en petrol
09:18	123 785	Vertrek vanaf vulstasie
11:34	124 011	Ruskamerstop
11:51	124 011	Vertrek vanaf vulstasie
13:32	124 175	Bereik Krugerhek

(a) Bereken die getal ure wat die reis geduur het. Gee jou antwoord as 'n gemengde getal.

....

....

(b) Bereken die gemiddelde spoed van die reis, afgerond tot een desimale plek.

....

3. ’n Motor wat teen ’n gemiddelde spoed van 110 km/h reis, neem $2\frac{1}{4}$ uur om ’n reis te voltooi. Indien die terugreis binne 2 uur moet geskied, wat is die gemiddelde spoed wat gehandhaaf moet word?

....

....

4. As 4 blikkies vleis R75,80 kos, hoeveel sal 7 sulke blikkies vleis kos?

....

....

5. ’n Boer het genoeg hoendervoer om 300 henne 20 dae lank te voer. Hoe lank sal dieselfde hoeveelheid voer hou voor dit opraak as hy nog 100 henne sou bykoop?

....

....

6. Hoe lank sal dit R5 000 neem om te groei tot R5 900 as dit belê word teen 7,2% enkelvoudige rente per jaar?

....

....

7. Chardonnay wil ’n nuwe TV-stel wat R7 499 kos, koop. Sy het nie genoeg geld nie en oorweeg om dit op huurkoop te kry. Die winkel vra ’n deposito van 10% en dan gelyke maandelikse betalings van Rx vir 2 jaar. Indien die enkelvoudige rente wat op die rekening gehef word 15% is, bereken die waarde van x.

....

....

....

....

8. Hoeveel rente sal Tebogo kry as hy R12 500 deponeer vir 21 maande in ’n bankrekening wat 5,3% saamgestelde rente per jaar lewer?

....

....

....

HEELGETALLE

Al die vrae in hierdie afdeling moet sonder 'n sakrekenaar gedoen word.

1. Skryf 'n getal in elke blokkie om die vergelykings waar te maak:

   (a) $\square + \square = -34$ (b) $\square - \square = -34$

2. Hierdie vrae gaan oor getallerye. Vul die korrekte waardes in die blokkies in.

   (a) 18; 10; 2; $\square$ (b) 2; –10; 50; $\square$

   (c) –6 386; –6 392; –6 398; $\square$

3. Hier onder is 'n getallelyn. Die ontbrekende getal is presies halfpad tussen die ander twee getalle. Vul die korrekte waarde in die blokkie in.

   –29 $\square$ 9

4. Bereken die volgende:

   (a) $28 - (-15)$ (b) $(-5)(12)(-7)$

   (c) $5 + 5 \times -6$ (d) $\dfrac{(\sqrt{81})(-2)^3}{-(-3)^2}$

   (e) $\dfrac{(-3)^2\sqrt[3]{216}}{(-9)(-3)}$

5. Keiser Augustus het vanaf 27 v.C. tot 14 n.C. oor die Romeinse Ryk geheers. Hoeveel jaar het hy regeer?

BREUKE

Al die vrae in hierdie afdeling moet sonder 'n sakrekenaar gedoen word.

1. Vereenvoudig:

(a) $\sqrt{\frac{36}{81}x^8}$

(b) $\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{4}x^2$

....

....

(c) $(\frac{3}{4}xy^3)(\frac{4}{9}y)$

....

....

2. Vereenvoudig:

(a) $\frac{4x^{10}}{8x^5}$

(b) $\frac{5}{x} - \frac{1}{x}$

....

....

(c) $\frac{5x}{6y^2} \times \frac{3y}{15x}$

(d) $\frac{x+2}{4z^2} \div \frac{4(x+2)}{2z^3}$

....

....

DIE DESIMALE NOTASIE VIR BREUKE

Al die vrae in hierdie afdeling moet sonder 'n sakrekenaar gedoen word.

1. Bereken:

(a) 27,49 – 6,99

(b) 0,03 × 1,4

(c) 1,44 ÷ 0,012

....

....

2. Vereenvoudig:

(a) $\sqrt{0{,}04x^{16}}$

(b) $3{,}5x^2 - 4{,}6x^2$

(c) $(1{,}2x^2y^3)(5yx^2)$

....

....

3. Vereenvoudig:

(a) $\frac{0{,}2x^{15}}{0{,}01x^5}$

(b) $\frac{0{,}45}{x} - \frac{1{,}35}{x}$

....

....

(c) $\frac{0{,}5x^3}{4{,}5y^2} \times \frac{3y}{2{,}5x}$

(d) $\frac{2{,}5x^3}{2y^2} \div \frac{0{,}5x}{0{,}03y^6}$

....

....

EKSPONENTE

Al die vrae in hierdie afdeling moet sonder 'n sakrekenaar gedoen word, tensy anders gespesifiseer.

1. Skryf in wetenskaplike notasie:

(a) 2 500 001

(b) 0,0003045

....

....

2. Skryf die getal $9{,}45 \times 10^{-5}$ in "gewone" notasie.

....

3. Watter een van hierdie getalle is die grootste: $4{,}7 \times 10^{-9}$ of $5{,}12 \times 10^{-10}$?

....

4. Bereken die volgende en gee jou antwoord in wetenskaplike notasie:

(a) $(5{,}9 \times 10^6) - (4{,}7 \times 10^6)$

(b) $(5{,}9 \times 10^6) + (4{,}7 \times 10^5)$

....

....

(c) $(7{,}2 \times 10^{-4}) \times (2 \times 10^2)$

....

....

5. Bereken die volgende en gee jou antwoord as 'n "gewone" desimale getal. Jy mag 'n sakrekenaar gebruik.

(a) $(6{,}3 \times 10^{-4}) - (1{,}9 \times 10^{-3})$

(b) $(5{,}8 \times 10^{-7}) \div (8 \times 10^{-11})$

....

6. Vereenvoudig en skryf al die antwoorde met positiewe eksponente:

(a) 3^{-2}

(b) $2^7 \times 6^{-3} \times 3^2$

....

(c) $\dfrac{2y^{-3}}{y^3}$

(d) $(2x^6)^{-3}$

....

(e) $(2x^7)(2{,}5x^{-8})$

(f) $(-3a^2bc)^2(-5ac^{-2})$

....

(g) $\dfrac{(2d^2e)^2}{(4d^{-3}e^2)^{-1}}$

....

7. Los die vergelykings op:

(a) $3 \times 3^x = 81$

(b) $2^{x+1} = 0{,}125$

....

....

(c) $4^x + 10 = 74$

....

....

PATRONE

1. Vorm 'n getallery wat voldoen aan hierdie beskrywing: die eerste term is negatief, daarna word elke volgende term verkry deur die voorafgaande term te kwadreer en dan 10 af te trek. Skryf die eerste vier terme van die getallery neer.

....

....

2. Doen die volgende vir elk van die getallerye hier onder: (i) skryf die reël wat die verband tussen die terme in die ry beskryf in woorde neer, en (ii) gebruik die reël om die getallery met nog drie terme uit te brei.

(a) $-5; -2; 10; -20; \ldots$ (b) $-4{,}5; -6{,}25; -8; \ldots$

....

....

....

3. In hierdie vraag word die reël waarvolgens elke term in die getallery bepaal word, gegee. In al die gevalle is n die term se posisie. Bepaal die eerste drie terme in elk van die getallerye:

(a) $3 - 5n$ (b) $2n^2 - 3n + 1$

....

....

....

4. (a) Skryf die reël neer waarvolgens elke term van die getallery bepaal kan word. Doen dit in 'n formaat soortgelyk aan dié in vraag 3 gegee, waar n die posisie van die term is.
$-15; -12; -9; \ldots$

....

....

(b) Gebruik jou reël om die waarde van die 150ste term van die getallery te bepaal.

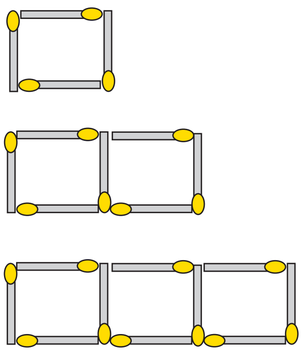
....

....

5. Stel vas wat die patroon is en vul dan die ontbrekende waardes in die tabel in:

Posisie in getallery	1	2	3	4	5		10		
Termwaarde	2	5	10	17					226

6. Die prentjie hier onder wys ’n patroon wat met vuurhoutjies gebou is.



(a) Teken jou eie reeks vuurhoutjiepatrone waar daar ’n gemeenskaplike verskil tussen opeenvolgende figure is. Dit moet verskil van al die vuurhoutjiepatrone wat in hierdie hoofstuk en Hoofstuk 6 gewys is en dit moet die eerste drie vuurhoutjiepatrone in die reeks bevat.

(b) Skryf die reël neer wat die getal vuurhoutjies vir enige term kan bepaal.

....

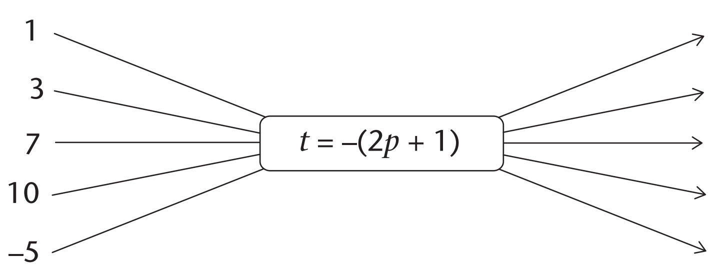
....

(c) Gebruik die reël om die ontbrekende waardes in die tabel in te vul.

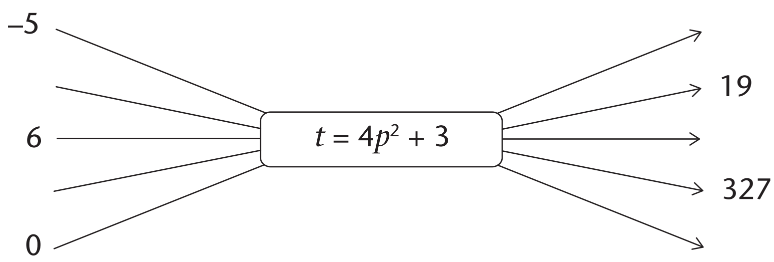
Figuurnommer	4	5	6	7		50
Getal vuurhoutjies benodig						

FUNKSIES EN VERBANDE

1. (a) Gebruik die gegewe formule om die ontbrekende waardes van t te bepaal met die waardes van p wat gegee is:



(b) Gebruik die gegewe formule om die ontbrekende invoerwaardes, p, en uitvoerwaardes, t, te bepaal.



2. Kyk na die waardes in die tabel hier onder:

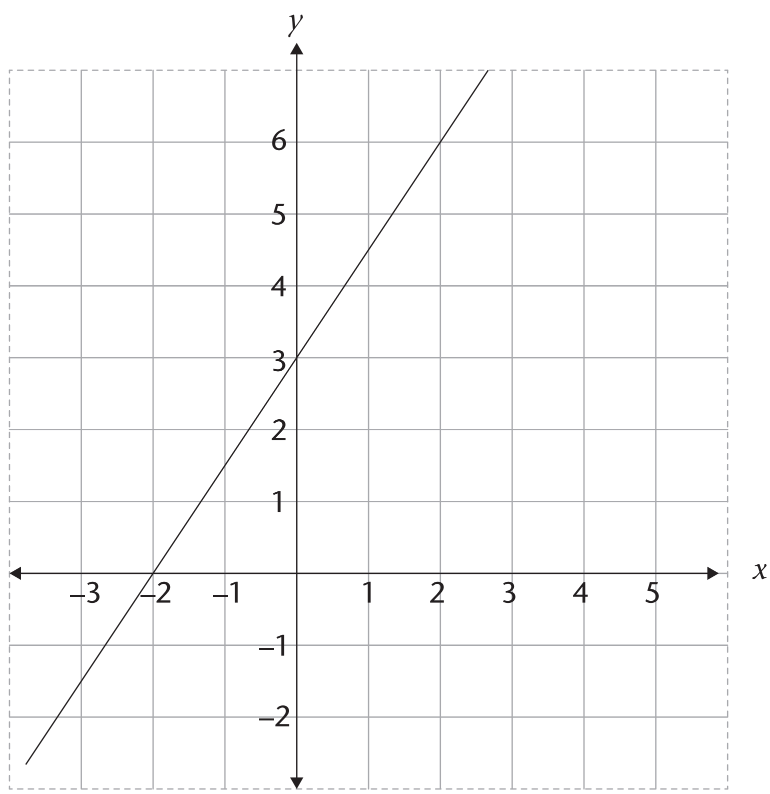
x	–2	–1	0	1		4		12		
y	–4	–1	2	5						65

(a) Skryf die reël om die y-waardes in die tabel te bepaal as ’n algebraïese formule in die vorm $y = ax + b$, waar a en b heelgetalle is.

. . . .

(b) Gebruik die reël om die ontbrekende waardes in die tabel in te vul.

3. Kyk na hierdie grafiek:



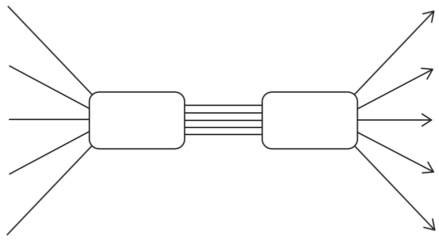
(a) Voltooi die tabel deur die koördinate van punte van die grafiek af te lees:

x	–3	–2	–1	0	1	2
y						

(b) Skryf die algebraïese formule vir die grafiek in die vorm $y = \ldots$

....

(c) Voltooi die vloeidiagram om die verband wat die grafiek illustreer voor te stel:



ALGEBRAÏESE UITDRUKKINGS

1. Vereenvoudig so ver as moontlik:

(a) $(2x^2 - 4x^2)^3$

....

....

....

(b) $-2x^2(5x^3 - 3x^2 + 2x - 5)$

....

....

....

(c) $(4b^2 - 7b^2)(5b^{-2} + 3b^{-1} - 7)$

....

....

....

....

(d) $\frac{18x^2 - 12x + 2}{6x}$

....

....

....

(e) $(2x + 5)(3x - 1)$

....

....

(f) $(4a - 3)^2$

....

....

(g) $\frac{6x^3 - 2(3x)(4x) + x}{4x^2}$

....

....

....

2. Vereenvoudig so ver as moontlik:

(a) $4(a - 2b) - 5(3b + a)$

....

....

(b) $5 + 2(x^2 + 5x + 3)$

....

....

(c) $3x(2x^2 - 3x + 4) - 3(5 - 2x)$

....

....

(d) $(a + 3b - 2c) - (4a + b - c) - (2b - c + 3a)$

....

....

(e) $4(3x^2 + x - 2) - (x + 3)^2$

....

....

VERGELYKINGS

1. Los die volgende vergelykings op:

   (a) $4 - 3x = -2$

   ....

   ....

   ....

   (b) $4(2x - 1) = -8$

   ....

   ....

   ....

   (c) $2x + 1 = 3(2x - 1)$

   ....

   ....

   ....

   (d) $(x + 2)(x - 4) = x^2 + 5x - 1$

   ....

   ....

   ....

2. Thomas is z jaar oud en Tshilidzi is twee keer so oud soos Thomas. Die som van hul ouderdomme is 42.

   (a) Skryf hierdie inligting neer as 'n vergelyking met die veranderlike z.

   ....

   (b) Los die vergelyking op om Tshilidzi se ouderdom te bepaal.

   ....

3. Die basis van 'n driehoek is $(1{,}5x + 6)$ cm en die hoogte is 4 cm. Die oppervlakte van die driehoek is 24 cm^2.

   (a) Skryf hierdie inligting as 'n vergelyking in x neer.

   ....

   (b) Los die vergelyking op om die waarde van x te bepaal.

   ....

   ....

   ....

   (c) Hoe lank is die basis van die driehoek?

   ....

   ....

4. Los op vir x:

   (a) $3^x = 9$

   ....

   ....

   ....

   (b) $2^{x+1} = 16$

   ....

   ....

   ....

Assessering

In hierdie afdeling dui die getalle tussen hakies aan die einde van 'n vraag aan hoeveel punte die vraag werd is. Gebruik hierdie inligting om te bepaal hoeveel werk nodig is by elke vraag. Die totale getal punte vir hierdie assessering is 75.

1. Gareth het die volgende getalle geklassifiseer:

Getalwaarde	Getallestelsel				
	Reële getalle	Natuurlike getalle	Heelgetalle	Rasionale getalle	Irrasionale getalle
$-1,5$	✓		✓	✓	
$\sqrt{2}$	✓			✓	

(a) Gareth het 'n paar foute gemaak. Voltooi die volgende tabel deur die merkies in die korrekte blokkies te maak: (2)

Getalwaarde	Getallestelsel				
	Reële getalle	Natuurlike getalle	Heelgetalle	Rasionale getalle	Irrasionale getalle
$-1,5$					
$\sqrt{2}$					

(b) Verduidelik hoekom jy jou veranderings aangebring het. (2)

....

....

2. Pheto het R1 500 vir 2 jaar in 'n bankrekening belê. Aan die einde van die tydperk het sy aanvanklike belegging gegroei tot R1 717,50. Watter enkelvoudige rentekoers het die bank aan hom gegee? (Neem aan dat die rentekoers nie gedurende die tydperk aangepas is nie). Gee jou antwoord as 'n persentasie. (3)

....

....

....

....

3. ’n Bentiër het 2 500 bendollers omgesit in darsek toe hy die Klingon Ryk bereik het. Hy het 2 000 darsek gekry nadat 3% kommissie gehef is.
Bepaal die bendoller : darsek wisselkoers. Skryf dan die volgende sin oor en voltooi dit: “1 Klingon darsek = ___ bendoller”. Die ontbrekende waarde moet afgerond word tot die derde desimaal. (3)

....

....

4. Bereken die verskil tussen die hoogste punt op die aarde se oppervlak (Mt Everest: 8 848 m <u>bo</u> seespieël) en die diepste punt van die seebodem (die bodem van die Marianassloot, 10 994 m <u>onder</u> seespieël). (1)

....

....

5. Skryf twee getalle neer wat 21 as antwoord gee as die een van die ander afgetrek word. Een van die getalle moet positief wees, en die ander een negatief. (2)

....

6. (a) Wat is de waarde van $(-1)^{1\,000\,001}$? (1)

....

(b) Verduidelik hoe jy die antwoord in (a) kon kry sonder ’n sakrekenaar. (1)

....

....

7. Vereenvoudig die volgende sonder ’n sakrekenaar. Wys al die stappe in jou werk:

(a) $\frac{5}{2}x - \frac{11}{4}x + 1{,}125x$ (2)

....

....

(b) $\sqrt[3]{\frac{0{,}027x^7}{216x}}$ (4)

....

....

(c) $\frac{0{,}4x}{10} \times \frac{20x}{0{,}03} \div \frac{8x^2}{5}$ (4)

....

....

(d) $\frac{x}{4} + [8x(x + 1) \times \frac{0,5}{x+1}]$ (5)

....

....

8. Die middellyn van 'n koolstofatoom is 0,000000000154 meter. Skryf dit in wetenskaplike notasie. (2)

....

9. Vereenvoudig die volgende (gebruik slegs positiewe eksponente in die antwoorde):

(a) $3^{-9} \times 3^4$ (b) $\frac{(3d^3e^2)^3}{(2d^{-4}e)^{-1}}$ (5)

....

10. Los op vir x: $9^{2x-3} = 3^x$ (3)

....

....

....

....

....

11. Kyk na die volgende getallery: 6 000; –1 500; 375; ...

(a) Brei dit met twee terme uit. (2)

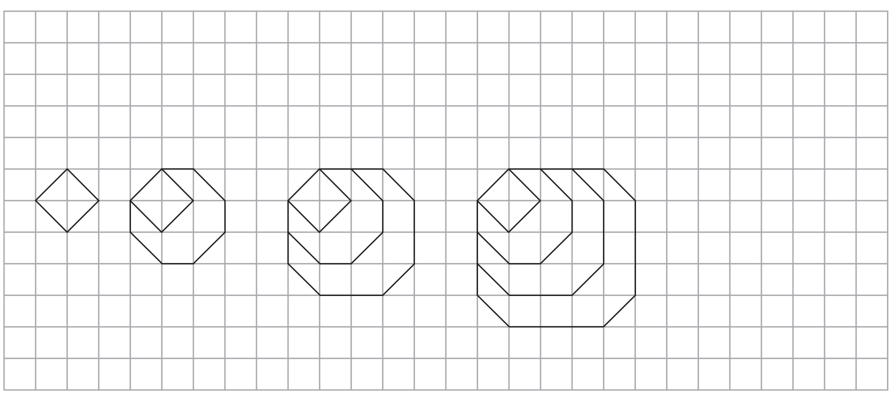
....

(b) Is die volgende reël korrek (n is die posisie van die term in die getallery): $6\,000(0,25)^{n-1}$? Verduidelik jou antwoord. (2)

....

....

12. Die onderstaande figuur wys 'n vuurhoutjiepatroon.



(a) Teken die vyfde diagram in die patroon op die rooster. (2)

(b) Die eerste twee terme in die ry wat geskep is deur die getal vuurhoutjies in elke patroon te gebruik, is: 4; 11. Skryf die volgende drie terme in die getallery neer. (2)

....

....

(c) Skryf die reël wat die verband tussen terme in die ry beskryf, in woorde. (2)

....

....

13. Kyk na die waardes in die tabel hier onder:

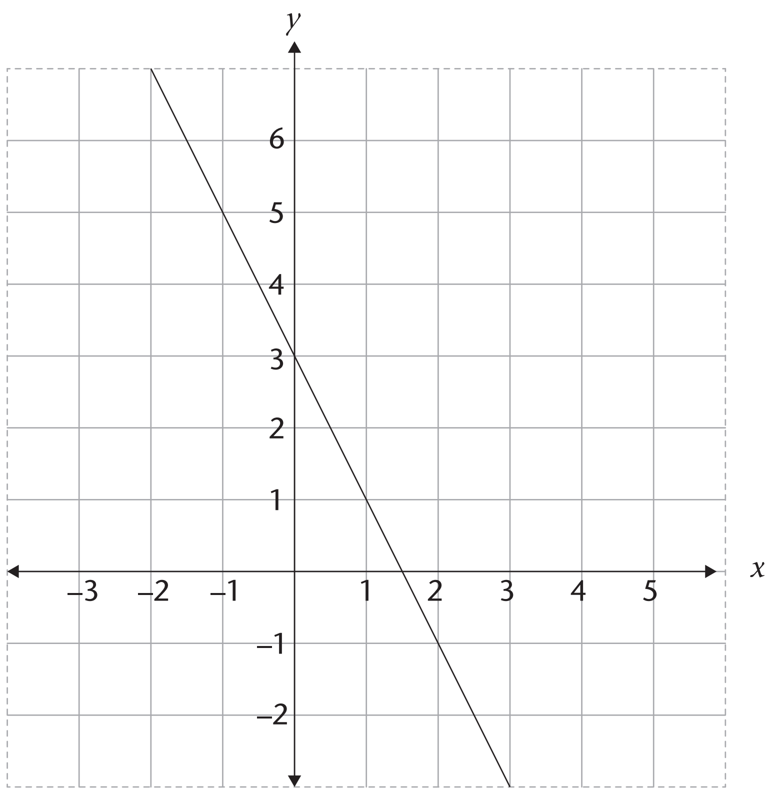
x	–2	–1	0	1		5		16		
y	–10	–3	–2	–1						7 998

(a) Skryf die reël waarmee die y-waardes in die tabel bepaal word as 'n algebraïese formule. (Wenk: Kyk na die derdemagte van die getalle.) (2)

....

(b) Gebruik die reël om die tabel se ontbrekende waardes in te vul. (3)

14. Kyk na die volgende grafiek:



(a) Voltooi die tabel deur die koördinate van punte van die grafiek af te lees: (2)

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

(b) Skryf 'n algebraïese formule vir die grafiek in die vorm $y = \dots$ (2)

....

....

15. Vereenvoudig:

(a) $\dfrac{15 + x - 5x^2}{5x^2}$ (3)

....

....

(b) $(3x + 1)(3x - 1)$ (2)

....

....

(c) $4 - 3(2x + 3)^2$ (3)

....

....

....

16. Los die volgende vergelykings op:

(a) $x^2 + 5x - 1 - x^2 - x + 3 = 3(x - 4)$ (4)

....

....

....

(b) $2(2x + 3) = (3x - 1)(-2)$ (4)

....

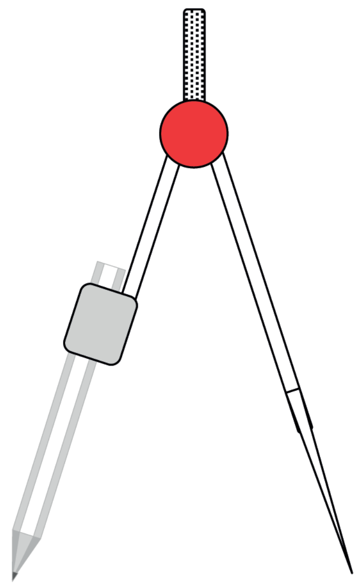
....

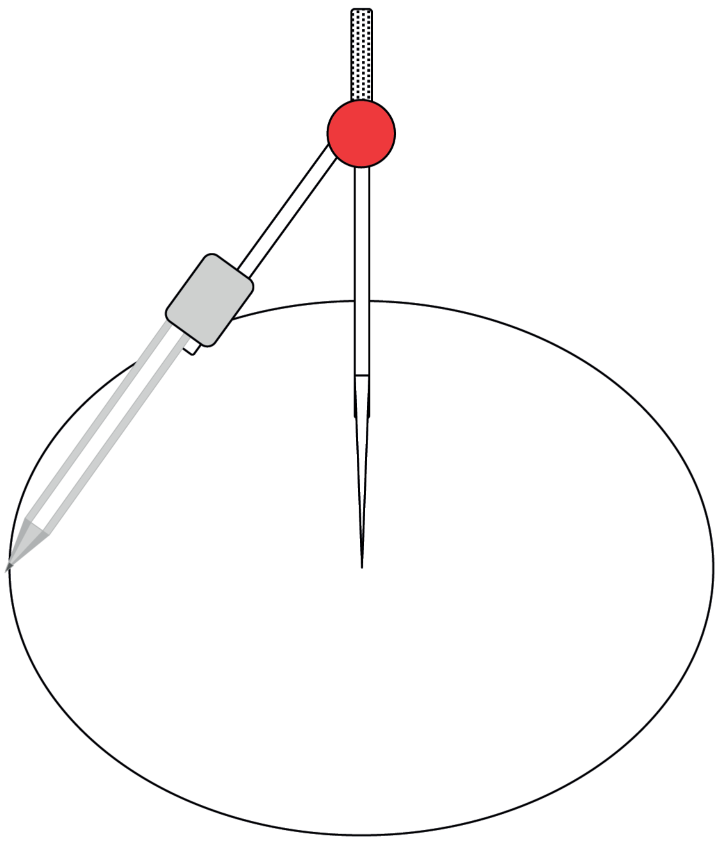
....

....

Hoofstuk 10
Konstruksie van meetkundige figure

In hierdie hoofstuk sal jy die konstruksie van meetkundige figure, met slegs 'n passer en liniaal, hersien. Jy gaan die konstruksie van loodlyne, halveerlyne van hoeke asook spesiale hoeke hersien en verder ondersoek. Hierdie konstruksies help jou om meer konstruksies asook eienskappe van 2D-figure te verstaan. Jy sal ook die verbande tussen hoeke binne en buite 'n driehoek, sowel as kongruensie van driehoeke ondersoek. Laastens gaan jy meer uitvind oor die hoeklyne van vierhoeke en oor die binnehoeke van verskillende veelhoeke.





10 Konstruksie van meetkundige figure

10.1 Konstruksie van loodlyne

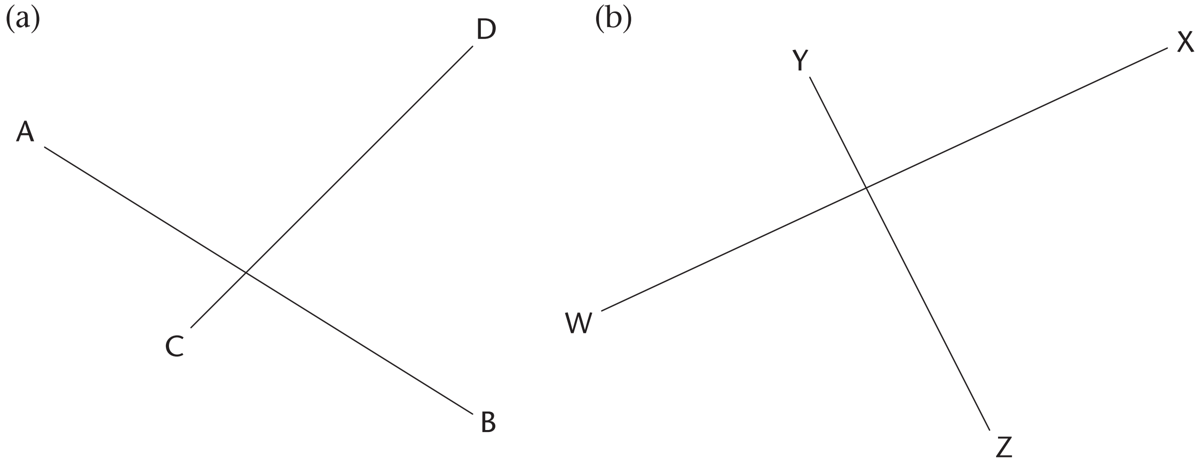
HERSIEN LOODLYNE

Jy het in Graad 8 oor **loodlyne** geleer.

1. Wat beteken dit as ons sê "twee lyne is loodreg op mekaar"?

   ....

2. Gebruik jou gradeboog om die hoeke tussen die pare lyne te meet. Sê dan of die lyne loodreg op mekaar is of nie.

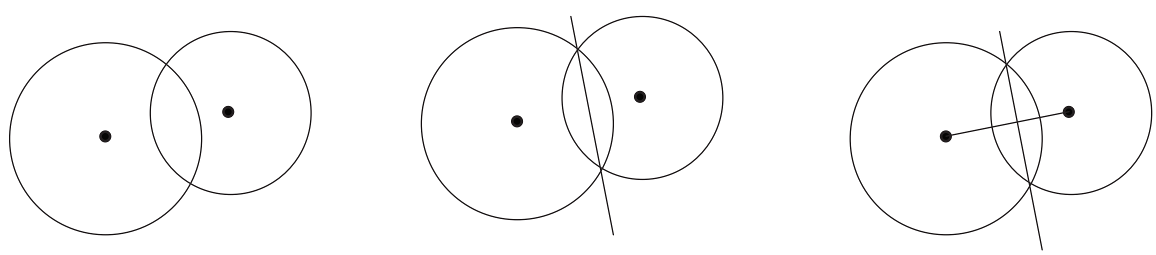


....

....

ONDERSOEK LYNE WAT GEVORM WORD WANNEER SIRKELS MEKAAR SNY

1. Doen die volgende in jou oefeningboek:
   (a) Gebruik jou passer en trek twee sirkels van verskillende groottes wat oorvleuel.
   (b) Trek 'n lyn deur die punte waar die sirkels mekaar sny.
   (c) Trek 'n lyn om die middelpunte van die sirkels met mekaar te verbind.



Stap (a) *Stap (b)* *Stap (c)*

(d) Gebruik jou gradeboog en meet die hoeke tussen die snylyne. ....

(e) Wat kan jy oor die snylyne sê? ....

....

....

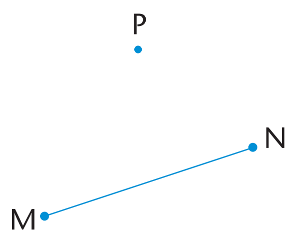
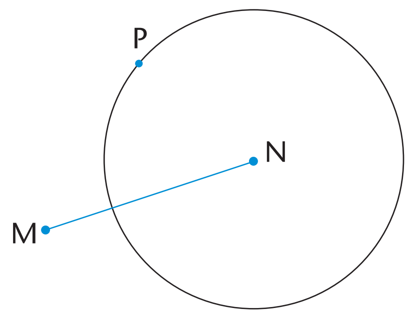
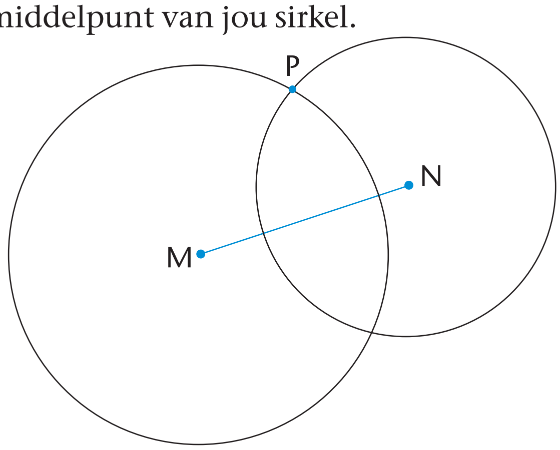
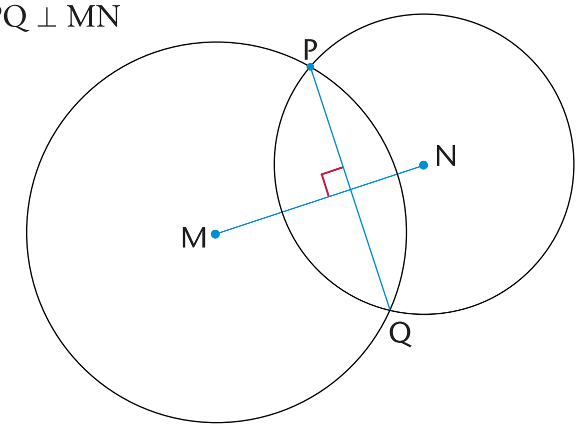
2. Herhaal vraag 1(a) tot (e) met sirkels wat ewe groot is.
3. Watter afleiding kan jy maak oor 'n lyn wat deur die snypunte van twee oorvleuelende sirkels getrek word en 'n lyn wat deur hulle middelpunte getrek word?

....

GEBRUIK SIRKELS OM LOODLYNE TE KONSTRUEER

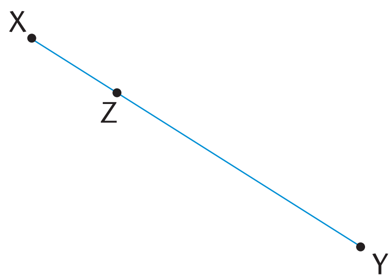
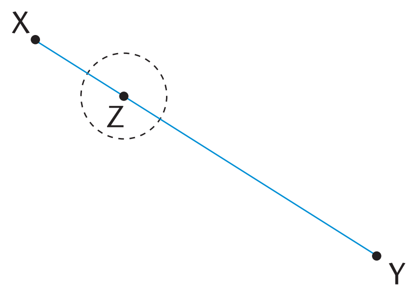
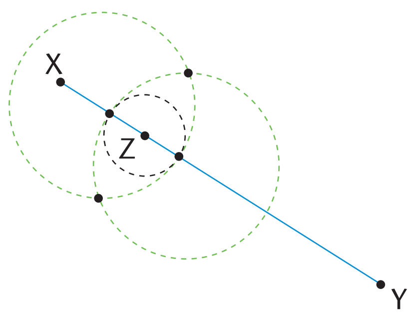
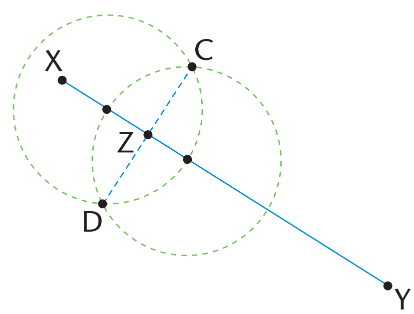
Geval 1: 'n Loodlyn deur 'n punt wat nie op die lynstuk is nie

Lees die inligting en instruksies en doen die konstruksie in jou oefeningboek.

Lynstuk MN met punt P op 'n afstand daarvan af word vir jou gegee. Jy moet 'n lyn konstrueer wat loodreg op MN is, sodat die loodlyn deur punt P gaan. 	**Stap 1** Gebruik jou passer om 'n sirkel te trek waarvan die middelpunt die een eindpunt van die lynstuk (N) is en deur punt P gaan. 
Stap 2 Herhaal stap 1, maar maak die ander eindpunt van die lynstuk (M) die middelpunt van jou sirkel. 	**Stap 3** Verbind die punte waar die sirkels sny: PQ $\perp$ MN 

Geval 2: ’n Loodlyn by ’n punt wat op die lynstuk is

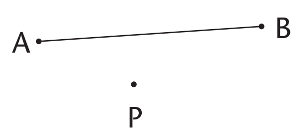
Lees die inligting en instruksies en doen die konstruksie in jou oefeningboek.

Lynstuk XY met punt Z daarop word vir jou gegee. Jy moet ’n loodlyn konstrueer wat deur Z gaan.  	**Stap 1** Gebruik jou passer om ’n sirkel met middelpunt Z te trek. Maak sy radius kleiner as ZX. Let op die twee punte waar die sirkel XY sny. 
Stap 2 Stel jou passer wyer as wat dit was vir die sirkel met middelpunt Z. Trek twee ewe groot sirkels met middelpunte by die twee punte waar die eerste (swart) sirkel XY sny. Die twee sirkels (groen) sal oorvleuel.  	**Stap 3** Verbind die snypunte van die twee oorvleuelende sirkels. Merk hierdie punte C en D: CD ⊥ XY en gaan deur punt Z. 

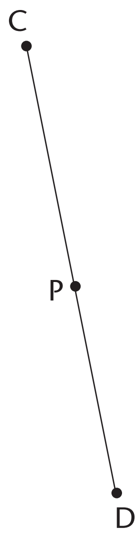
OEFEN OM SIRKELS TE GEBRUIK OM LOODLYNE TE KONSTRUEER

Trek in elk van die volgende twee gevalle ’n lyn wat loodreg op die lynstuk is en deur punt P gaan.

1.



2.

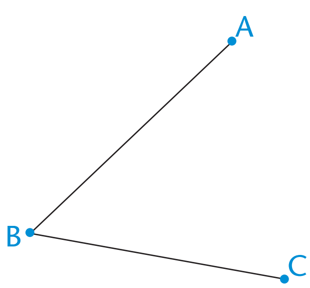
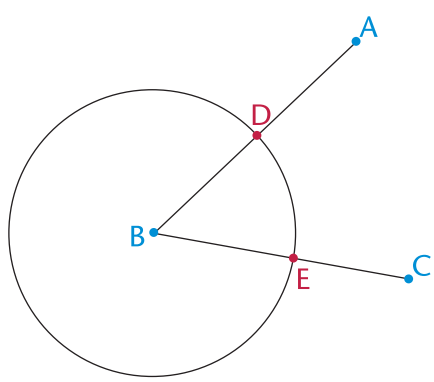


10.2 Halvering van hoeke

GEBRUIK SIRKELS OM HOEKE TE HALVEER

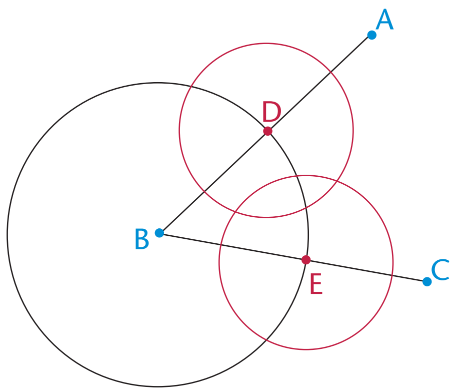
Werk deur die volgende voorbeeld waar twee snydende sirkels gebruik word om 'n hoek te **halveer**. Doen dan self die stappe in jou oefeningboek.

Om 'n hoek te **halveer** beteken om dit in twee ewe groot hoeke te verdeel.

<table>
<tr>
<td>$A\hat{B}C$ word vir jou gegee. Jy moet die hoek halveer.

</td>
<td>Stap 1
Trek 'n sirkel met middelpunt B om sodoende gelyke lengtes op albei bene van die hoek af te merk. Merk die snypunte D en E: DB = BE.

</td>
</tr>
</table>

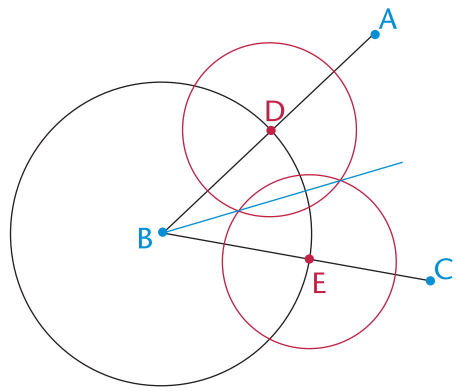
Stap 2

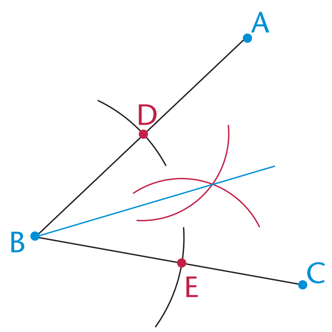
Trek twee ewe groot sirkels met middelpunte by D en by E. Maak seker die sirkels oorvleuel.



Stap 3

Trek 'n lyn van B af deur die punte waar die twee ewe groot sirkels sny. Hierdie lyn sal $A\hat{B}C$ halveer.





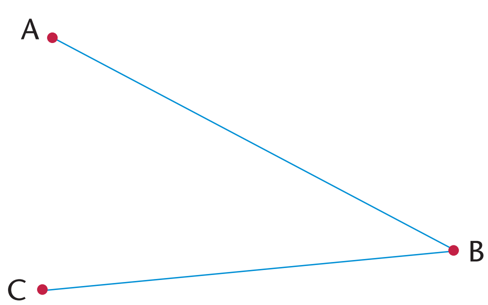
Dieselfde konstruksie as in stap 3 hier bo

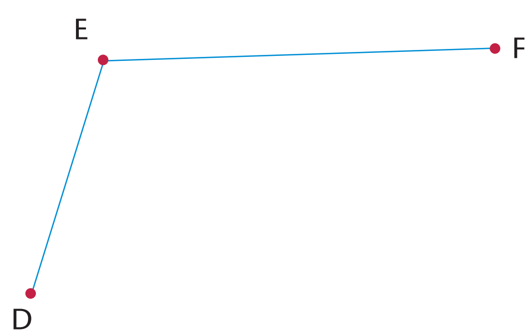
Kan jy verduidelik waarom die metode hier bo werk om 'n hoek te halveer?

Kan jy ook sien dat ons nie volle sirkels hoef te teken nie, maar bloot dele van sirkels (boë) kan gebruik om die konstruksie hier bo te doen?

OEFEN OM HOEKE TE HALVEER

Halveer die hoeke hier onder sonder om 'n gradeboog te gebruik.





10.3 Konstruksie van spesiale hoeke sonder ’n gradeboog

Hoeke van 30°, 45°, 60° en 90° staan bekend as **spesiale hoeke**. Jy moet hierdie hoeke kan konstrueer *sonder* om ’n gradeboog te gebruik.

KONSTRUEER ’N HOEK VAN 45°

Jy het geleer hoe om ’n hoek van 90° te teken, en hoe om ’n hoek te halveer, sonder om ’n gradeboog te gebruik. Gebruik hierdie inligting om ’n hoek van 45° te teken by punt X op die lynstuk hier onder.

Wenk: Verleng die lynstuk na die linkerkant van X.

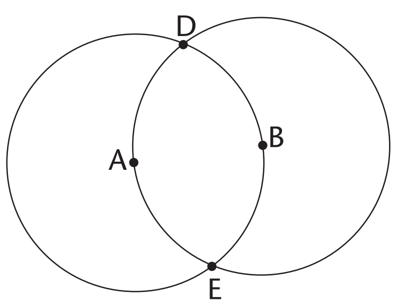
KONSTRUEER HOEKE VAN 60° EN 30°

1. Wat weet jy oor die sye en hoeke van ’n gelyksydige driehoek?

   ....

2. Trek twee sirkels met die volgende eienskappe in jou oefeningboek:
   - Die sirkels is ewe groot.
   - Elke sirkel gaan deur die ander sirkel se middelpunt.
   - Die sirkels se middelpunte is A en B gemerk.
   - Die snypunte van die sirkels is D en E gemerk.

   Die tekening hier regs dien as ’n voorbeeld.



3. Trek die volgende lynstukke: AB, AD en DB.

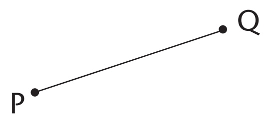
4. Wat kan jy oor die lengtes van AB, AD en DB sê?

   ....

5. Watter soort driehoek is ABD? ....

6. Wat weet jy dus oor $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{D}$? ....

7. Gebruik jou kennis van die halvering van hoeke om 'n hoek van 30° te konstrueer op die konstruksie wat jy in vraag 2 gemaak het.
8. Gebruik dit wat jy hier bo geleer het om 'n hoek van 60° by punt P op lynstuk PQ hier onder te konstrueer.



KONSTRUEER HOEKE WAT VEELVOUDE VAN SPESIALE HOEKE IS

1. Voltooi die tabel. Die eerste blok is reeds vir jou ingevul.

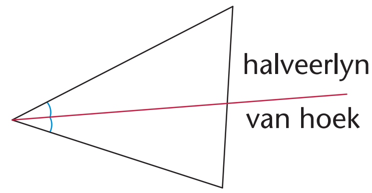
Hoek	Veelvoude kleiner as 360°	Hoek	Veelvoude kleiner as 360°
30°	30°; 60°; 90°; 120°; 150°; 180°; 210°; 240°; 270°; 300°; 330°	45°	
60°		90°	

2. Konstrueer die volgende hoeke in jou oefeningboek sonder om 'n gradeboog te gebruik. Jy sal elke keer meer as een konstruksie moet doen om die hoek te verkry.

(a) 120° (b) 135° (c) 270° (d) 240° (e) 150°

10.4 Halveerlyne van hoeke in driehoeke

In afdeling 10.2 het jy geleer hoe om 'n hoek te halveer. Jy gaan nou die halveerlyne van hoeke in 'n driehoek ondersoek.

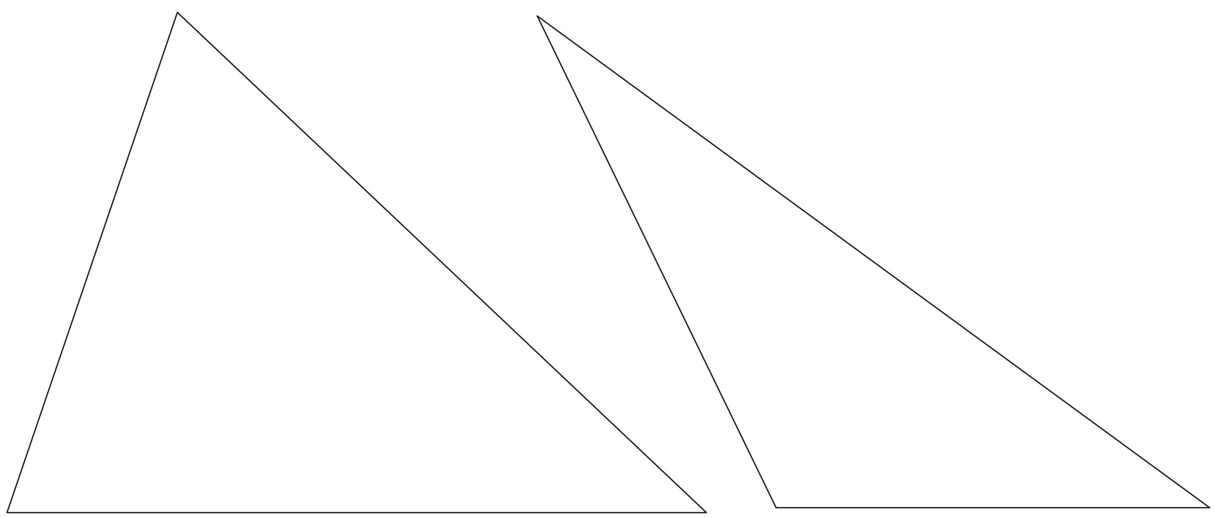


1. (a) Halveer elk van die hoeke van die skerphoekige driehoek hier onder.
   (b) Verleng elk van die halveerlyne na die teenoorstaande sy van die driehoek.
   (c) Wat sien jy raak?

   ....

2. (a) Doen dieselfde met die stomphoekige driehoek.
   (b) Wat sien jy raak?

   ....



3. Vergelyk jou driehoeke met twee klasmaats s'n. Julle behoort dieselfde resultate te hê.

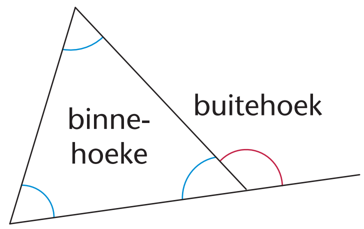
Jy behoort te gevind het dat die drie **halveerlyne van die hoeke** van 'n driehoek **in een punt sny**. Hierdie punt is dieselfde afstand van elke sy van die driehoek af.

10.5 Binne- en buitehoeke van driehoeke

WAT IS BINNE- EN BUITEHOEKE?

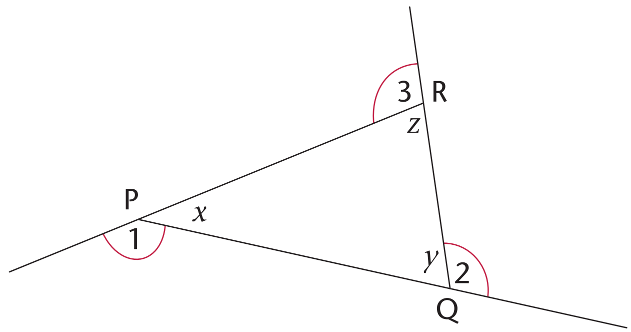
’n **Binnehoek** is ’n hoek wat tussen twee sye van ’n driehoek lê. Dit is binne-in die driehoek. ’n Driehoek het drie binnehoeke.

’n **Buitehoek** is ’n hoek tussen ’n sy van ’n driehoek en ’n ander sy wat verleng word. Dit is buite die gegewe driehoek.



Kyk na ΔPQR. Sy drie sye is verleng om drie buitehoeke te skep.

Elke buitehoek het een aangrensende binnehoek (langsaan) en twee **teenoorstaande binnehoeke**, soos in die volgende tabel beskryf word.

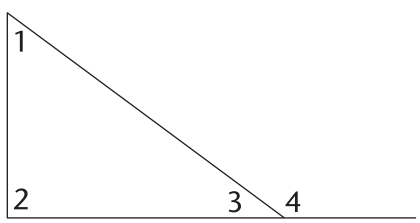


Buitehoek	Aangrensende binnehoek	Teenoorstaande binnehoeke
1	x	z en y
2	y	x en z
3	z	x en y

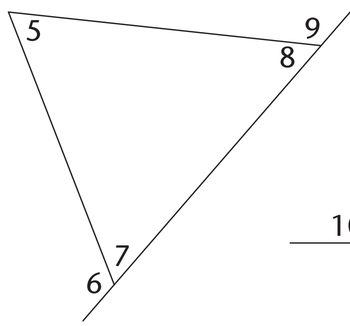
IDENTIFISEER BUITEHOEKE EN TEENOORSTAANDE BINNEHOEKE

1. Benoem elke buitehoek en sy twee teenoorstaande binnehoeke hier onder.

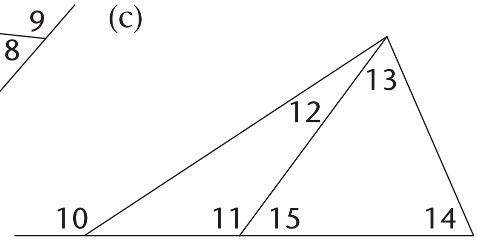
(a)



(b)

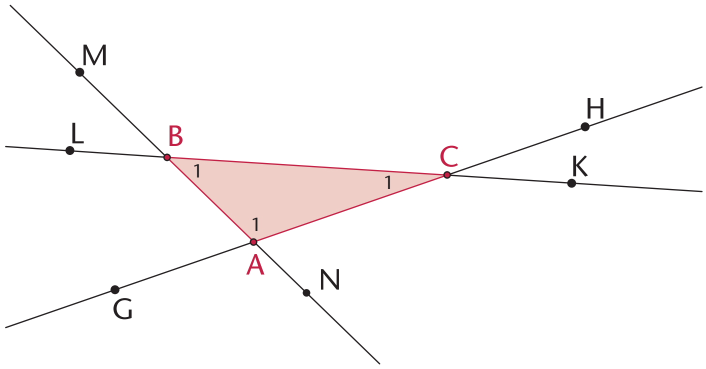


(c)



Buite∠					
Teenoorst. binne∠e					

2. Elke sy van ΔABC hier onder is in albei rigtings verleng om ses buitehoeke te skep.



(a) Skryf die name van die binnehoeke van die driehoek neer.

....

....

(b) Aangesien 'n driehoek drie sye het wat in albei rigtings verleng kan word, is daar twee buitehoeke by elke hoekpunt. Skryf die name van al die buitehoeke neer.

....

(c) Verduidelik waarom $M\hat{B}L$ nie 'n buitehoek van ΔABC is nie. ....

....

(d) Skryf twee ander hoeke neer wat nie binnehoeke of buitehoeke is nie.

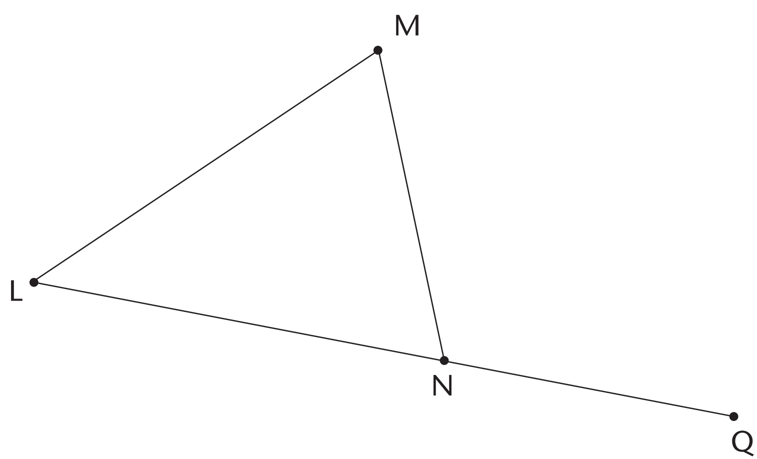
....

ONDERSOEK DIE BUITE- EN BINNEHOEKE VAN 'N DRIEHOEK

1. Kyk na ΔLMN. Skryf die naam van die buitehoek neer. ....
2. Gebruik 'n gradeboog om die binnehoeke en die buitehoek te meet. Skryf die afmetings op die tekening neer.
3. Gebruik jou bevindings in vraag 2 om hierdie som te voltooi:

   $L\widehat{M}N + M\hat{L}N =$ ....

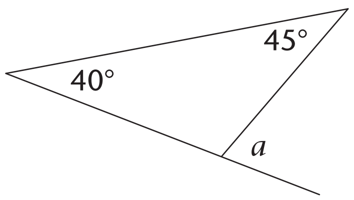
4. Wat is die verband tussen die buitehoek van 'n driehoek en die som van die teenoorstaande binnehoeke? ....



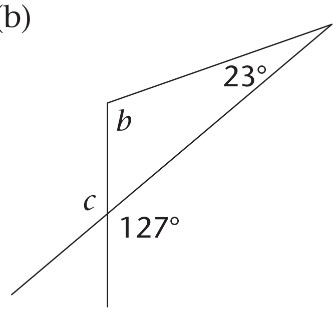
Die **buitehoek** van ’n driehoek is gelyk aan die som van die teenoorstaande binnehoeke.

5. Bepaal die groottes van hoeke *a* tot *f* hier onder sonder om ’n gradeboog te gebruik. Gee redes vir die bewerings wat jy maak soos jy die antwoorde uitwerk.

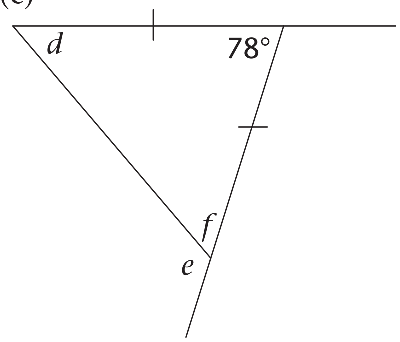
(a)



(b)

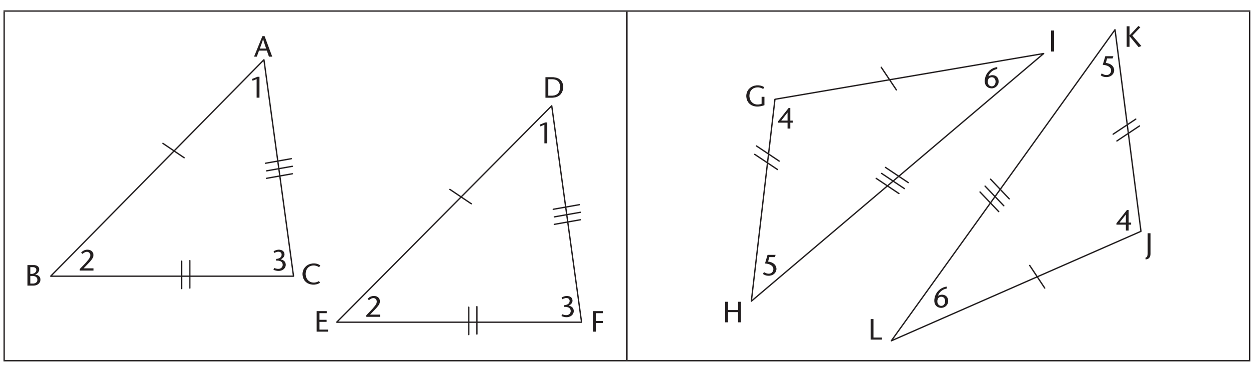


(c)



10.6 Konstruksie van kongruente driehoeke

Twee driehoeke is **kongruent** as hulle presies dieselfde **vorm en grootte** het: hulle kan presies bo-op mekaar pas. Dit beteken al drie ooreenkomstige sye en al drie ooreenkomstige hoeke is ewe groot, soos wat in die volgende twee pare gewys word.



$\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ en $\Delta GHI \equiv \Delta JKL$. In elk van die pare van driehoeke is die ooreenstemmende hoeke en sye gelyk.

MINIMUM VOORWAARDES VIR KONGRUENSIE

Om te bepaal of twee driehoeke kongruent is, hoef ons nie te weet wat die afmetings van *al* drie sye en *al* drie hoeke is nie, maar ons het sekere minimum afmetings nodig. Jy gaan nou ondersoek instel oor watter stelle afmetings slegs een moontlike driehoek gee.

1. Gebruik 'n liniaal, passer en gradeboog om die volgende driehoeke te konstrueer. Minimum afmetings word elke keer gegee.
   (a) As drie sye gegee word: sy, sy, sy (SSS):
   ΔDEF met DE = 7 cm, DF = 6 cm en EF = 5 cm.

   (b) As drie hoeke gegee word: hoek, hoek, hoek (HHH):
   ΔABC met $\hat{A} = 80°$, $\hat{B} = 60°$ en $\hat{C} = 40°$.

(c) As een sy en twee hoeke gegee word: sy, hoek, hoek (SHH):
ΔGHI met $GH = 8$ cm, $\hat{G} = 60°$ en $\hat{H} = 30°$.

(d) As twee sye en 'n ingeslote hoek gegee word: sy, hoek, sy (SHS):
ΔJKL met $JK = 9$ cm, $\hat{K} = 130°$ en $KL = 7$ cm.

(e) As twee sye en 'n hoek wat nie ingesluit is nie gegee word: sy, sy, hoek (SSH):
ΔMNP met $MN = 10$ cm, $\hat{M} = 50°$ en $PN = 8$ cm.

(f) As 'n regte hoek, die skuinssy en 'n sy gegee word (90°SS):
ΔTRS met TR $\perp$ RS, RS = 7 cm en TS = 8 cm.

(g) Driehoek UVW met UV = 6 cm en VW = 4 cm.

2. Vergelyk jou driehoeke met drie klasmaats s'n. Watter van jou driehoeke is kongruent aan hulle s'n? Watter is nie kongruent nie?

....

....

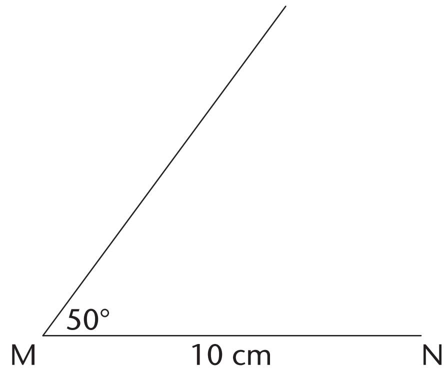
....

....

3. Kyk weer na ΔMNP (vraag 1(e)). Het jy en jou maats ook gesien dat twee verskillende driehoeke geteken kan word wat albei aan die gegewe afmetings voldoen? Een van die driehoeke is stomp en die ander skerp. Die stappe hier onder wys hoekom.

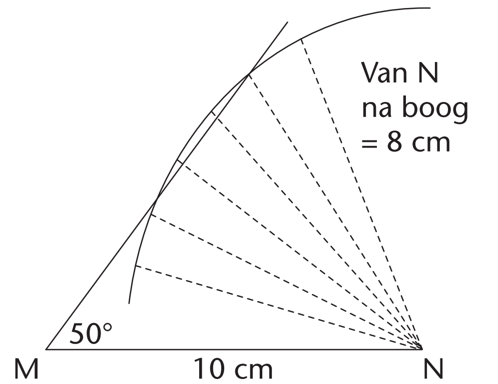
Stap 1

Konstrueer MN = 10 cm en die 50°-hoek by M, al weet jy nie wat die lengte van die onbekende sy (MP) is nie.



Stap 2

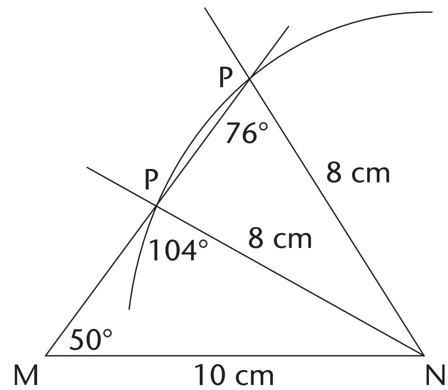
$\hat{N}$ is onbekend, maar NP = 8 cm. Konstrueer dus 'n boog 8 cm van N af. Elke punt op die boog is 8 cm van N af.



Stap 3

Punt P moet 8 cm van N af wees en op die onbekende sy van die driehoek val. Die boog sny die derde sy by twee punte, so P kan by enige punt wees.

Twee driehoeke is dus moontlik en albei voldoen aan die gegewe voorwaardes, d.w.s. MN = 10 cm, NP = 8 cm en $\hat{M}$ = 50°.



4. Voltooi die tabel. Skryf neer of ons 'n kongruente driehoek kan konstrueer as die volgende voorwaardes gegee word.

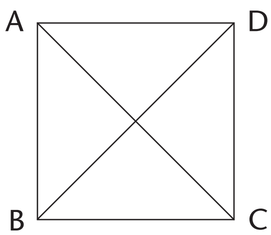
Voorwaardes	Kongruent
3 sye (SSS)	
2 sye (SS)	
3 hoeke (HHH)	
2 hoeke en 'n sy (HHS)	
2 sye en 'n hoek nie tussen die sye nie (SSH)	
2 sye en 'n hoek tussen die sye (SHS)	
Reghoekig met die skuinssy en 'n sy (90°SS)	

10.7 Hoeklyne van vierhoeke

TEKEN HOEKLYNE

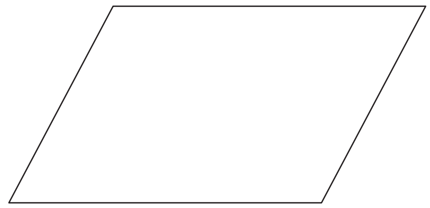
’n **Hoeklyn** is ’n reguit lyn in ’n figuur wat twee hoekpunte van die figuur verbind, waar die hoekpunte nie langs mekaar is nie.

1. Kyk na die vierhoeke hier onder. Die twee hoeklyne van die vierkant is ingeteken: AC en BD.
2. Teken die hoeklyne van die ander vierhoeke hier onder in.

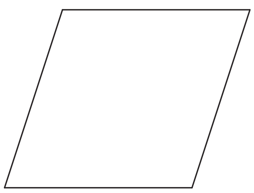


Vierkant

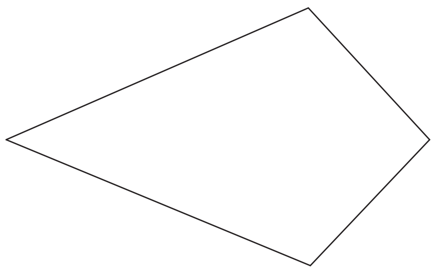
Reghoek



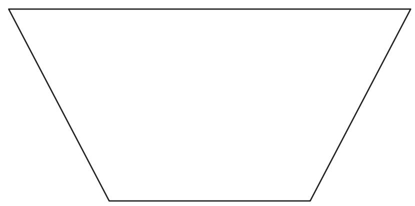
Parallelogram



Ruit



Vlieër



Trapesium

3. Hoeveel sye het ’n vierhoek? ....
4. Hoeveel hoeke het ’n vierhoek? ....
5. Hoeveel hoeklyne het ’n vierhoek? ....

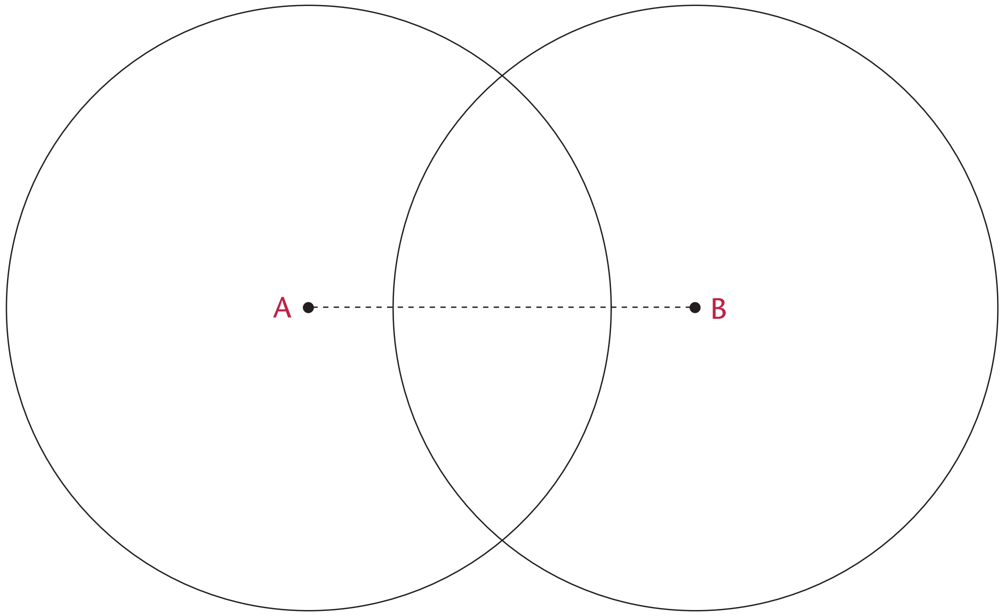
HOEKLYNE VAN ’N RUIT

Op die volgende bladsy is twee oorvleuelende sirkels met middelpunte A en B. Die sirkels is dieselfde grootte.

1. Konstrueer ’n ruit in die sirkels deur die middelpunt van elke sirkel met die snypunte van die sirkels te verbind. Verbind A en B.
2. Konstrueer die middelloodlyn van AB. (Gaan terug na afdeling 10.1 as jy hulp nodig het.) Wat merk jy op?

’n **Middelloodlyn** is ’n lyn wat ’n ander lyn teen ’n regte hoek (90°) in die helfte sny.

....



3. Halveer die hoeklyne mekaar? ....

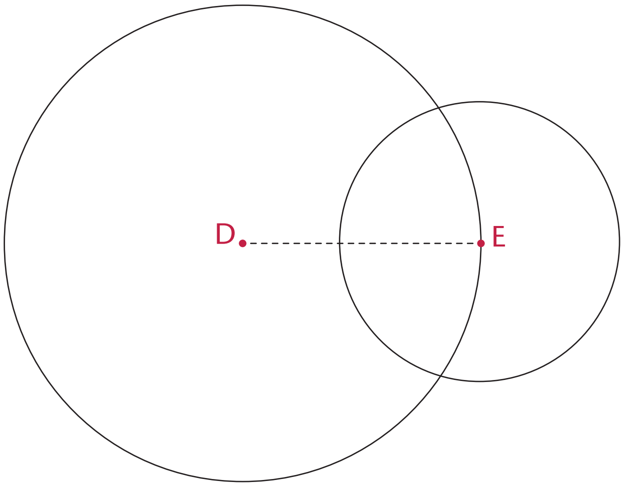
4. Voltooi die sin: Die hoeklyne van 'n ruit sal mekaar altyd ....

....

HOEKLYNE VAN 'N VLIEËR

Hier onder is twee oorvleuelende sirkels met middelpunte D en E. Die sirkels is verskillende groottes.

1. Konstrueer 'n vlieër deur die middelpunte van die sirkels met die snypunte van die sirkels te verbind.
2. Trek die hoeklyne van die vlieër in.
3. Merk al die lyne wat ewe lank is.



4. Is die hoeklyne van die vlieër loodreg? ....

5. Halveer die hoeklyne van die vlieër mekaar?

....

6. Wat is die verskil tussen die hoeklyne van ’n ruit en dié van ’n vlieër?

....

HOEKLYNE VAN PARALLELOGRAMME, REGHOEKE EN VIERKANTE

1. Gebruik die rooster om ’n parallelogram, reghoek en vierkant te teken.

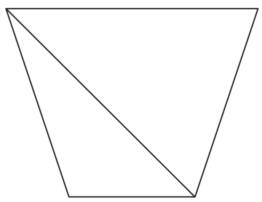
2. Trek die hoeklyne van die vierhoeke hier bo in.
3. Dui op elke figuur al die lengtes van die halveerlyne aan wat ewe lank is. (Gebruik ’n liniaal.)
4. Gebruik die inligting wat jy gekry het om die tabel te voltooi. Vul “ja” of “nee” in.

Vierhoek	Hoeklyne gelyk	Hoeklyne halveer	Hoeklyne sny teen 90°
Parallelogram			
Reghoek			
Vierkant			

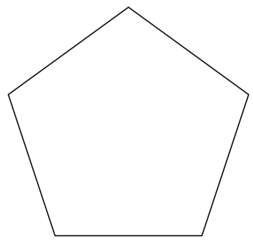
10.8 Hoeke in veelhoeke

ONDERSOEK DIE SOM VAN DIE HOEKE IN VEELHOEKE M.B.V. HOEKLYNE

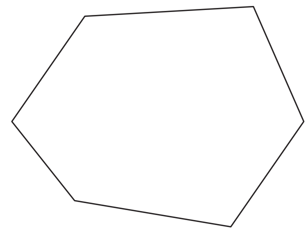
1. Ons kan 'n vierhoek in twee driehoeke verdeel deur een hoeklyn in te trek.
   (a) Trek hoeklyne in om elk van die ander veelhoeke hier onder in so min driehoeke as moontlik te verdeel.
   (b) Skryf die getal driehoeke in elke veelhoek neer.



Vierhoek

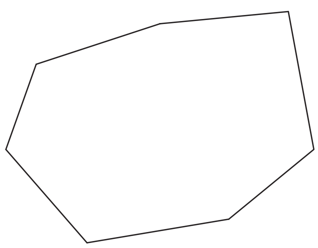


Vyfhoek

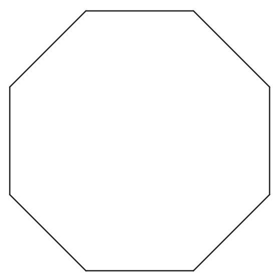


Seshoek

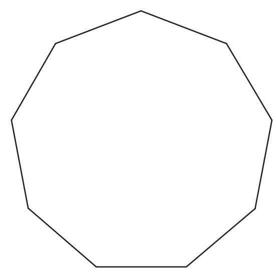
Aantal Δe	2		
Som van ∠e	$2 \times 180° = 360°$		



Sewehoek



Agthoek



Negehoek

Aantal Δe			
Som van ∠e			

2. Die som van die hoeke van een driehoek = 180°. 'n Vierhoek bestaan uit twee driehoeke, so die som van die hoeke in 'n vierhoek = $2 \times 180° = 360°$. Werk die som van die binnehoeke van elk van die ander veelhoeke hier bo uit.

....

....

....

WERKBLAD

1. Pas die woorde in die regterkolom by die definisies in die linkerkolom. Skryf die letter van die definisie langs die bypassende woord neer.

(a) 'n Vierhoek met hoeklyne wat loodreg op mekaar is en wat mekaar halveer	Vlieër
(b) 'n Vierhoek met hoeklyne wat loodreg op mekaar is maar net een van die hoeklyne halveer die ander een	Kongruent
(c) 'n Vierhoek wat ewe lang hoeklyne het wat mekaar halveer	Buitehoek
(d) Figure wat presies dieselfde grootte en vorm het	Ruit
(e) In die helfte sny	Loodlyne
(f) 'n Hoek wat buite 'n geslote figuur gevorm word: dit is tussen 'n sy en 'n verlengde sy van die figuur	Halveer
(g) Lyne wat mekaar teen 'n hoek van 90° sny	Spesiale hoeke
(h) 90°, 45°, 30°, 60°	Reghoek

2. Voltooi die sin: Die buitehoek van 'n driehoek is gelyk aan ....

....

3. (a) Konstrueer ΔPQR met hoeke van 30° en 60°. Die sy tussen die hoeke moet 8 cm wees. Jy mag net 'n liniaal en 'n passer gebruik.

(b) Sal alle driehoeke met dieselfde afmetings hier bo kongruent wees aan ΔPQR? Verduidelik jou antwoord.

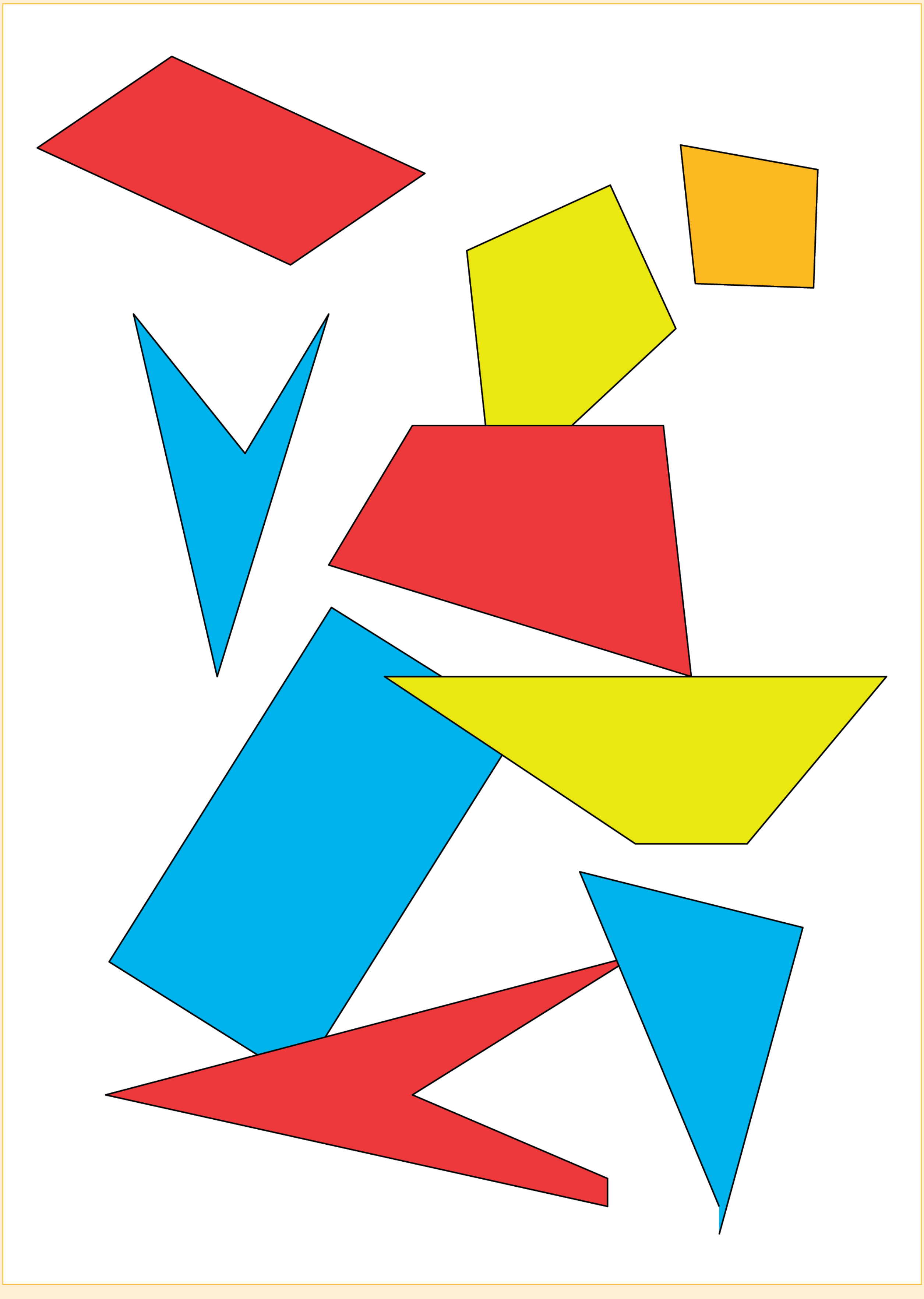
....

....

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 196 2014/07/03 09:35:38 AM

Hoofstuk 11
Meetkunde van 2D-figure

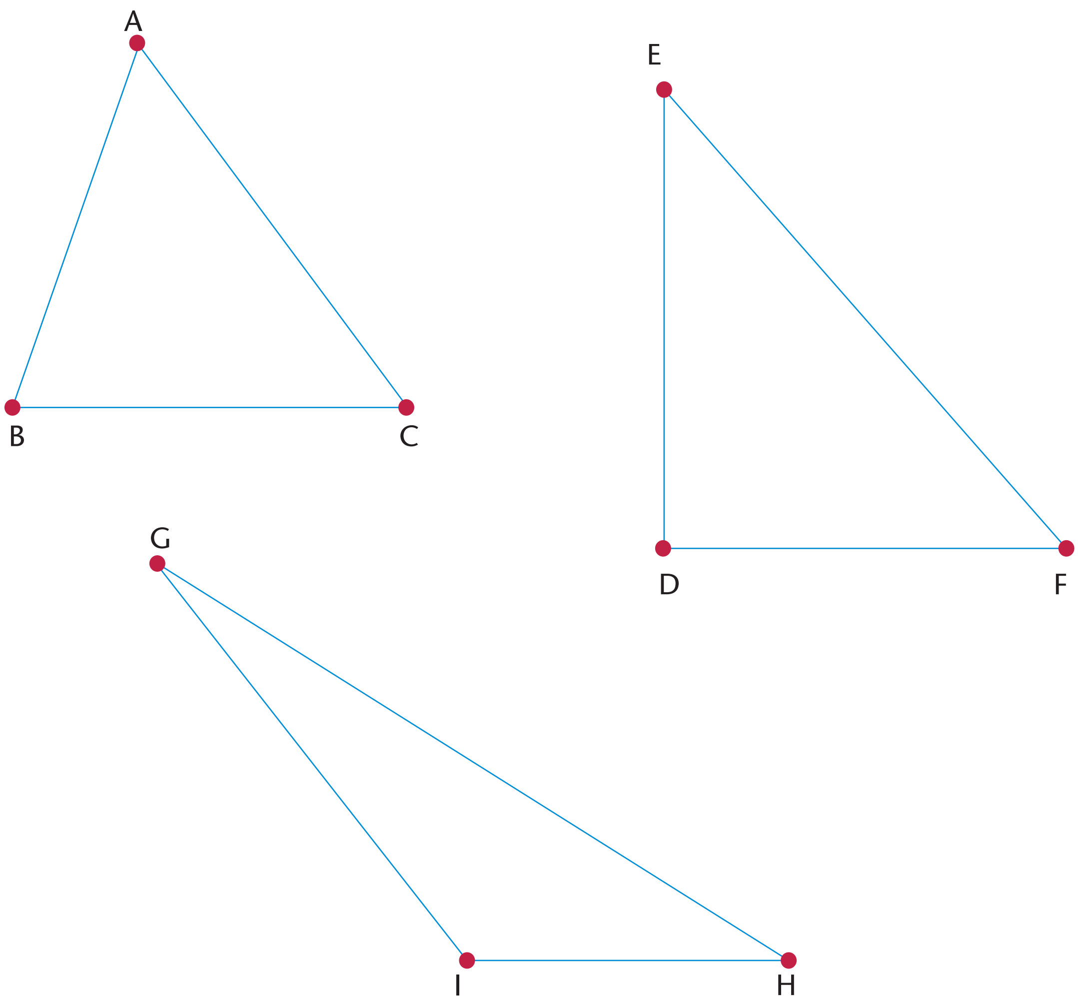
Jy het reeds geleer om tussen gelyksydige, gelykbenige en reghoekige driehoeke te onderskei, asook tussen die volgende vierhoeke: parallelogramme, reghoeke, vierkante, ruite, trapesiums en vlieërs. Jy het die eienskappe van hierdie figure, soos watter sye gelyk of ewewydig is, of watter hoeke gelyk is, ondersoek ten einde die figure te klassifiseer. In hierdie hoofstuk gaan jy jou kennis van die eienskappe van hierdie figure asook algemene eienskappe van driehoeke en vierhoeke gebruik om verdere inligting oor die figure uit te werk. Jy gaan ook meer oor kongruensie en gelykvormigheid van driehoeke leer.



11 Meetkunde van 2D-figure

11.1 Hersiening: Klassifikasie van driehoeke

1. Gebruik 'n gradeboog om die binnehoeke van elk van die volgende driehoeke te meet. Skryf die groottes van die hoeke op die diagramme.



2. Klassifiseer die driehoeke in vraag 1 volgens hulle hoekeienskappe. Kies uit die volgende soorte driehoeke: skerphoekig, stomphoekig en reghoekig.

   (a) ΔABC is 'n .... driehoek, want ....

   (b) ΔEDF is 'n .... driehoek, want ....

   (c) ΔGHI is 'n .... driehoek, want ....

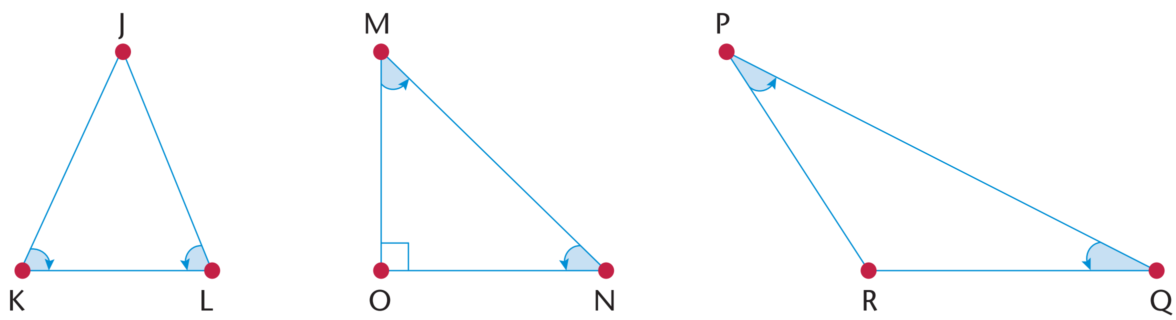
   ....

3. Die gemerkte hoeke in elke driehoek hier onder is gelyk. Klassifiseer die driehoeke volgens die eienskappe van hulle hoeke en sye.

(a) Δ....... is 'n skerphoekige gelykbenige driehoek, want .... en ....

(b) Δ....... is 'n reghoekige gelykbenige driehoek, want .... en ....

(c) Δ....... is 'n stomphoekige gelykbenige driehoek, want .... en ....

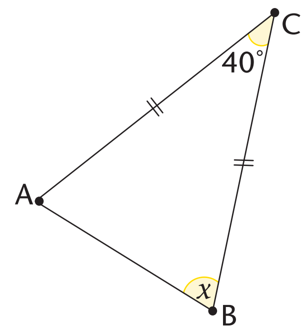


4. Sê vir watter soort driehoek elke bewering waar is. As dit waar is vir alle driehoeke, skryf "Alle driehoeke".

	Bewering	**Waar vir**
(a)	Twee sye van die driehoek is gelyk.	
(b)	Een hoek van die driehoek is stomp.	
(c)	Twee hoeke van die driehoek is gelyk.	
(d)	Al drie hoeke van die driehoek is gelyk aan 60°.	
(e)	Die grootte van 'n buitehoek is gelyk aan die som van die teenoorstaande binnehoeke.	
(f)	Die langste sy van die driehoek is teenoor die grootste hoek.	
(g)	Die som van die twee korter sye van die driehoek is groter as die lengte van die langste sy.	
(h)	Die kwadraat van die lengte van een sy is gelyk aan die som van die kwadrate van die ander sye.	
(i)	Die kwadraat van die lengte van een sy is groter as die som van die kwadrate van die ander sye.	
(j)	Die som van die binnehoeke van die driehoek is 180°.	

11.2 Bepaling van onbekende hoeke in driehoeke

Wanneer jy in meetkunde die grootte van ’n onbekende hoek of lengte van ’n figuur moet bepaal, moet jy ’n rede gee vir elke bewering wat jy maak.
Voltooi die voorbeeld hier onder:

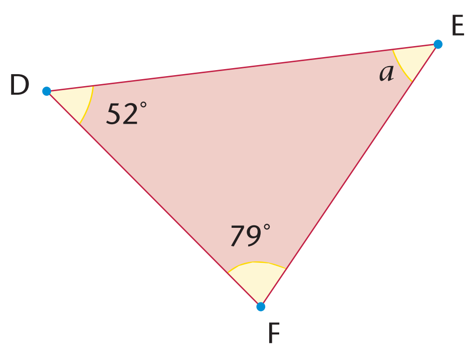


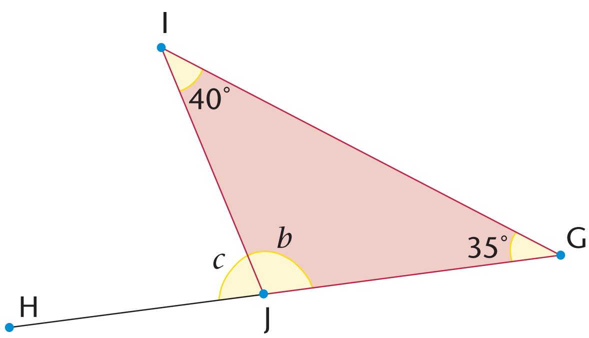
In ΔABC, is $AC = BC$ en $\hat{C} = 40°$. Bepaal die grootte van $\hat{B}$ (word in die diagram as x gewys).

Bewering	**Rede**
$AC = BC$	Gegee
$\therefore\ \hat{A} = \hat{B}$	
$180° = 40° + x + x$	Som $\angle$e Δ
$180° - 40° = 2x$	
$\therefore x =$	

BEPALING VAN ONBEKENDE LENGTES EN HOEKE

1. Bereken die groottes van die onbekende hoeke.





....

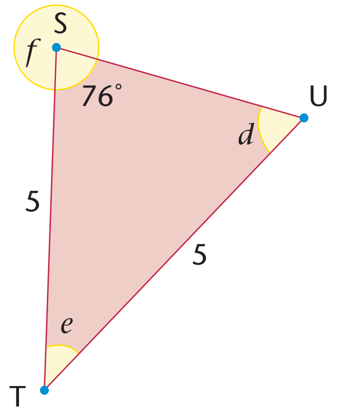
....

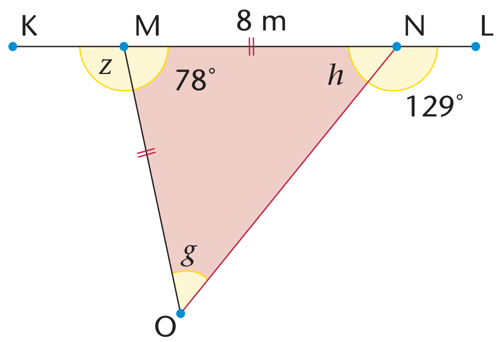
....

....

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 201 2014/07/03 09:35:40 AM

2. Bepaal die groottes van die onbekende hoeke en die lengte van MO.





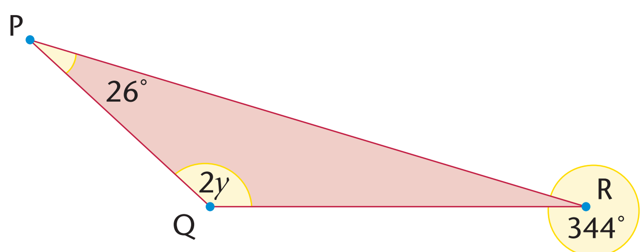
....

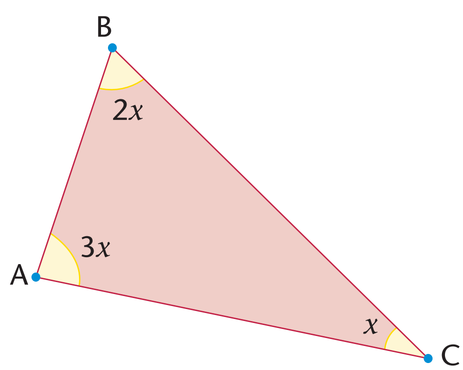
....

....

....

3. Bereken die groottes van y en x.





....

....

....

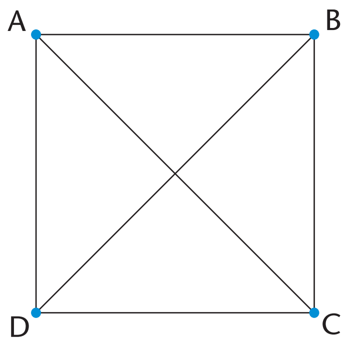
....

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 202 2014/07/03 09:35:40 AM

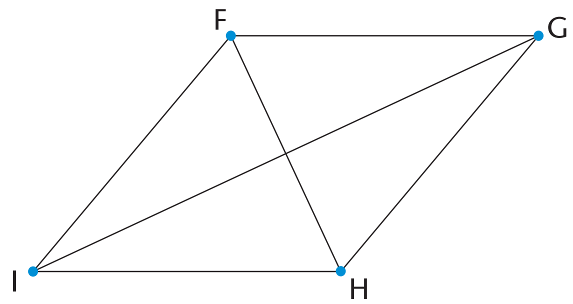
11.3 Vierhoeke

EIENSKAPPE VAN VIERHOEKE

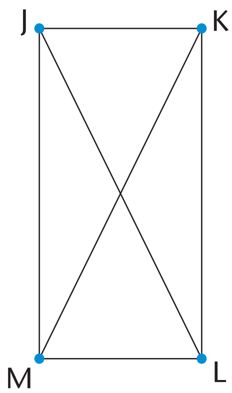
1. Benoem die volgende vierhoeke. Merk in elke figuur die hoeke en sye wat gelyk is. Gebruik waar nodig jou liniaal en gradeboog om hoekgroottes en lengtes te meet.



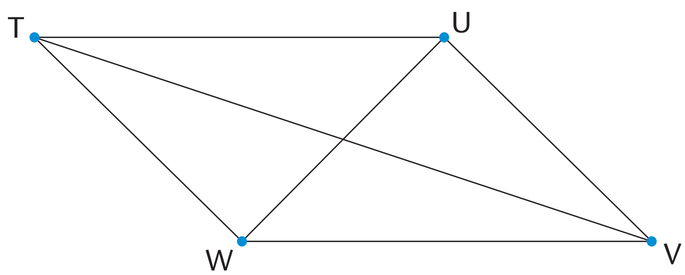
....



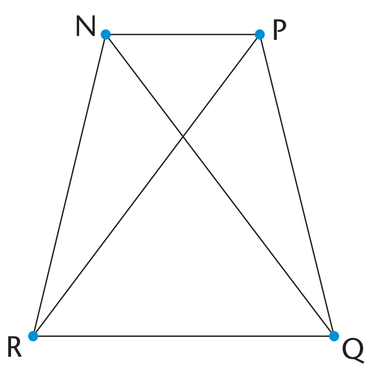
....



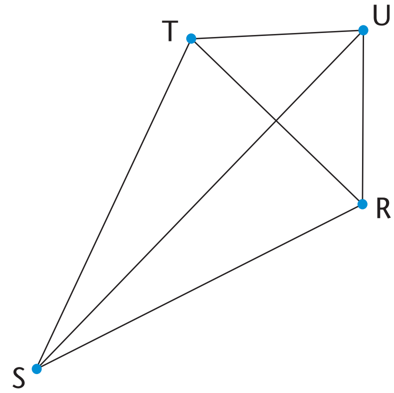
....



....



....



....

2. Voltooi die volgende tabel:

Eienskappe	**Waar vir die volgende vierhoeke**					
	Vierkant	**Ruit**	**Reghoek**	**Parallelogram**	**Vlieër**	**Trapesium**
Ten minste een paar teenoorstaande hoeke is gelyk.	ja	ja	ja	ja	ja	nee
Albei pare teenoorstaande hoeke is gelyk.						
Ten minste een paar aangrensende hoeke is gelyk.						
Al vier hoeke is gelyk.						
Enige twee teenoorstaande sye is gelyk.						
Twee aangrensende sye is gelyk, en die ander twee aangrensende sye is ook gelyk.						
Al vier sye is gelyk.						
Ten minste een paar teenoorstaande sye is ewewydig.						
Enige twee teenoorstaande sye is ewewydig.						
Die twee hoeklyne is loodreg.						
Ten minste een hoeklyn halveer die ander een.						
Die twee hoeklyne halveer mekaar.						
Die twee hoeklyne is gelyk.						
Ten minste een hoeklyn halveer 'n paar teenoorstaande hoeke.						
Albei hoeklyne halveer 'n paar teenoorstaande hoeke.						
Die som van die binnehoeke is 360°.						

3. Kyk na die eienskappe van 'n vierkant en 'n ruit.
   (a) Is al die eienskappe van 'n vierkant ook die eienskappe van 'n ruit? Verduidelik.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (b) Is al die eienskappe van 'n ruit ook die eienskappe van 'n vierkant? Verduidelik.

   ....

   (c) Watter bewering is waar?

   'n Vierkant is 'n spesiale soort ruit. ....

   'n Ruit is 'n spesiale soort vierkant. ....

4. Kyk na die eienskappe van reghoeke en vierkante.
   (a) Is al die eienskappe van 'n vierkant ook die eienskappe van 'n reghoek? Verduidelik.

   ....

   ....

   (b) Is al die eienskappe van 'n reghoek ook die eienskappe van 'n vierkant? Verduidelik.

   ....

   (c) Watter bewering is waar?

   'n Vierkant is 'n spesiale soort reghoek. ....

   'n Reghoek is 'n spesiale soort vierkant. ....

5. Kyk na die eienskappe van parallelogramme en reghoeke.
   (a) Is al die eienskappe van 'n parallelogram ook dié van 'n reghoek? Verduidelik.

   ....

   ....

   (b) Is al die eienskappe van 'n reghoek ook dié van 'n parallelogram? Verduidelik.

   ....

   (c) Watter bewering is waar?

   'n Reghoek is 'n spesiale parallelogram. ....

   'n Parallelogram is 'n spesiale reghoek. ....

6. Kyk na die eienskappe van ’n ruit en ’n parallelogram. Is ’n ruit ’n spesiale soort parallelogram? Verduidelik.

....

7. Vergelyk die eienskappe van ’n vlieër en ’n parallelogram. Waarom is ’n vlieër nie ’n spesiale soort parallelogram nie?

....

....

....

8. Vergelyk die eienskappe van ’n trapesium en ’n parallelogram. Waarom is ’n trapesium nie ’n spesiale soort parallelogram nie?

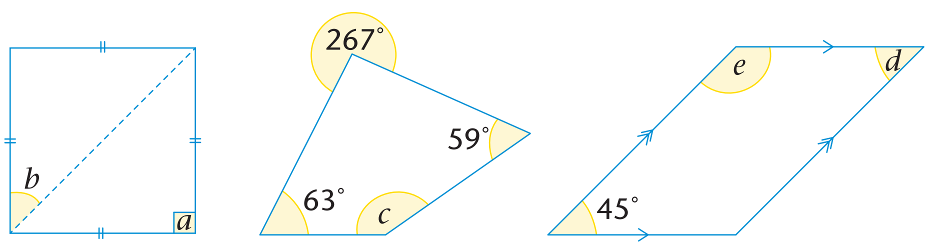
....

....

....

ONBEKENDE SYE EN HOEKE IN VIERHOEKE

1. Bepaal die groottes van hoeke *a* tot *e* in die vierhoeke. Gee redes vir jou antwoorde.

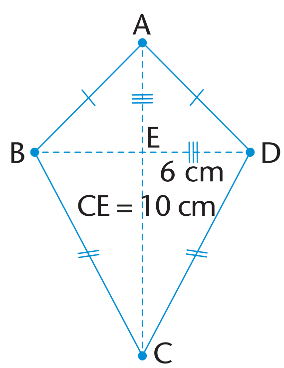


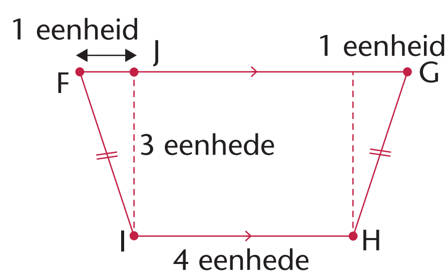
....

....

....

2. Bereken die omtrek van die vierhoeke hier regs. Gee jou antwoorde tot twee desimale plekke.





....

....

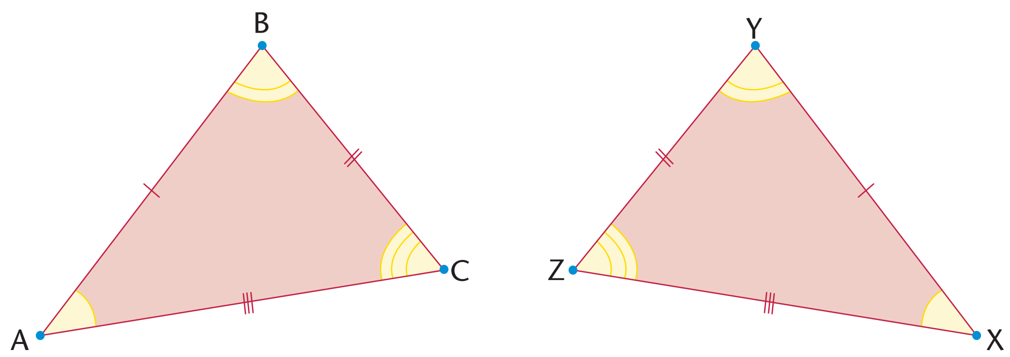
....

11.4 Kongruente driehoeke

DEFINISIE EN NOTASIE VAN KONGRUENTE DRIEHOEKE

As twee driehoeke kongruent is, het hulle presies dieselfde grootte en vorm. As jy een van die driehoeke uitsny en dit bo-op die ander neersit, sal hulle presies op mekaar pas.

> As twee driehoeke kongruent is, is elke sy in die een driehoek gelyk aan elke ooreenstemmende sy in die ander driehoek. Elke hoek in die een driehoek is ook gelyk aan elke ooreenstemmende hoek in die ander driehoek.



In die driehoeke hier bo kan jy sien dat $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

Kongruensiesimbool
$\equiv$ beteken "is kongruent aan"

Die volgorde waarin jy die letters skryf as jy sê dat twee driehoeke kongruent is, is baie belangrik. Die letters van die ooreenstemmende hoekpunte tussen die twee driehoeke moet in dieselfde posisie in die notasie verskyn. Die notasie vir die driehoeke hier bo moet byvoorbeeld $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$ wees, want dit dui aan dat $\hat{A} = \hat{X}$, $\hat{B} = \hat{Y}$, $\hat{C} = \hat{Z}$, $AB = XY$, $BC = YZ$ en $AC = XZ$.

Dit is verkeerd om $\Delta ABC \equiv \Delta ZYX$ te skryf. Alhoewel die letters na dieselfde driehoeke verwys, dui hierdie notasie aan dat $\hat{A} = \hat{Z}$, $\hat{C} = \hat{X}$, $AB = ZY$ en $BC = YX$, en hierdie bewerings is nie waar nie.

Skryf die gelyke hoeke en sye volgens die volgende driehoeke se notasies neer:

1. $\Delta KLM \equiv \Delta PQR$: ....
2. $\Delta FGH \equiv \Delta CST$: ....

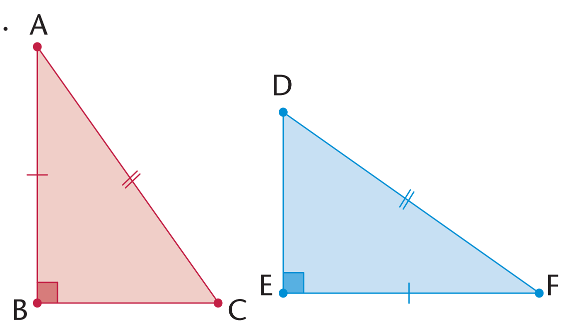
MINIMUM VOORWAARDES VIR KONGRUENTE DRIEHOEKE

In die vorige hoofstuk het jy die minimum voorwaardes ondersoek waaraan twee (of meer) driehoeke moet voldoen sodat hulle as kongruent verklaar kan word.

> Die voorwaardes vir kongruensie:
> - SSS (alle ooreenstemmende sye is gelyk)
> - SHS (twee ooreenstemmende sye en die ingeslote hoek is gelyk)
> - HHS (twee ooreenstemmende hoeke en enige ooreenstemmende sy is gelyk)
> - 90°SS (albei driehoeke het 'n 90°-hoek en het skuinssye gelyk en een ander sy gelyk).

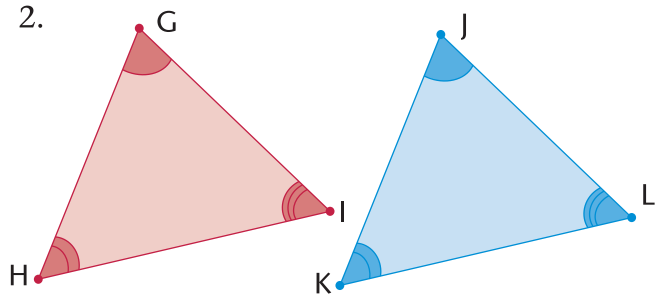
Besluit of die driehoeke in elke paar hier onder kongruent is of nie. Skryf die notasie korrek vir elke kongruente paar en gee 'n rede vir kongruensie.

1.



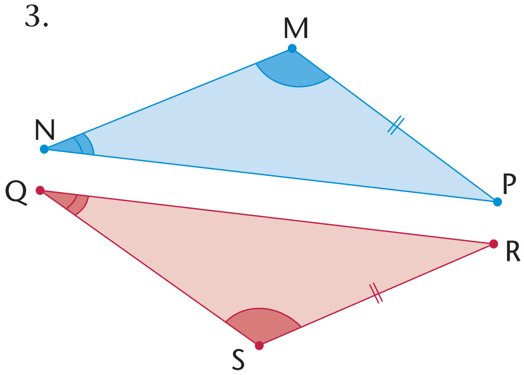
....

2.



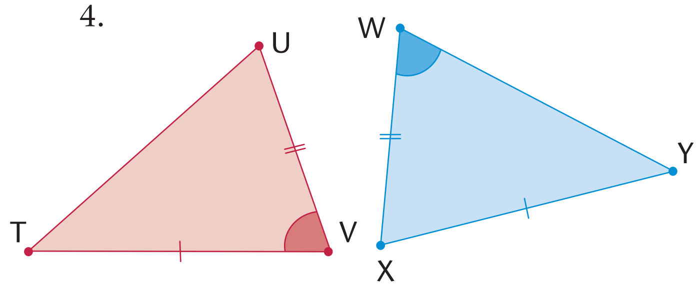
....

3.



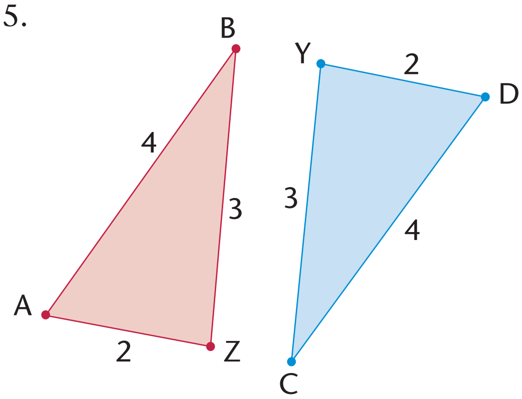
....

4.

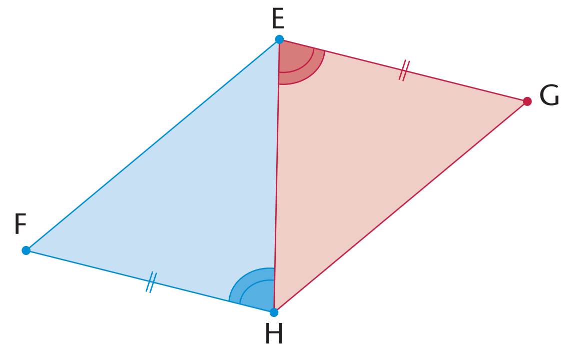


....

5.



6.



....

BEWYS DAT DRIEHOEKE KONGRUENT IS

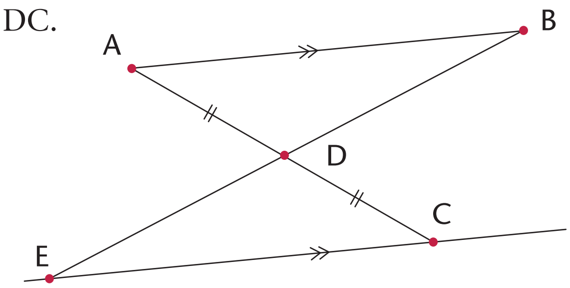
Jy kan dit wat jy oor die minimum voorwaardes vir kongruensie weet gebruik om te bewys dat twee driehoeke kongruent is.

Wanneer jy 'n bewys vir kongruensie gee, onthou die volgende:

- Elke bewering wat jy maak moet 'n rede hê.
- Jy moet drie bewerings gee om te bewys dat enige twee driehoeke kongruent is.
- Gee die rede vir kongruensie.

Voorbeeld:

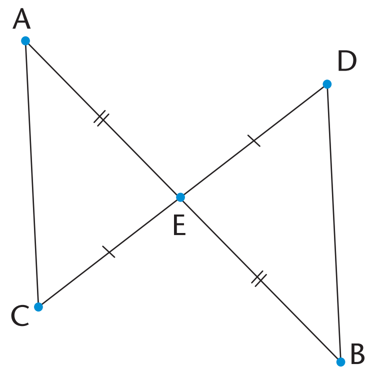
In die skets aan die regterkant is AB || EC en AD = DC. Bewys dat die driehoeke kongruent is.



Oplossing:

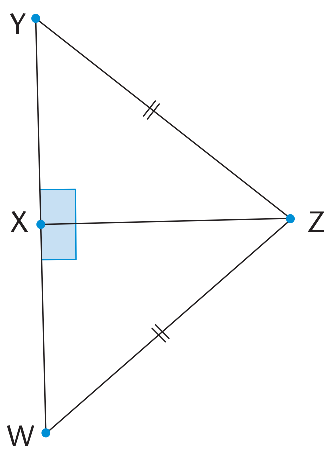
Bewering	Rede
In ΔABD en ΔCED:	
1) AD = DC	Gegee
2) $A\hat{D}B = C\hat{D}E$	Regoorst. $\angle$e
3) $B\hat{A}D = E\hat{C}D$	Verw. $\angle$e (AB || EC)
$\therefore \Delta ABD \equiv \Delta CED$	HHS

1. Bewys dat $\Delta ACE \equiv \Delta BDE$.



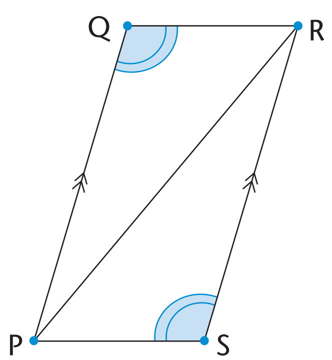
Bewering	Rede
....	....
....	....
....	....
....	....

2. Bewys dat $\Delta WXZ \equiv \Delta YXZ$.



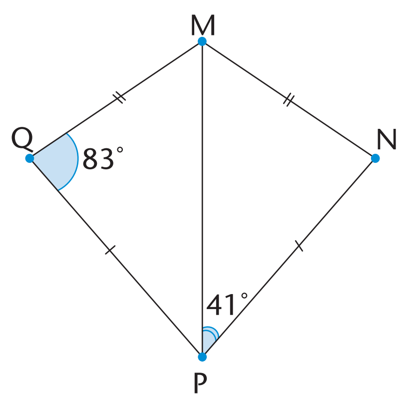
Bewering	Rede
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

3. Bewys dat QR = SP. (Wenk: Bewys eers dat die driehoeke kongruent is.)



Bewering	Rede
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

4. Bewys dat die driehoeke hier onder kongruent is. Bepaal dan die grootte van $Q\hat{M}P$.

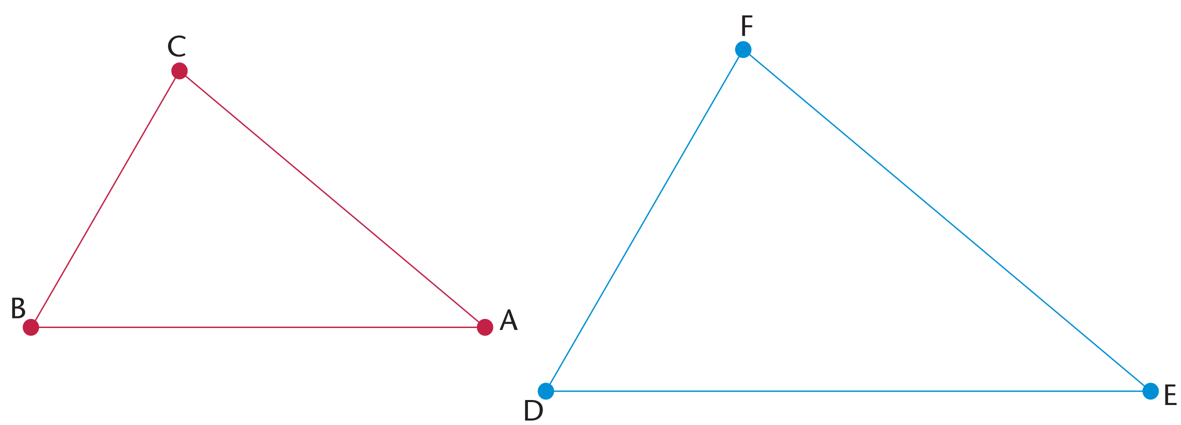


Bewering	Rede
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

11.5 Gelykvormige driehoeke

EIENSKAPPE VAN GELYKVORMIGE DRIEHOEKE

ΔBAC en ΔDEF is gelykvormig. Gelykvormige figure het dieselfde vorm, maar hulle groottes kan verskillend wees.



1. (a) Gebruik 'n gradeboog om die hoeke in elke driehoek hier bo te meet. Voltooi dan die tabel hier onder.

Hoek	Hoek	Wat sien jy raak?
$\hat{B}$ =	$\hat{D}$ =	
$\hat{A}$ =	$\hat{E}$ =	
$\hat{C}$ =	$\hat{F}$ =	

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 211 2014/07/03 09:35:45 AM

(b) Wat kan jy oor die groottes van die hoeke in gelykvormige driehoeke sê?

....

2. (a) Gebruik 'n liniaal om die lengtes van die sye in elke driehoek in vraag 1 te meet. Voltooi dan die tabel hier onder.

Lengte (cm)	**Lengte (cm)**	**Verhouding**
BA =	DE =	BA : DE = $\quad = 1 : 1\frac{1}{3}$
BC =	DF =	BC : DF = $\quad =$
CA =	FE =	CA : FE = $\quad =$

Onthou: Jy lees 'n verhouding soos byvoorbeeld 2 : 1 as "twee tot een".

(b) Wat kan jy oor die verband tussen die sye in gelykvormige driehoeke sê?

....

....

3. Die volgende notasie wys dat die driehoeke gelykvormig is: ΔBAC ||| ΔDEF. Waarom dink jy skryf ons die eerste driehoek as ΔBAC en nie as ΔABC nie?

....

....

....

Die eienskappe van gelykvormige driehoeke:

- Die ooreenstemmende hoeke is gelyk.
- Die ooreenstemmende sye is in dieselfde verhouding tot mekaar.

Notasie vir gelykvormige driehoeke:

As ΔXYZ en ΔPQR gelykvormig is, skryf ons: ΔXYZ ||| ΔPQR.

Soos vir die notasie van kongruente figure, dui die volgorde van die letters in die notasie van gelykvormige driehoeke aan watter hoeke en sye gelyk is.

Vir ΔXYZ ||| ΔPQR:

Hoeke: $\hat{X} = \hat{P}$ en $\hat{Y} = \hat{Q}$ en $\hat{Z} = \hat{R}$

Sye: XY : PQ = XZ : PR = YZ : QR

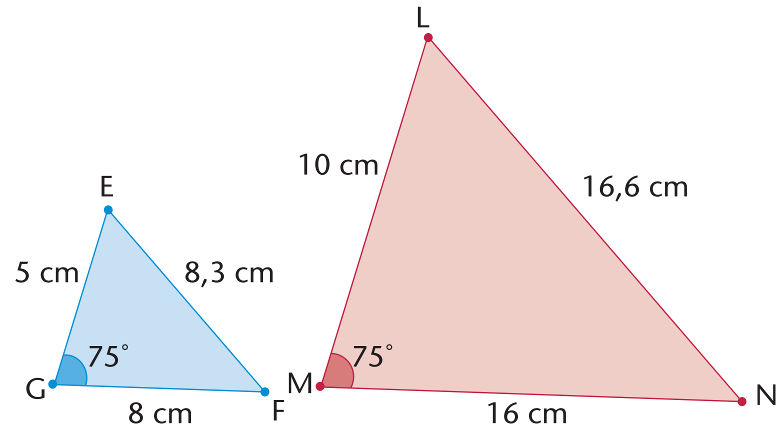
As die driehoeke se hoekpunte in 'n ander volgorde geskryf word, sal die bewerings hier bo onwaar wees.

As jy bewys dat driehoeke gelykvormig is, moet jy óf bewys dat die ooreenstemmende hoeke gelyk is óf dat die sye in dieselfde verhouding tot mekaar is.

WERK MET EIENSKAPPE VAN GELYKVORMIGE DRIEHOEKE

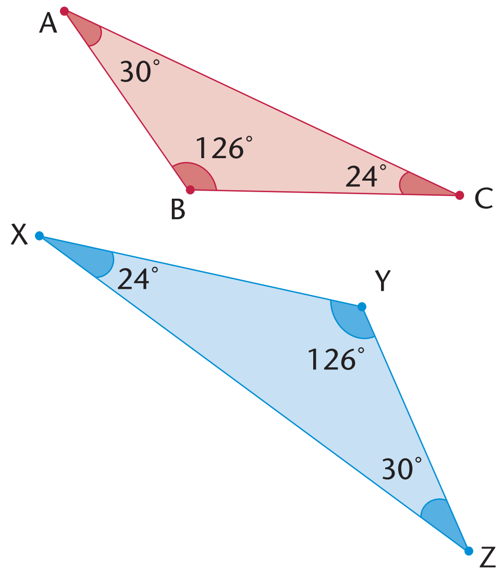
1. Besluit of die pare driehoeke gelykvormig is.

(a)



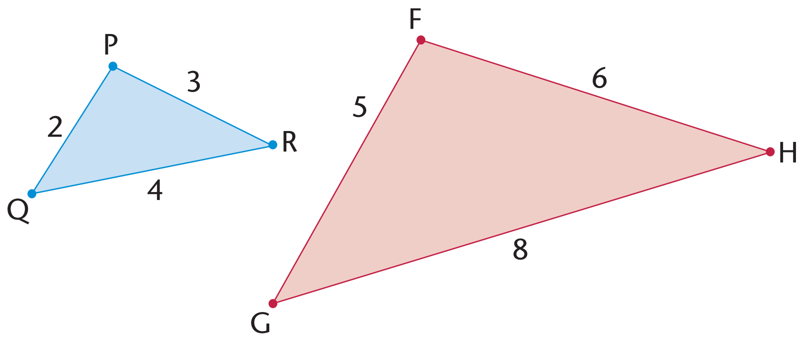
. . . .

(b)



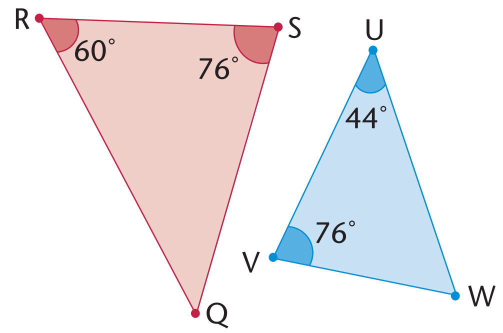
. . . .

(c)



. . . .

(d)



. . . .

2. Doen die volgende taak in jou oefeningboek.

Konstrueer die driehoeke in (a) tot (d) met 'n liniaal en gradeboog. Gebruik jou kennis van gelykvormigheid om die tweede driehoek in elke vraag te teken. Dui die groottes van die ooreenstemmende sye en hoeke op die tweede driehoek aan.

(a) In ΔEFG, $\hat{G} = 75°$, EG = 4 cm en GF = 5 cm.
ΔABC is 'n vergroting van ΔEFG, met sy sye drie keer langer.

(b) In ΔMNO, $\hat{M} = 45°$, $\hat{N} = 30°$ en MN = 5 cm.
ΔPQR is gelykvormig aan ΔMNO. Die sye van ΔMNO en die sye van ΔPQR is in die verhouding $1 : 3$.

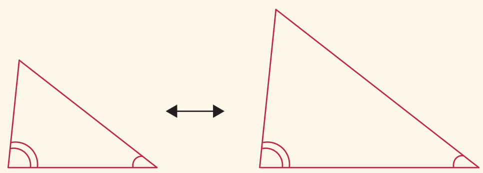
(c) ΔRST is 'n gelykbenige driehoek. $\hat{R} = 40°$, RS is 10 cm en RS = RT.
ΔVWX is gelykvormig aan ΔRST. Die sye van ΔRST en die sye van ΔVWX is in die verhouding $1 : \frac{1}{2}$.

(d) ΔKLM is reghoekig by $\hat{L}$, LM is 7 cm en die skuinssy is 12 cm.
ΔXYZ is gelykvormig aan ΔKLM en sy sye se lengtes is 'n derde van ΔKLM s'n.

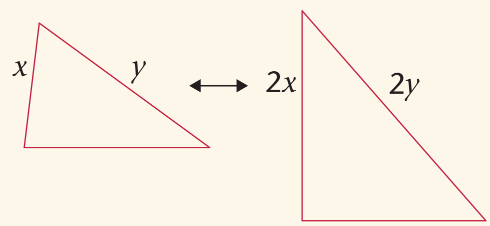
ONDERSOEK: MINIMUM VOORWAARDES VIR GELYKVORMIGHEID

Watter van die volgende is minimum voorwaardes vir gelykvormige driehoeke?

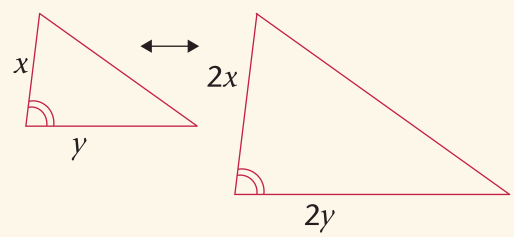
(a) Twee hoeke in een driehoek is gelyk aan twee hoeke in 'n ander driehoek. ....



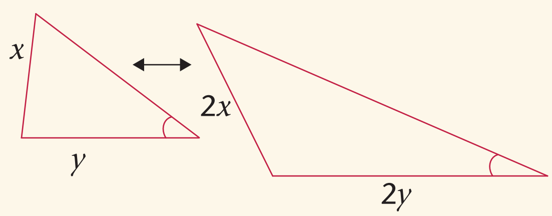
(b) Twee sye van een driehoek is in dieselfde verhouding tot mekaar as twee sye in 'n ander driehoek. ....



(c) Twee sye van een driehoek is in dieselfde verhouding tot mekaar as twee sye van 'n ander driehoek, en die ingeslote hoek is gelyk aan die hoek tussen die ooreenstemmende sye. ....

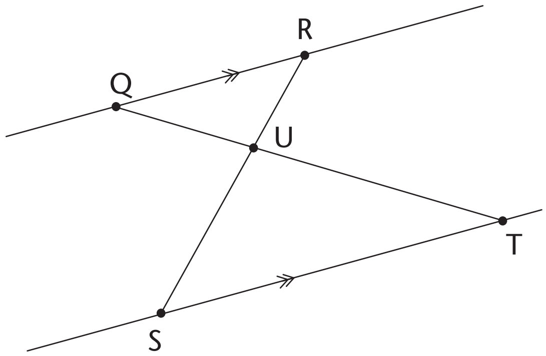


(d) Twee sye van een driehoek is in dieselfde verhouding as twee sye van 'n ander driehoek, en een hoek wat *nie* tussen die twee sye is *nie*, is gelyk aan die ooreenstemmende hoek in die ander driehoek. ....



LOS PROBLEME MET GELYKVORMIGE DRIEHOEKE OP

1. Lynstuk QR is ewewydig aan lynstuk ST.

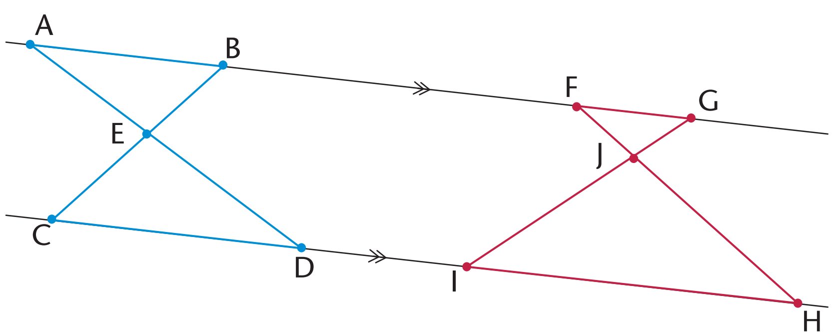


Ewewydige lyne sny mekaar nooit nie. Twee lyne is ewewydig aan mekaar as die afstand tussen hulle dieselfde langs die hele lengte van die lyne is.

Voltooi die volgende bewys dat $\Delta QRU \mid\mid\mid \Delta TSU$:

Bewering	**Rede**
$R\hat{Q}T = Q\hat{T}S$	Verw. $\angle$e
$Q\hat{R}S =$	
$=$	Regoorst. $\angle$e
$\therefore \Delta QRU \mid\mid\mid \Delta TSU$	Gelyke $\angle$e (of HHH)

2. Die volgende snydende lynstukke vorm driehoekpare tussen ewewydige lyne.



(a) Is die driehoeke in elke paar gelykvormig? Verduidelik.

....

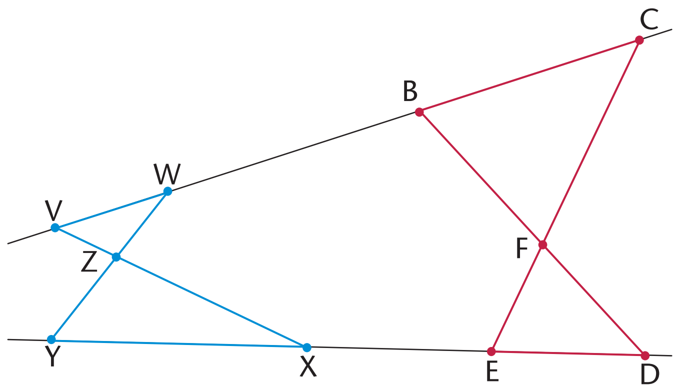
(b) Skryf pare gelykvormige driehoeke neer. ....

(c) Is driehoeke soos dié altyd gelykvormig? Verduidelik hoe jy seker kan wees sonder om elke moontlike driehoekpaar te meet.

....

....

3. Hier regs vorm die snylyne pare van driehoeke tussen lynstukke wat nie ewewydig is nie. Is hierdie pare van driehoeke gelykvormig? Verduidelik waarom of waarom nie.

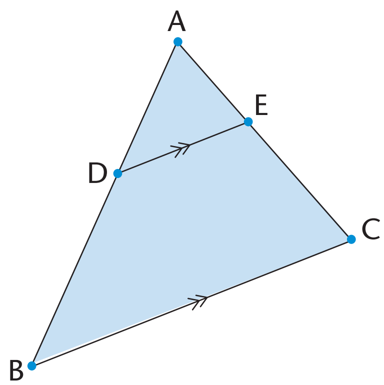


....

....

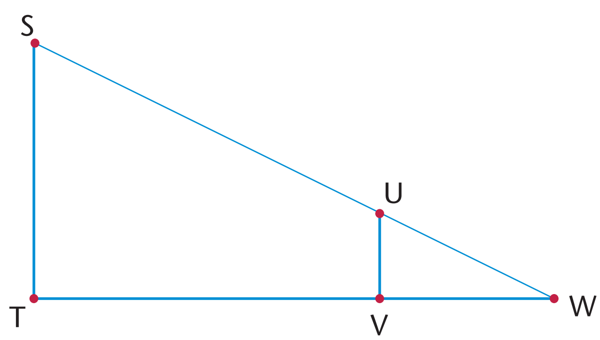
....

4. Kyk na die driehoeke hier onder. DE || BC. Bewys dat ΔABC ||| ΔADE.



Bewering	Rede
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

5. In die diagram hier regs is ST ’n telefoonpaal en UV is ’n vertikale stok. Die stok is 1 m hoog en dit gooi ’n skaduwee van 1,7 m (VW). Die telefoonpaal gooi ’n skaduwee van 5,1 m (TW). Gebruik gelykvormige driehoeke om die hoogte van die telefoonpaal te bereken.



....

....

....

....

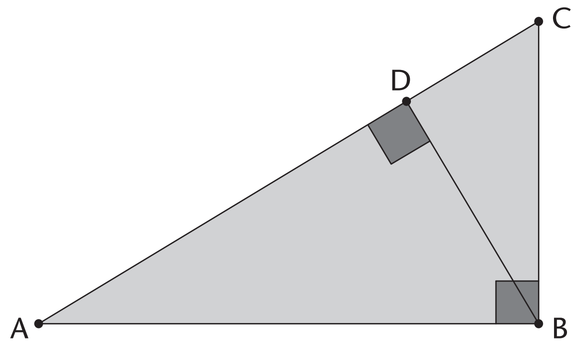
....

....

....

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 216 2014/07/03 09:35:48 AM

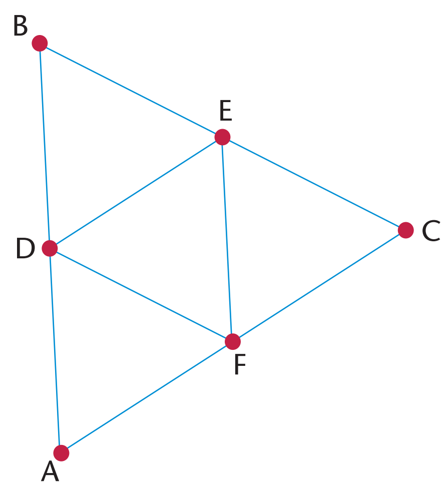
6. Hoeveel gelykvormige driehoeke is daar in die diagram? Verduidelik jou antwoord.



....
....
....
....
....
....
....

11.6 Verrykingsvrae

1. ΔABC hier regs is gelyksydig. D is die middelpunt van AB, E is die middelpunt van BC en F is die middelpunt van AC.



   (a) Bewys dat ΔBDE 'n gelyksydige driehoek is.

....
....
....
....
....
....

   (b) Bepaal al die kongruente driehoeke. Gee 'n bewys vir elkeen.

....
....
....
....
....
....

(c) Noem soveel gelykvormige driehoeke as wat jy kan. Verduidelik hoe jy weet hulle is gelykvormig.

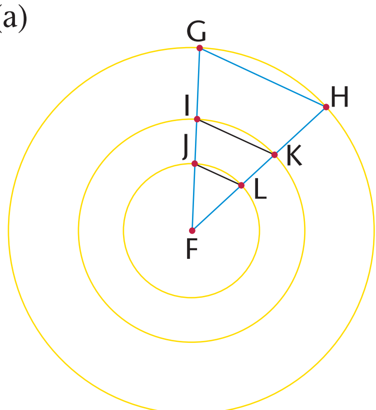
(d) Wat is die verhouding van die ooreenstemmende sye van die gelykvormige driehoeke tot mekaar?

(e) Bewys dat DE ewewydig is aan AC.

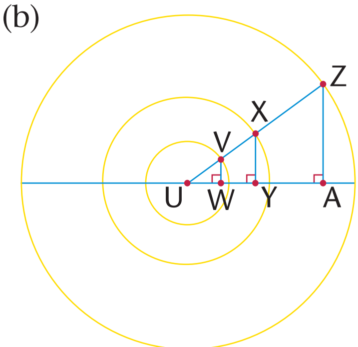
(f) Is DF ewewydig aan BC? Is EF ewewydig aan BA? Verduidelik.

2. Kyk na die gelykvormige driehoeke hier onder wat geteken is deur konsentriese sirkels te gebruik. Verduidelik waarom die driehoeke in elke diagram gelykvormig is.

(a)

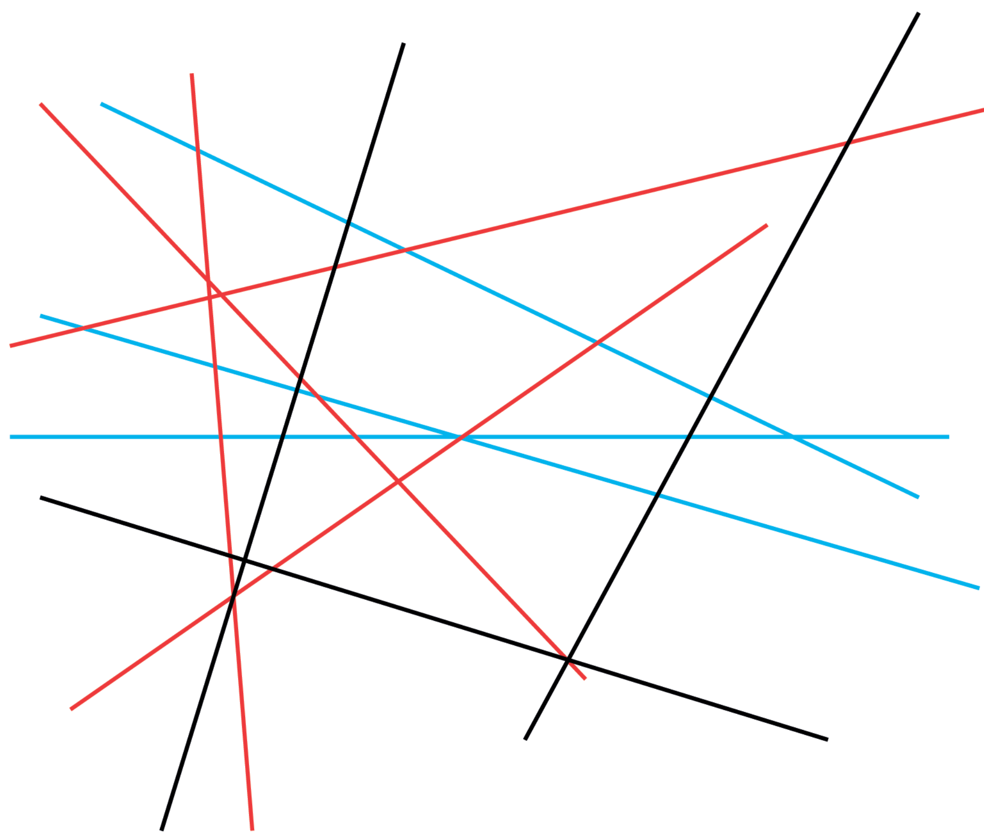


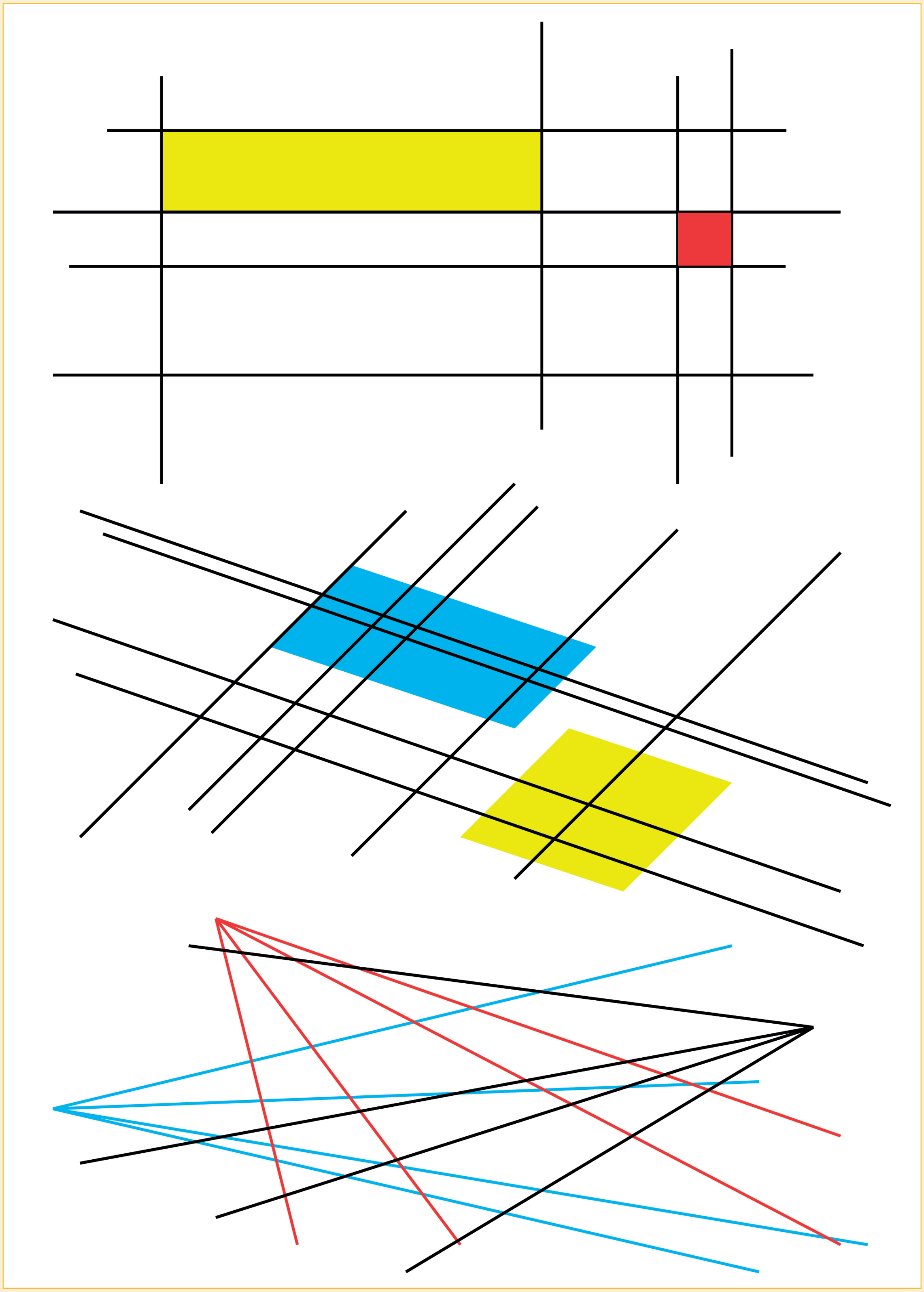
(b)



Hoofstuk 12
Meetkunde van reguit lyne

In Graad 8 het jy verbande tussen hoeke op reguit lyne geïdentifiseer. In hierdie hoofstuk sal jy al die verbande tussen hoeke hersien en duidelike beskrywings van hulle neerskryf.





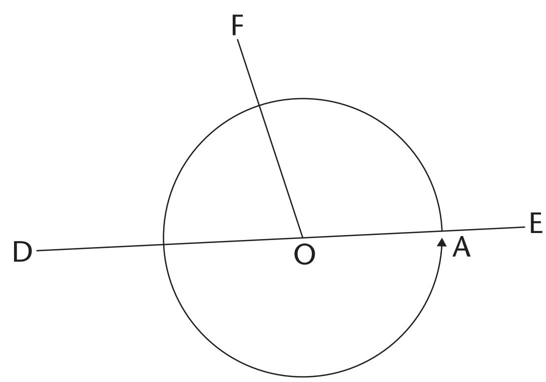
12 Meetkunde van reguit lyne

12.1 Verbande tussen hoeke

Onthou dat 360° een volle rotasie is.

As jy na iets kyk en dan heeltemal in die rondte draai sodat jy weer daarna kyk, het jy deur 'n hoek van 360° gedraai. As jy net halfpad omdraai sodat jy na iets kyk wat agter jou rug was, het jy deur 'n hoek van 180° gedraai.

1. Beantwoord die vrae oor die figuur.



(a) Is $F\hat{O}D$ kleiner of groter as 'n regte hoek?

....

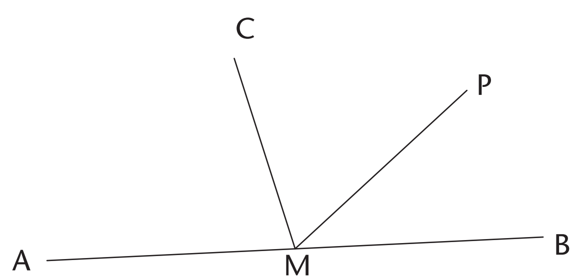
(b) Is $F\hat{O}E$ kleiner of groter as 'n regte hoek?

....

In die figuur hier bo is $F\hat{O}D$ + hoek $F\hat{O}E$ = die helfte van 'n omwenteling = 180°.

Die som van die hoeke op 'n reguit lyn is 180°.
Wanneer die som van hoeke 180° is, word die hoeke **supplementêr** genoem.

2. $C\widehat{M}A$ in die figuur hier regs is 75°.
AMB is 'n reguit lyn.



(a) Hoe groot is $C\widehat{M}B$? ....

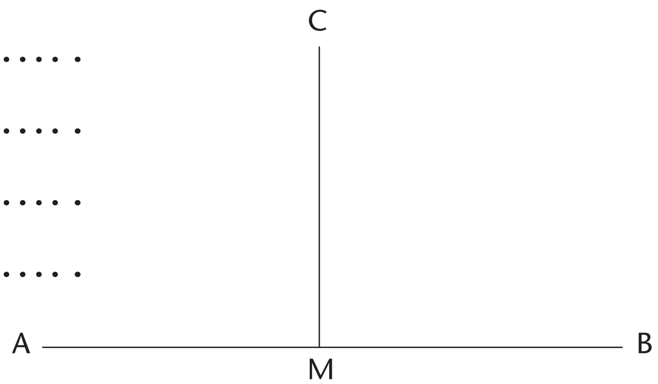
(b) Waarom sê jy so? ....

3. $P\widehat{M}B$ in die figuur in vraag 2 is 40°.
   Hoe groot is $C\widehat{M}P$? ....
   Verduidelik jou redenasie.

   ....

4. In die figuur hier onder is AMB ’n reguit lyn en $A\widehat{M}C$ en $B\widehat{M}C$ is ewe groot.
   (a) Hoe groot is hierdie hoeke? ....
   (b) Hoe weet jy dit?

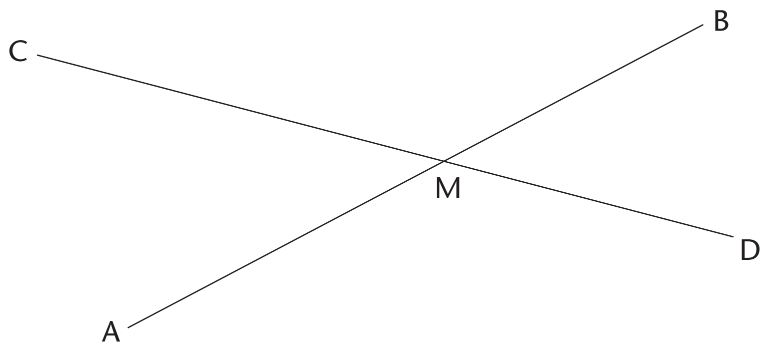
   ....
   ....
   ....
   ....



Wanneer een lyn twee gelyke hoeke vorm waar dit ’n ander lyn ontmoet, sê ons die twee lyne is **loodreg** op mekaar.

Omdat die twee gelyke hoeke hoeke op ’n reguit lyn is, is hul som 180°, dus is elke hoek 90°.

5. In die figuur hier onder sny die lyne AB en CD mekaar in punt M.



   (a) Lyk dit asof $C\widehat{M}A$ en $B\widehat{M}D$ ewe groot is? ....

In hierdie hoofstuk moet jy goeie redes gee vir elke bewering wat jy maak.

(b) Kan jy verduidelik waarom hulle ewe groot is?

....

....

....

(c) Waaraan is $C\widehat{M}A + D\widehat{M}A$ gelyk? .... Waarom sê jy so?

....

(d) Wat is $C\widehat{M}A + C\widehat{M}B$? .... Waarom sê jy so?

....

(e) Is dit waar dat $C\widehat{M}A + D\widehat{M}A = C\widehat{M}A + C\widehat{M}B$? ....

(f) Watter hoek kom aan albei kante van die vergelyking in (e) voor? ....

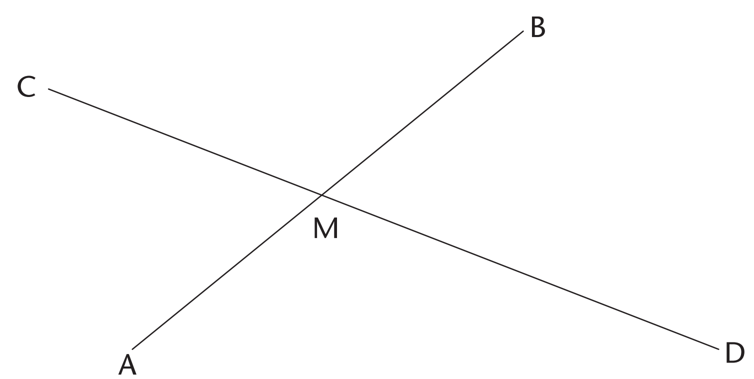
6. Beskou jou antwoorde op vraag 5(c) tot 5(e) sorgvuldig.
Probeer nou jou waarneming in vraag 5(a) verduidelik.

....

....

7. In die figuur hier onder sny AB en CD in M. Vier hoeke word gevorm. $C\widehat{M}B$ en $A\widehat{M}D$ word **regoorstaande** hoeke genoem. $C\widehat{M}A$ en $B\widehat{M}D$ is ook **regoorstaande** hoeke.

Wanneer twee reguit lyne sny, is die regoorstaande hoeke gelyk.

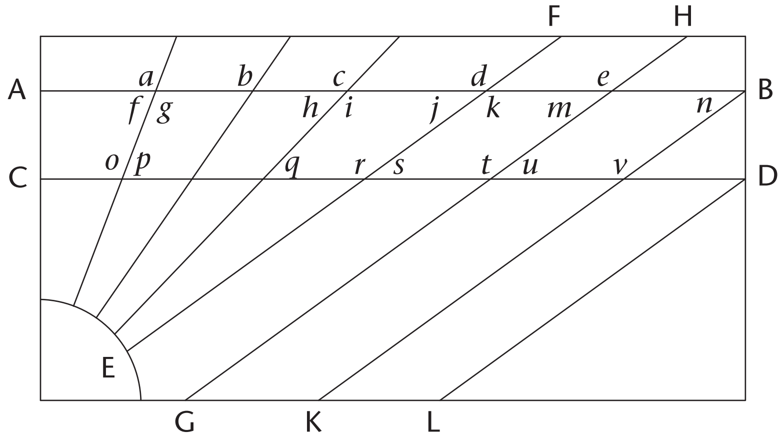


(a) As $B\widehat{M}C = 125°$, hoe groot is $A\widehat{M}D$? ....

(b) Waarom sê jy so? ....

LYNE EN HOEKE

'n Lyn wat ander lyne sny, word 'n **snylyn** genoem.



In die patroon hier bo is AB ewewydig aan CD en EF || GH || KB || LD.

1. Hoeke *a*, *b*, *c*, *d* en *e* is **ooreenkomstige hoeke**. Lyk dit asof die ooreenkomstige hoeke ewe groot is?

   ....

2. Ondersoek of die ooreenkomstige hoeke ewe groot is deur natrekpapier te gebruik. Trek die hoek na wat jy met ander hoeke wil vergelyk en plaas dit bo-op die ander hoeke om uit te vind of hulle ewe groot is. Wat merk jy op?

   ....

3. Hoeke *f*, *h*, *j*, *m* en *n* is ook ooreenkomstige hoeke. Identifiseer al die ander groepe ooreenkomstige hoeke in die patroon.

   ....

   ....

4. Beskryf die posisie van ooreenkomstige hoeke wat gevorm word wanneer 'n snylyn ander lyne sny.

   ....

   ....

   ....

5. Die volgende is pare **verwisselende hoeke**: *g* en *o*; *j* en *s*; en *k* en *r*. Lyk dit asof hierdie hoeke ewe groot is?

....

6. Ondersoek of die verwisselende hoeke ewe groot is deur natrekpapier te gebruik. Trek die hoek na wat jy wil vergelyk en plaas dit bo-op die ander hoek om uit te vind of hulle ewe groot is. Wat merk jy op?

....

....

7. Identifiseer nog twee pare verwisselende hoeke.

....

8. Gee 'n duidelike beskrywing van die relatiewe posisie van verwisselende hoeke wat gevorm word wanneer 'n snylyn ander lyne sny.

....

....

9. Het jy iets opgemerk omtrent party van die pare ooreenkomstige hoeke toe jy die ondersoek in vraag 6 gedoen het? Beskryf jou bevinding.

....

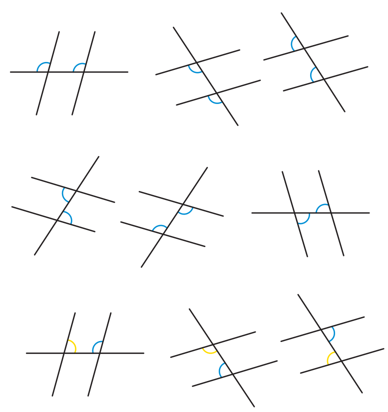
10. Hoeke *f* en *o*; *i* en *q*; en *k* en *s* is almal pare **ko-binnehoeke**. Identifiseer nog drie pare ko-binnehoeke in die patroon.

....

Die hoeke in dieselfde relatiewe posisie by elke snyding waar 'n reguit lyn twee ander lyne kruis, word **ooreenkomstige hoeke** genoem.

Hoeke aan verskillende kante van 'n snylyn en tussen twee ander lyne word **verwisselende hoeke** genoem.

Hoeke aan dieselfde kant van die snylyn en tussen twee ander lyne word **ko-binnehoeke** genoem.

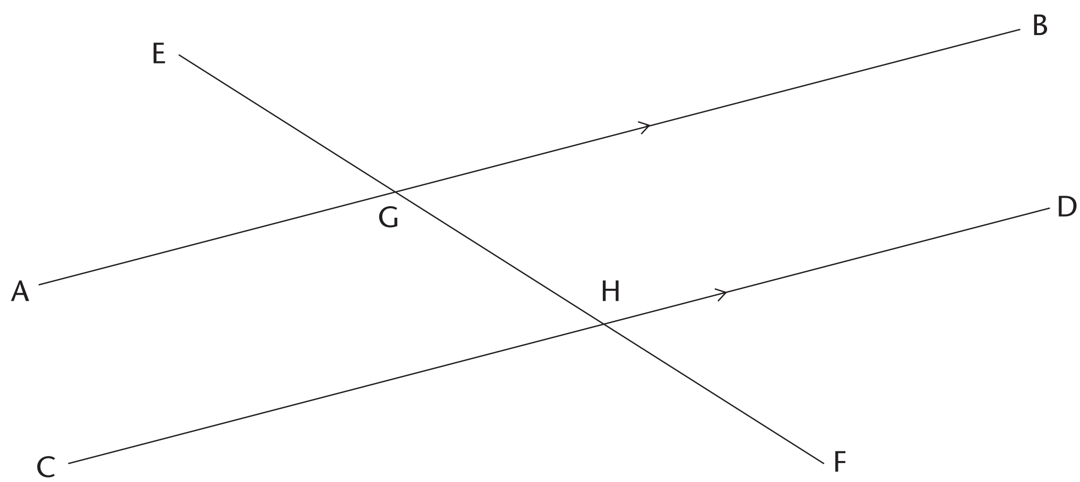


HOEKE DEUR EWEWYDIGE LYNE GEVORM

Ooreenkomstige hoeke

Die lyne AB en CD hier onder ontmoet nooit nie. Jy weet reeds dat lyne wat nooit ontmoet nie en ’n vaste afstand van mekaar af is, ewewydige lyne genoem word. Ons skryf AB || CD.

Ewewydige lyne het dieselfde rigting, d.w.s. hulle vorm **gelyke ooreenkomstige hoeke** met enige lyn wat hulle sny.



Die lyn EF sny AB by G en CD by H.
EF is ’n snylyn wat ewewydige lyne AB en CD sny.

1. (a) Beskou $E\hat{G}A$ en $E\hat{H}C$ in die figuur hier bo sorgvuldig. Hulle word **ooreenkomstige hoeke** genoem. Lyk dit asof hulle ewe groot is?

   ....

   (b) Meet die twee hoeke om te kontroleer of hulle ewe groot is. Wat merk jy op?

   ....

2. Gestel $E\hat{G}A$ en $E\hat{H}C$ is regtig ewe groot. Sal $E\hat{G}B$ en $E\hat{H}D$ dan ook ewe groot wees? Gee redes om jou antwoord te ondersteun.

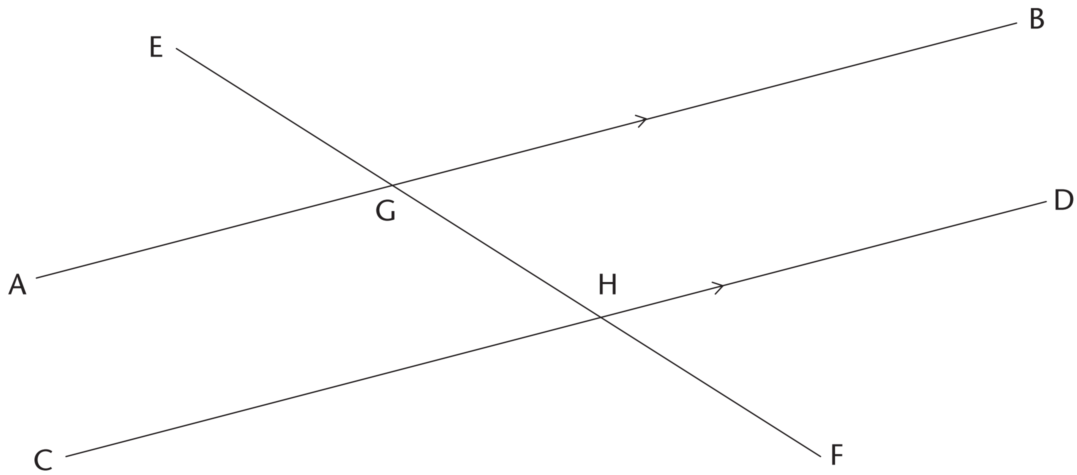
   ....

   ....

Wanneer twee **ewewydige** lyne deur 'n snylyn gesny word, is die ooreenkomstige hoeke ewe groot.

Verwisselende hoeke

$B\hat{G}F$ en $C\hat{H}E$ hier onder word **verwisselende hoeke** genoem. Hulle is aan teenoorgestelde kante van die snylyn.



3. Dink jy die hoeke $A\hat{G}F$ en $D\hat{H}E$ moet ook verwisselende hoeke genoem word?

....

....

4. Dink jy verwisselende hoeke is ewe groot? Ondersoek deur natrekpapier soos vroeër te gebruik of meet die hoeke akkuraat met jou gradeboog.
   Wat merk jy op?

....

Wanneer **ewewydige** lyne deur 'n snylyn gesny word, is die verwisselende hoeke ewe groot.

5. Probeer verduidelik waarom verwisselende hoeke gelyk is wanneer die lyne wat gesny word ewewydig is. Hou in gedagte dat ooreenkomstige hoeke ewe groot is.

....

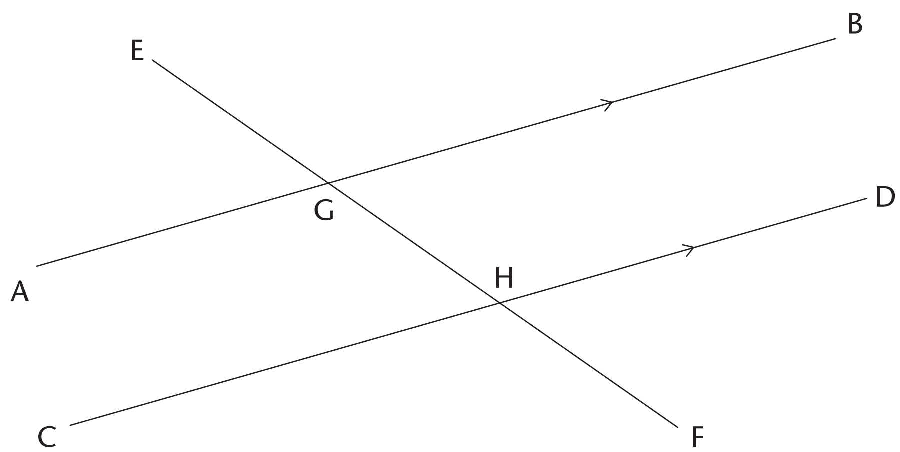
....

Deur die volgende vrae te beantwoord behoort jy te kan sien hoe jy kan verduidelik waarom verwisselende hoeke gelyk is as ewewydige lyne deur 'n snylyn gesny word.

6. Is $B\hat{G}H$ en $D\hat{H}F$ in die figuur ooreenkomstige hoeke? ....
   Wat weet jy van ooreenkomstige hoeke?

   ....

   ....



7. (a) Wat kan jy sê van $B\hat{G}H + A\hat{G}H$? Gee 'n rede.

   ....

   (b) Wat kan jy sê van $D\hat{H}G + C\hat{H}G$? Gee 'n rede.

   ....

   (c) Is dit waar dat $B\hat{G}H + A\hat{G}H = D\hat{H}G + C\hat{H}G$? Verduidelik.

   ....

   (d) Sal die vergelyking in (c) steeds waar wees as jy $B\hat{G}H$ aan die linkerkant met $C\hat{H}G$ vervang?

   ....

   ....

8. Beskou jou werk in vraag 7 sorgvuldig en skryf 'n verduideliking van waarom verwisselende hoeke gelyk is wanneer twee ewewydige lyne deur 'n snylyn gesny word.

   ....

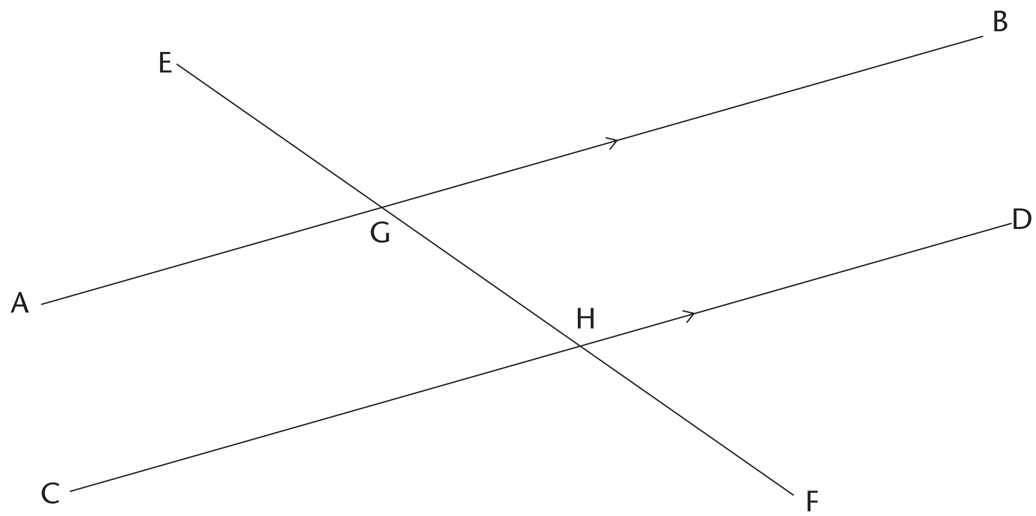
   ....

   ....

Ko-binnehoeke

Die hoeke $A\hat{G}H$ en $C\hat{H}G$ in die figuur hier onder word **ko-binnehoeke** genoem. Hulle is aan dieselfde kant van die snylyn.

"ko-" beteken *saam.*



9. (a) Wat weet jy van $C\hat{H}G + D\hat{H}G$? Verduidelik.

....

(b) Wat weet jy van $B\hat{G}H + A\hat{G}H$? Verduidelik.

....

(c) Wat weet jy van $B\hat{G}H + C\hat{H}G$? Verduidelik.

....

(d) Watter gevolgtrekking kan jy maak oor $A\hat{G}H + C\hat{H}G$? Gee gedetailleerde redes vir jou gevolgtrekking.

....

....

....

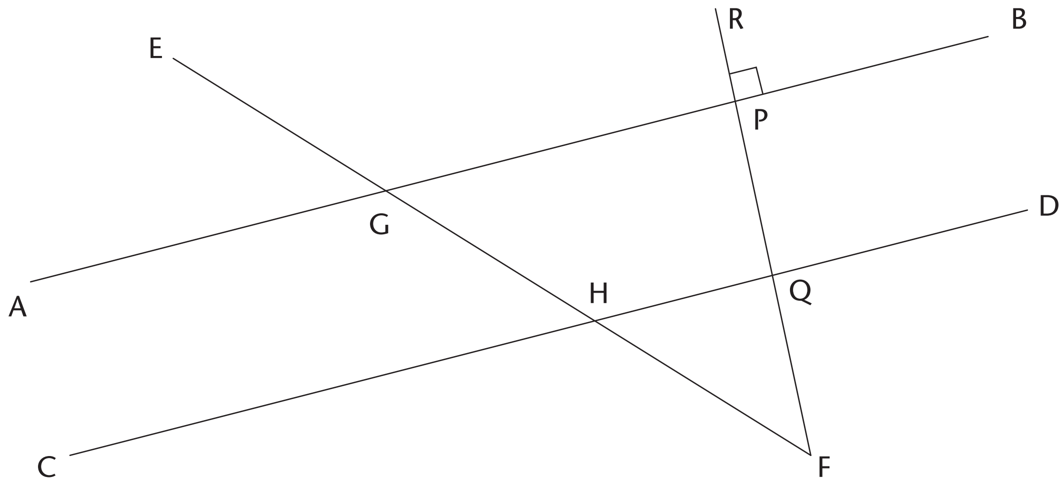
....

Wanneer twee ewewydige lyne deur 'n snylyn gesny word, is die som van twee ko-binnehoeke 180°.

'n Ander manier om dit te sê, is dat die twee ko-binnehoeke **supplementêr** is.

12.2 Identifiseer en benoem hoeke

1. In die figuur hier onder is die lyn RF loodreg op AB.



(a) Is RF ook loodreg op CD? Regverdig jou antwoord.

....

....

(b) Noem vier pare supplementêre hoeke in die figuur. Sê in elke geval hoe jy weet dat die hoeke supplementêr is.

....

....

....

....

(c) Noem vier pare ko-binnehoeke in die figuur.

....

(d) Noem vier pare ooreenkomstige hoeke in die figuur.

....

....

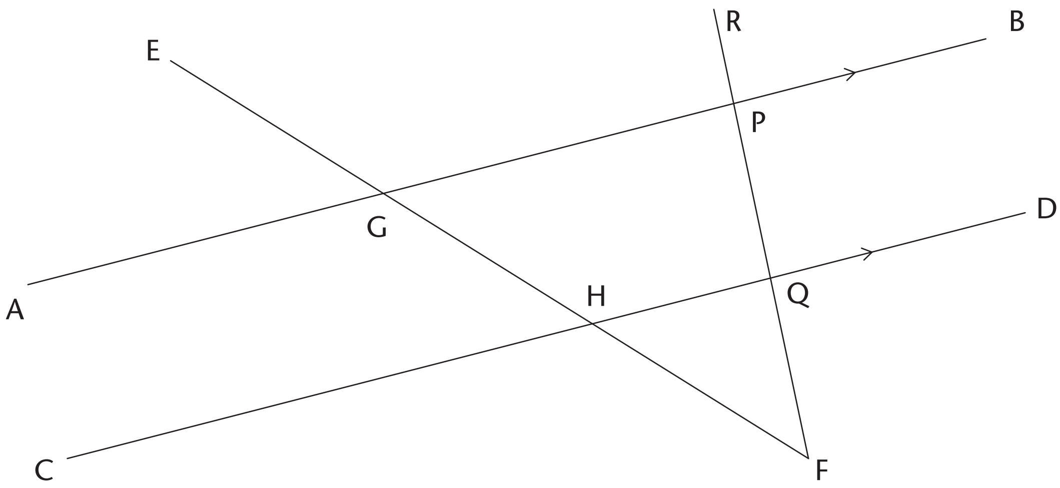
(e) Noem vier pare verwisselende hoeke in die figuur.

....

....

....

2. Daar word nou vir jou gegee dat AB en CD in die figuur hier onder ewewydig is.



(a) Indien dit gegee word dat RF loodreg op AB is, sal RF ook loodreg wees op CD? Regverdig jou antwoord.

....

....

(b) Noem al die pare supplementêre hoeke in die figuur. Sê in elke geval hoe jy weet dat die hoeke supplementêr is.

....

....

....

....

(c) Gestel $E\hat{G}A = x$. Gee die grootte van soveel hoeke in die figuur as wat jy kan in terme van x. Gee elke keer 'n rede vir jou antwoord.

....

....

....

....

....

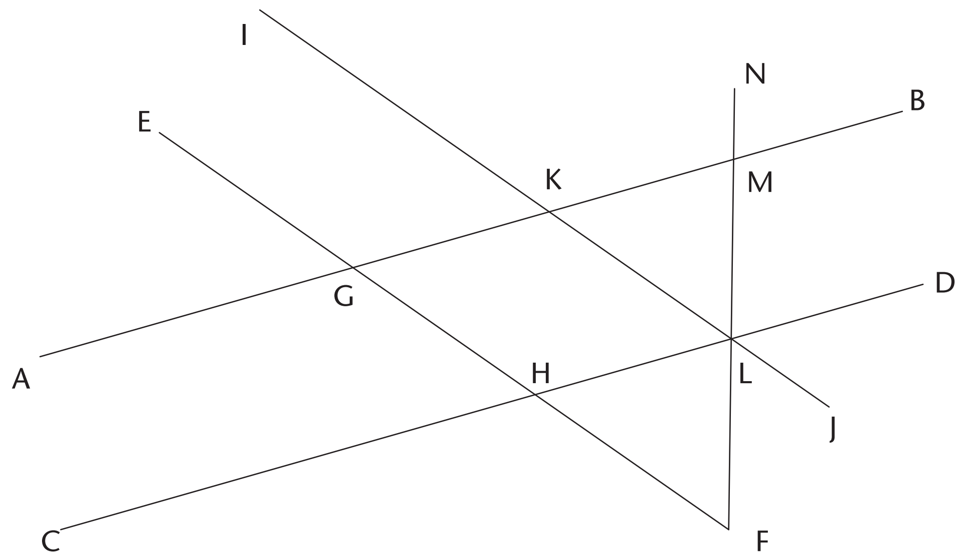
....

....

12.3 Los probleme op

Wanneer jy probleme in meetkunde oplos, kan jy 'n snelskrifmanier gebruik om jou redes te skryf. As twee hoeke byvoorbeeld ewe groot is omdat hulle ooreenkomstige hoeke is, kan jy (ooreenk. ∠e, AB || CD) as die rede skryf.

1. Lynstukke AB en CD in die figuur hier onder is ewewydig. EF en IJ is ook ewewydig. Merk hierdie feite op die figuur en beantwoord dan die vrae.



(a) Noem vyf hoeke in die figuur wat gelyk is aan $G\hat{H}D$. Gee 'n rede vir elkeen van jou antwoorde.

....

....

....

....

(b) Noem al die hoeke in die figuur wat gelyk is aan $A\hat{G}H$. Gee 'n rede vir elkeen van jou antwoorde.

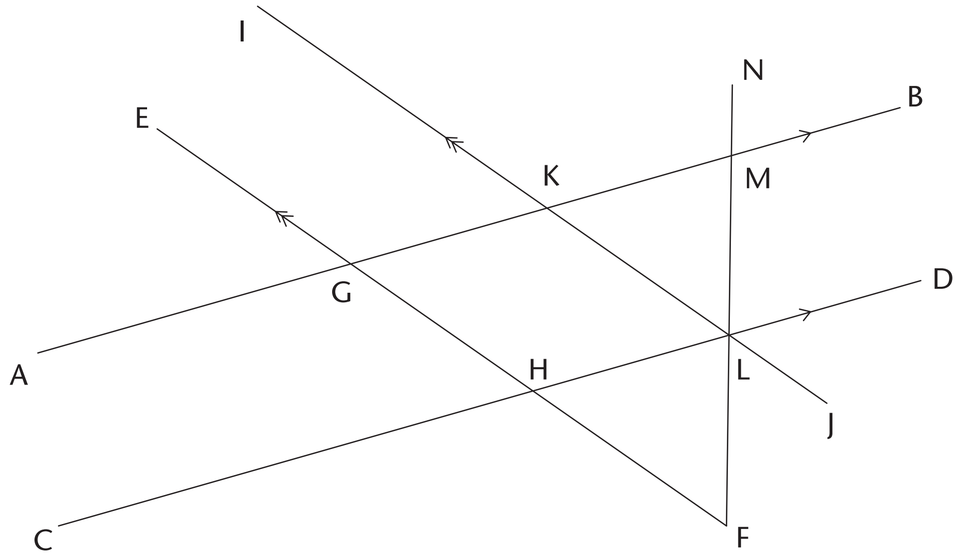
....

....

....

....

2. AB en CD in die figuur hier onder is ewewydig. EF en IJ is ook ewewydig.
$N\widehat{M}B = 80°$ en $J\hat{L}F = 40°$.



Bepaal die grootte van soveel hoeke in die figuur as wat jy kan en gee redes.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

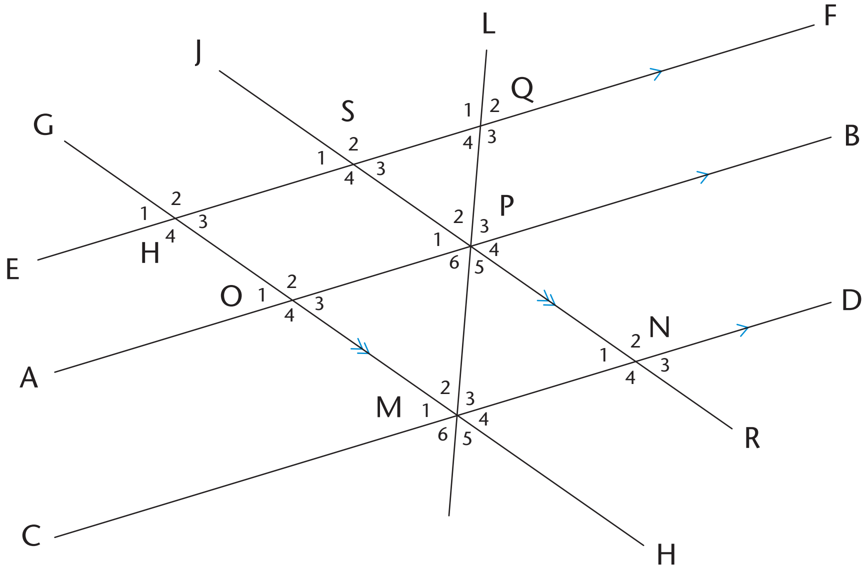
....

....

....

....

3. In die figuur hier onder is AB || CD; EF || AB; JR || GH. $P\hat{M}N = 60°$ en $R\hat{N}D = 50°$.



(a) Bepaal die grootte van soveel hoeke in die figuur as wat jy kan en gee redes.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

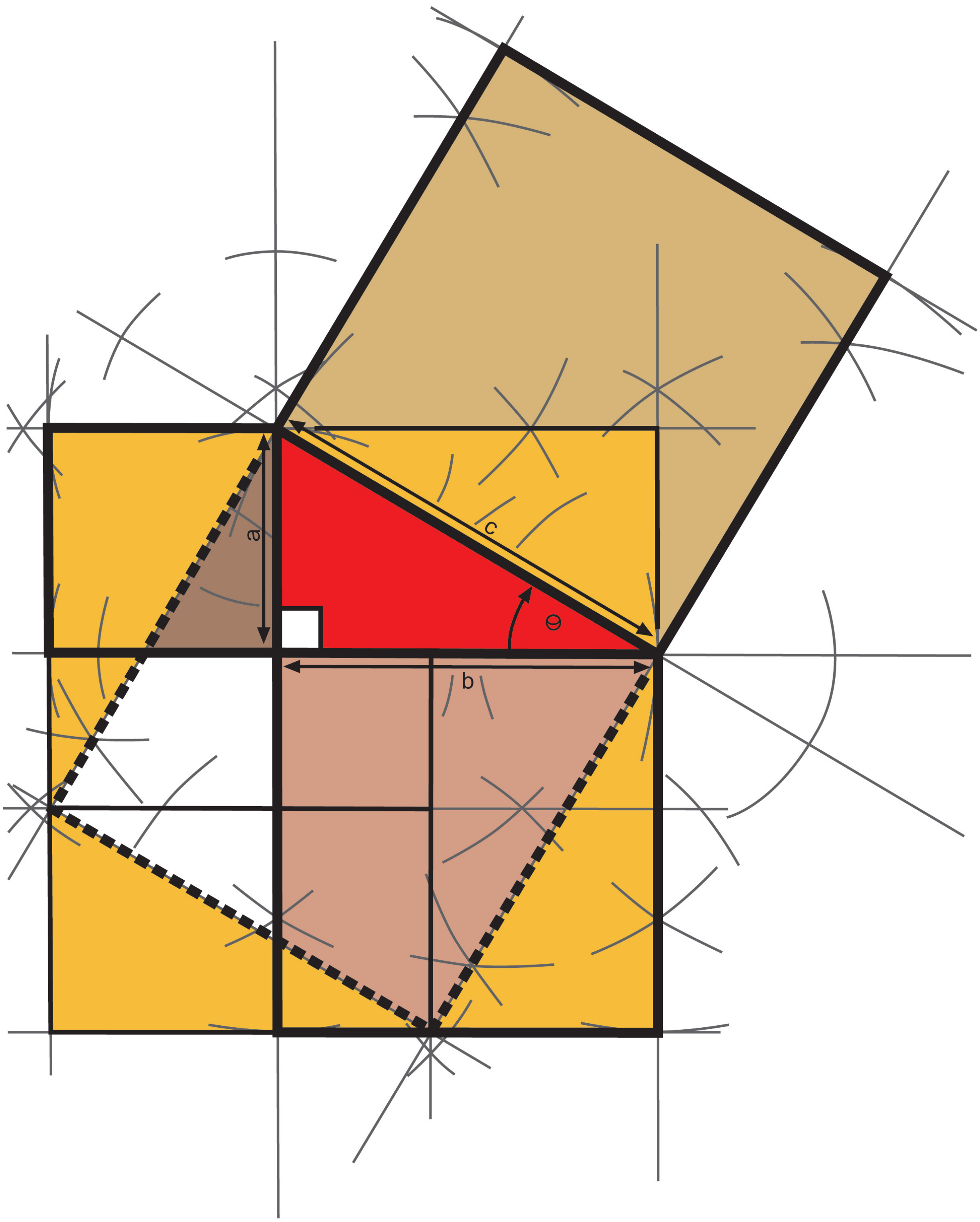
(b) Is EF en CD ewewydig? Gee redes vir jou antwoord.

....

....

HOOFSTUK 13
Die stelling van Pythagoras

In hierdie hoofstuk gaan jy hersien wat jy in Graad 8 oor die stelling van Pythagoras geleer het. Jy gaan ondersoek hoe die stelling bewys word, wat dit beteken, en hoe om dit toe te pas om onbekende lengtes in reghoekige driehoeke en ander meetkundige figure uit te werk.


a
c
θ
b

13 Die stelling van Pythagoras

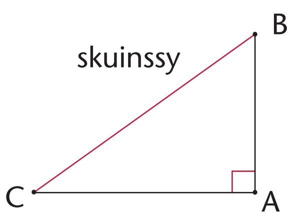
13.1 Ondersoek die sye van 'n reghoekige driehoek

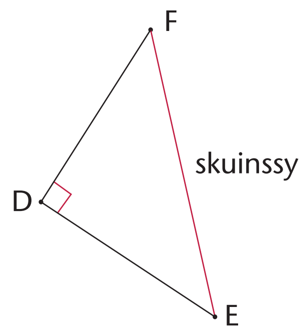
'n **Stelling** is 'n reël of 'n bewering wat deur redenering bewys is. Die stelling van Pythagoras is 'n reël wat net op **reghoekige driehoeke** van toepassing is. Die stelling is na die Griekse wiskundige Pythagoras vernoem.

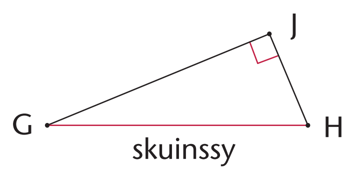
'n Reghoekige driehoek het een 90°-hoek. Die langste sy van die reghoekige driehoek word die **skuinssy** genoem.

Pythagoras (569–475 v.C.)

Pythagoras was 'n invloedryke wiskundige. Soos baie Griekse wiskundiges van 2 500 jaar gelede, was hy ook 'n filosoof en 'n wetenskaplike. Hy het die baie bekende stelling, wat vandag as Pythagoras se stelling bekendstaan, *geformuleer*. Die stelling was egter al 1 000 jaar vroeër deur die Chinese en die Babiloniërs gebruik.



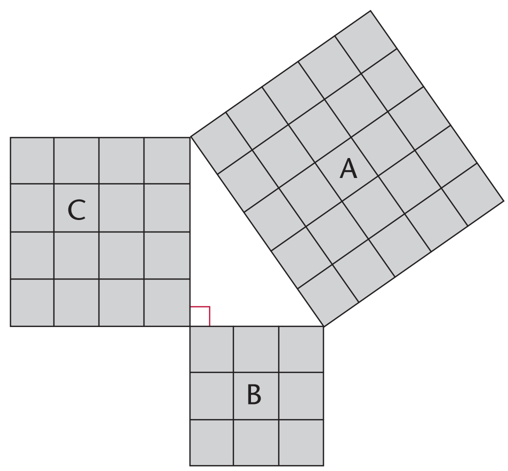




Die **skuinssy** is die sy teenoor die 90°-hoek in 'n reghoekige driehoek. Dit is altyd die langste sy.

ONDERSOEK KWADRATE OP DIE SYE VAN REGHOEKIGE DRIEHOEKE

1. Die figuur wys 'n reghoekige driehoek met vierkante op elk van die sye.



(a) Bereken die oppervlaktes:

Vierkant A: ....

Vierkant B: ....

Vierkant C: ....

(b) Tel die oppervlakte van vierkant B en die oppervlakte van vierkant C bymekaar:

....

(c) Wat merk jy op oor die oppervlaktes?

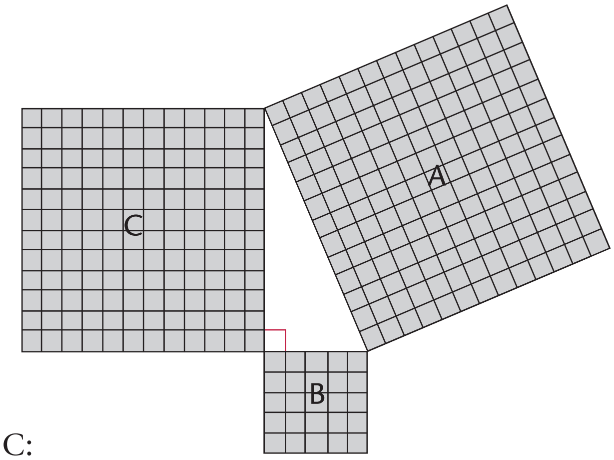
....

....

2. Die figuur hier onder is soortgelyk aan die een in vraag 1. Die lengtes van die reghoeksye van die reghoekige driehoek is 5 cm en 12 cm.
   (a) Tel die vierkante. Wat is die lengte van die skuinssy?

   ....

   (b) Bepaal die volgende:
   Oppervlakte van A:



   ....

   Oppervlakte van B:

   ....

   Oppervlakte van C:

   ....

   Oppervlakte van B + Oppervlakte van C:

   ....

   (c) Wat merk jy op oor die oppervlaktes? Is dit soortgelyk aan jou antwoord in 1(c)?

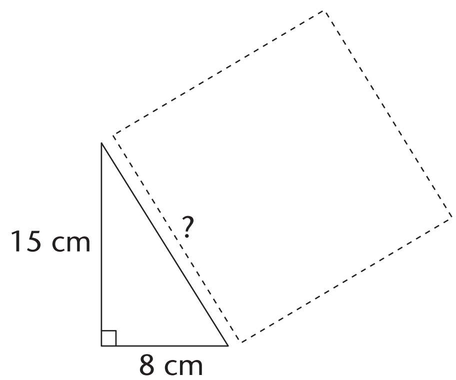
   ....

   ....

   ....

   ....

3. Die lengtes van die reghoeksye van 'n reghoekige driehoek is 8 cm en 15 cm. Gebruik jou bevindings in die vorige vrae om die volgende vrae te beantwoord.
   (a) Wat is die oppervlakte van die vierkant wat langs die skuinssy geteken is?



   ....

   ....

   ....

   ....

   (b) Wat is die lengte van die driehoek se skuinssy?

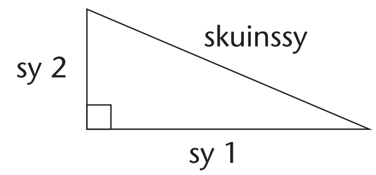
   ....

   ....

Dit wat jy in die aktiwiteit op die vorige twee bladsye opgemerk het, is waaroor die stelling van Pythagoras vir reghoekige driehoeke handel.

Die **stelling van Pythagoras** sê:
In 'n reghoekige driehoek is die oppervlakte van die vierkant op die skuinssy gelyk aan die som van die oppervlaktes van die vierkante op die reghoeksye van die driehoek. Dus:

$(\text{Skuinssy})^2 = (\text{Sy } 1)^2 + (\text{Sy } 2)^2$



13.2 Toets vir reghoekige driehoeke

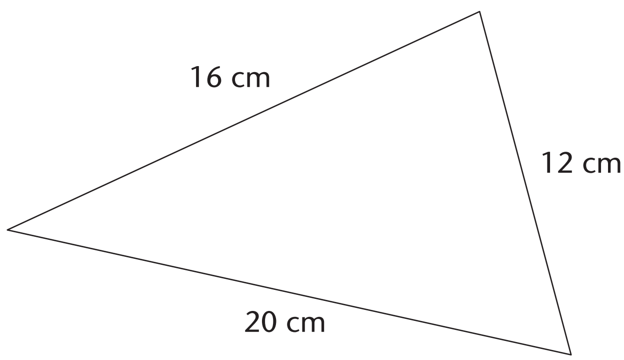
Die stelling van Pythagoras kan op twee maniere aangewend word:

- As 'n driehoek reghoekig is, is die verband tussen die sye soos volg: $(\text{Skuinssy})^2 = (\text{Sy } 1)^2 + (\text{Sy } 2)^2$
- As die verband $(\text{Langste sy})^2 = (\text{Sy } 1)^2 + (\text{Sy } 2)^2$ tussen die sye bepaal kan word, dan is die driehoek 'n reghoekige driehoek.

Ons kan dus toets of enige driehoek reghoekig is sonder om 'n gradeboog te gebruik.

Voorbeeld:

Is 'n driehoek met sye 12 cm, 16 cm en 20 cm reghoekig?



$(\text{Langste sy})^2 = 20^2 = 400 \text{ cm}^2$

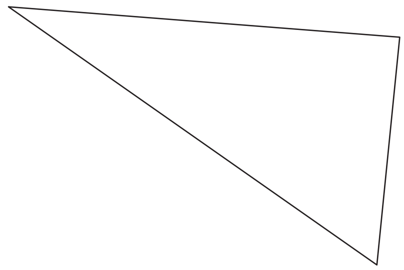
$(\text{Sy } 1)^2 + (\text{Sy } 2)^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \text{ cm}^2$

$(\text{Langste sy})^2 = (\text{Sy } 1)^2 + (\text{Sy } 2)^2$

$\therefore$ Die driehoek is reghoekig.

IS HIERDIE DRIEHOEKE REGHOEKIG?

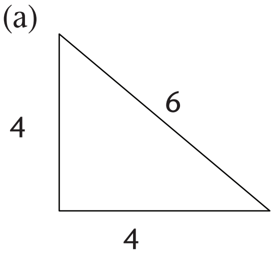
1. Hierdie driehoek se sylengtes is 29 mm, 20 mm en 21 mm.
   (a) Bewys dat dit ’n reghoekige driehoek is.



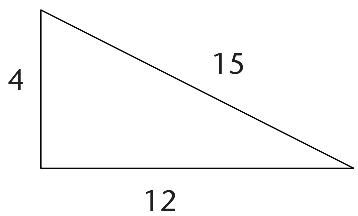
   (b) Merk die regte hoek op die tekening.

2. Gebruik die stelling van Pythagoras om te bepaal of hierdie driehoeke reghoekig is. Alle waardes is in dieselfde eenhede.

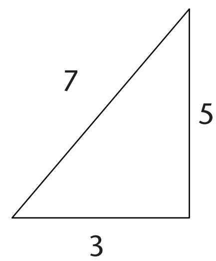
(a)



(b)



(c)



3. Bepaal of die volgende sylengtes reghoekige driehoeke sal vorm. Alle waardes is in dieselfde eenhede.
   (a) 7, 9 en 12
   (b) 7, 12 en 14
   (c) 16, 8 en 10
   (d) 6, 8 en 10
   (e) 8, 15 en 17
   (f) 16, 21 en 25

13.3 Bepaal onbekende sye

Jy kan die stelling van Pythagoras gebruik om die ontbrekende lengtes van sye te bepaal as jy weet dat 'n driehoek reghoekig is.

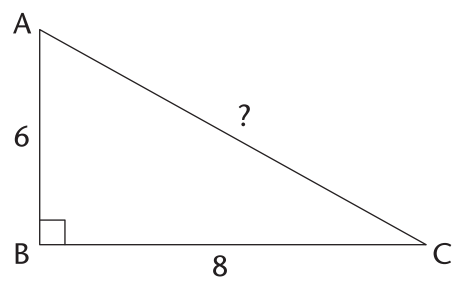
BEPAAL DIE ONBEKENDE SKUINSSY

Voorbeeld:

Bereken die lengte van die skuinssy as die lengtes van die ander twee sye 6 eenhede en 8 eenhede is.

ΔABC is reghoekig, so:

$$
\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
&= (6^2 + 8^2) \text{ eenhede}^2 \\
&= 36 + 64 \text{ eenhede}^2 \\
&= 100 \text{ eenhede}^2 \\
AC &= \sqrt{100} \text{ eenhede} \\
&= 10 \text{ eenhede}
\end{aligned}
$$

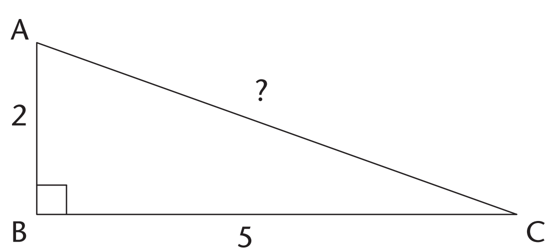


Soms is die vierkantswortel van 'n getal nie 'n heelgetal of 'n eenvoudige breuk nie. In hierdie gevalle kan jy die antwoord onder die vierkantswortelteken los. Hierdie vorm van die getal word 'n **wortelvorm** genoem.

> **Wortelvorm**
> $\sqrt{5}$ is 'n voorbeeld van 'n getal in wortelvorm.
> $\sqrt{9}$ is nie 'n wortelvorm nie, want jy kan dit vereenvoudig: $\sqrt{9} = 3$

Voorbeeld:

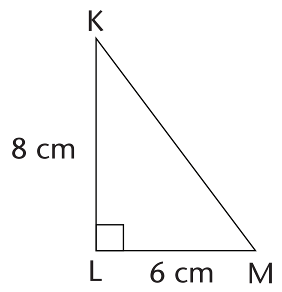
Bereken die lengte van die skuinssy van ΔABC as $\hat{B} = 90°$, $AB = 2$ eenhede en $BC = 5$ eenhede.
Los jou antwoord in wortelvorm, waar van toepassing. Wanneer jy die vierkantswortels bereken, onthou dat lengte altyd positief is.



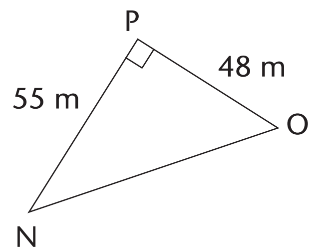
$$
\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
&= 2^2 + 5^2 \text{ eenhede}^2 \\
&= 4 + 25 \text{ eenhede}^2 \\
&= 29 \text{ eenhede}^2 \\
AC &= \sqrt{29} \text{ eenhede}
\end{aligned}
$$

1. Bepaal die lengte van die skuinssy in elk van die driehoeke hier onder. Laat die antwoorde in wortelvorm waar van toepassing.

(a)



(b)

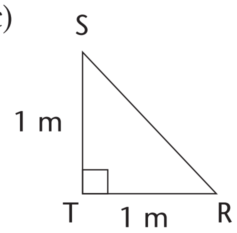


....

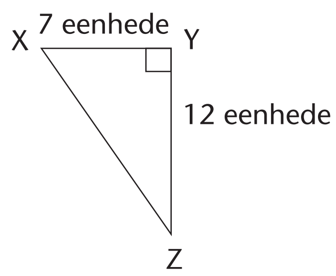
....

....

(c)



(d)

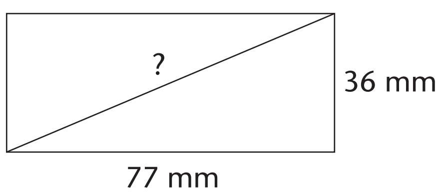


....

....

....

2. ’n Reghoek het sye met lengtes 36 mm en 77 mm.
   Bepaal die lengte van die reghoek se hoeklyn.



....

....

....

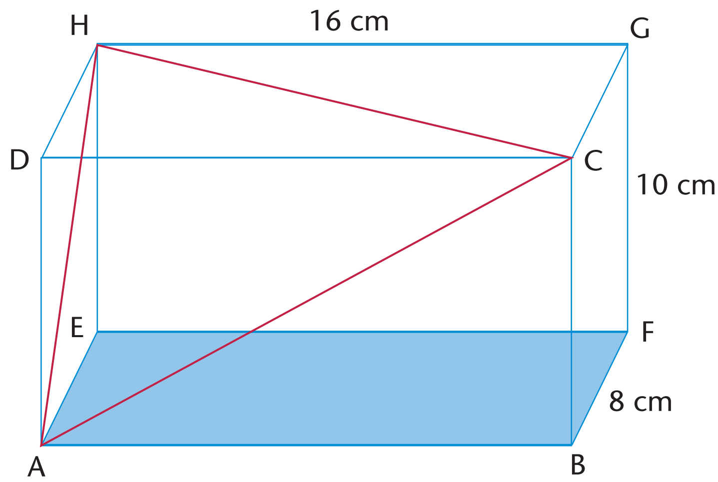
3. ΔABC het $\hat{A} = 90°$, $AB = 3$ cm en $AC = 5$ cm.
   Maak ’n ruwe skets van die driehoek en bereken dan die lengte van BC.

....

....

....

4. ’n Reghoekige prisma is van glas gemaak. Dit het ’n lengte van 16 cm, ’n hoogte van 10 cm en ’n breedte van 8 cm. ABCD en EFGH is twee van die vlakke. ΔACH is in die prisma geteken. Is ΔACH reghoekig? Beantwoord die vrae om uit te vind.



(a) Bereken die lengte van die sye van ΔACH. Let op dat al drie sye van die driehoek hoeklyne van reghoeke is. AC is in reghoek ABCD, AH is in ADHE en HC is in HDCG.

....

....

....

(b) Is ΔACH reghoekig? Verduidelik jou antwoord.

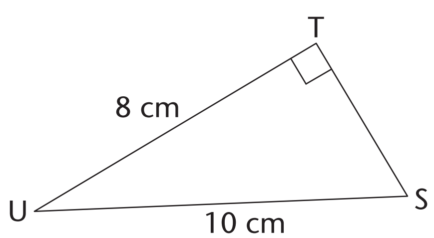
....

....

BEPAAL ENIGE ONBEKENDE SY IN ’N REGHOEKIGE DRIEHOEK

Voorbeeld:

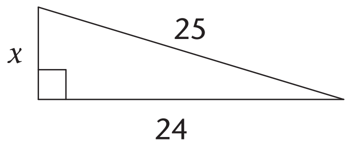
Bepaal die lengte van TS in die driehoek hier onder.



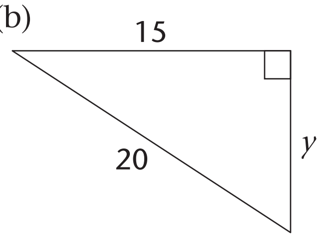
$$
\begin{aligned}
US^2 &= TU^2 + TS^2 \\
10^2 &= 8^2 + TS^2 \\
100 &= 64 + TS^2 \\
36 &= TS^2 \\
\sqrt{36} &= TS \\
\therefore TS &= 6 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

1. Bereken in die reghoekige driehoeke hier onder die lengte van die sye wat nie gegee is nie. Los jou antwoorde in wortelvorm waar van toepassing.

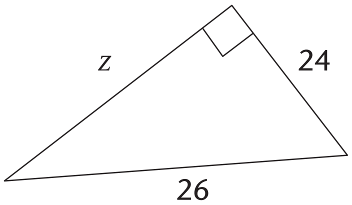
(a)



(b)



(c)



2. Bereken die lengte van die derde sy van die volgende reghoekige driehoeke. Teken eers 'n ruwe skets van elk van die driehoeke voor jy enige berekeninge doen. Rond jou antwoorde tot twee desimale plekke af.

(a) ΔABC het $AB = 12$ cm, $BC = 18$ cm en $\hat{A} = 90°$. Bereken AC.

(b) ΔDEF het $\hat{F} = 90°$, $DE = 58$ cm en $DF = 41$ cm. Bereken EF.

(c) ΔJKL het $\hat{K} = 90°$, $JK = 119$ m, $KL = 167$ m. Bereken JL.

(d) ΔPQR het PQ = 2 cm, QR = 8 cm en $\hat{Q} = 90°$. Bereken PR.

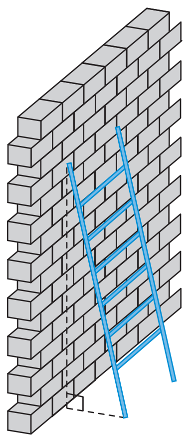
....

....

....

....

3. (a) 'n Leer wat 5 m lank is word teen 'n muur gesit. Die onderkant van die leer is 1 m van die muur af weg. Hoe ver teen die muur op sal die leer reik? Rond jou antwoord tot twee desimale plekke af.



....

....

....

....

(b) As die leer 4,5 m hoog teen die muur opreik, hoe ver van die muur af is dit neergesit? Rond jou antwoord tot twee desimale plekke af.

....

....

....

PYTHAGORIAANSE DRIETALLE

Stelle **natuurlike getalle** wat as die sye van 'n reghoekige driehoek gebruik kan word staan as **Pythagoriaanse drietalle** bekend, byvoorbeeld:

3-4-5 5-12-13 7-24-25 16-30-34 20-21-29

Jy kan hierdie drietalle uitbrei deur veelvoude van hulle te bepaal. Drietalle uit die 3-4-5 stel sluit byvoorbeeld die volgende in:

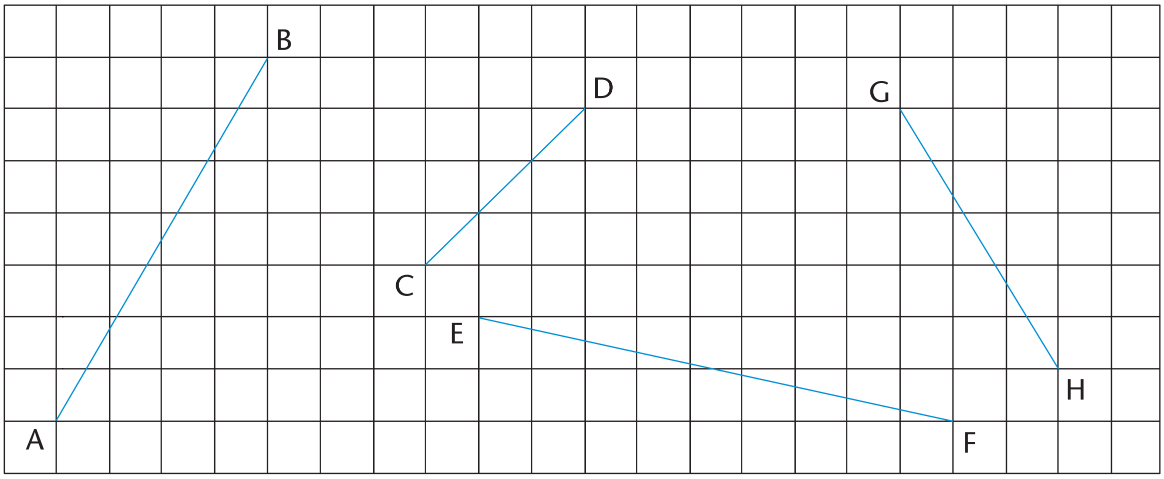
3-4-5 6-8-10 9-12-15 12-16-20

Daar bestaan baie ou geskrifte waarin Pythagoriaanse drietalle opgeteken is. Die Babiloniërs het tussen 1900 en 1600 v.C. reeds baie groot Pythagoriaanse drietalle bereken, soos byvoorbeeld 1 679-2 400-2 929.

Hoeveel Pythagoriaanse drietalle kan jy bepaal? Wat is die grootste een wat jy kan bepaal wat nie 'n veelvoud van 'n ander een is nie?

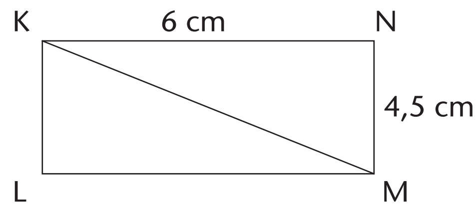
13.4 Nog oefeninge met Pythagoras se stelling

1. Vier lyne is op die rooster getrek. Elke vierkant is een eenheid lank. Bereken die lengtes van die lyne: AB, CD, EF en GH. Doen die berekeninge in jou oefeningboek en vul die antwoorde hier onder in. Los jou antwoorde in wortelvorm.



AB = ... eenhede CD = ... eenhede EF = ... eenhede GH = ... eenhede

2. (a) Bereken die oppervlakte van reghoek KLMN.



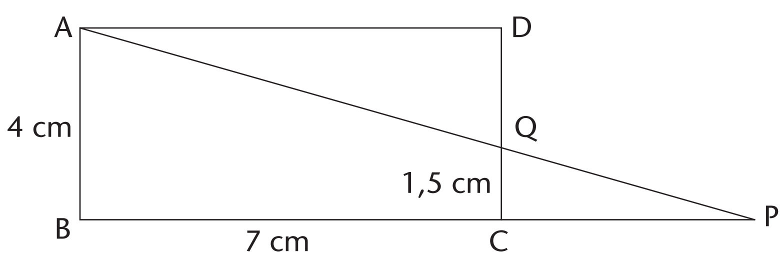
....

(b) Bereken die omtrek van ΔKLM.

....

....

3. ABCD is 'n reghoek met AB = 4 cm, BC = 7 cm en CQ = 1,5 cm. Rond jou antwoorde tot twee desimale plekke af as die antwoorde nie telgetalle is nie.



(a) Wat is die lengte van QD?

....

(b) As CP = 4,2 cm, bereken die lengte van PQ.

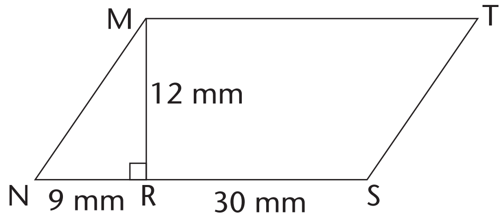
....

(c) Bereken die lengte van AQ en die oppervlakte van ΔAQD.

....

....

4. MNST is 'n parallelogram. NR = 9 mm en MR = 12 mm.



(a) Bereken die oppervlakte van ΔMNR.

....

(b) Bereken die omtrek van MNST.

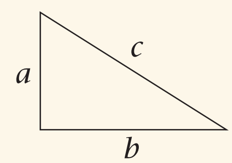
....

....

PYTHAGORAS SE STELLING EN ANDER SOORTE DRIEHOEKE

Pythagoras se stelling werk net vir reghoekige driehoeke, maar ons kan dit ook soos volg gebruik om uit te vind of ander driehoeke skerphoekig of stomphoekig is:

- **As die kwadraat van die langste sy *minder* as die som van die kwadrate van die twee korter sye is, is die *grootste hoek skerp*.**
  Byvoorbeeld, in 'n 6-8-9 driehoek: $6^2 + 8^2 = 100$ en $9^2 = 81$.
  81 is minder as 100 ∴ Die 6-8-9 driehoek is skerphoekig.
- **As die kwadraat van die langste sy *meer* as die som van die kwadrate van die twee korter sye is, is die *grootste hoek stomp*.**
  Byvoorbeeld, in 'n 6-8-11 driehoek: $6^2 + 8^2 = 100$ en $11^2 = 121$.
  121 is meer as 100 ∴ Die 6-8-11 driehoek is stomphoekig.



Voltooi die tabel. Dit is op die skets hier regs gebaseer. Besluit of elke driehoek wat beskryf word reghoekig, skerphoekig of stomphoekig is.

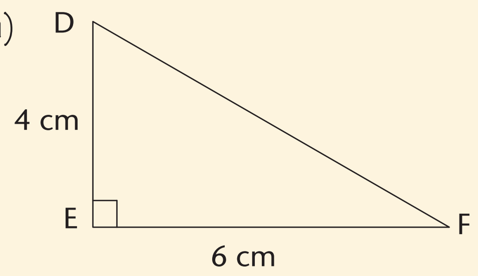
a	b	c	$a^2 + b^2$	c^2	Vul =, > of < in	Soort driehoek
3	5	6	$3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$	$6^2 = 36$	$a^2 + b^2 < c^2$	Skerphoekige
2	4	6			$a^2 + b^2$ ..... c^2	
5	7	9			$a^2 + b^2$ ..... c^2	
12	5	13			$a^2 + b^2$ ..... c^2	
12	16	20	$12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$	$20^2 = 400$	$a^2 + b^2 = c^2$	Reghoekige
7	9	11			$a^2 + b^2$ ..... c^2	
8	12	13			$a^2 + b^2$ ..... c^2	

WERKBLAD

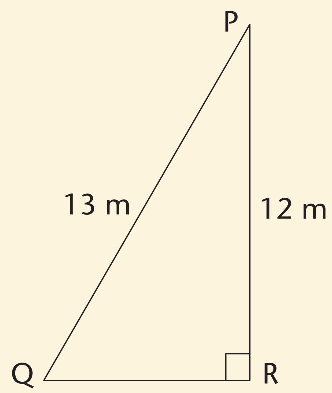
1. Skryf Pythagoras se stelling op die manier neer waarop jy dit die beste verstaan.

2. Bereken die lengtes van die onbekende sye in die volgende driehoeke. Los die antwoorde in wortelvorm indien nodig.

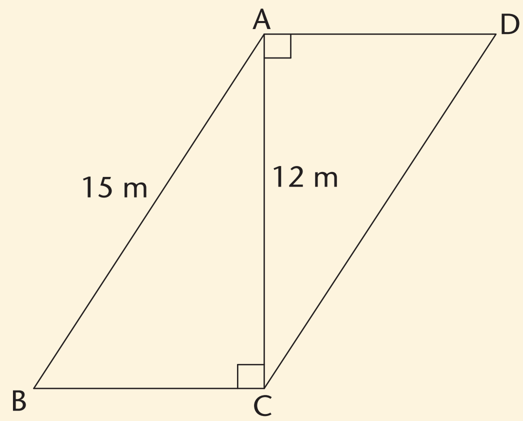
(a)



(b)



3. ABCD is 'n parallelogram.

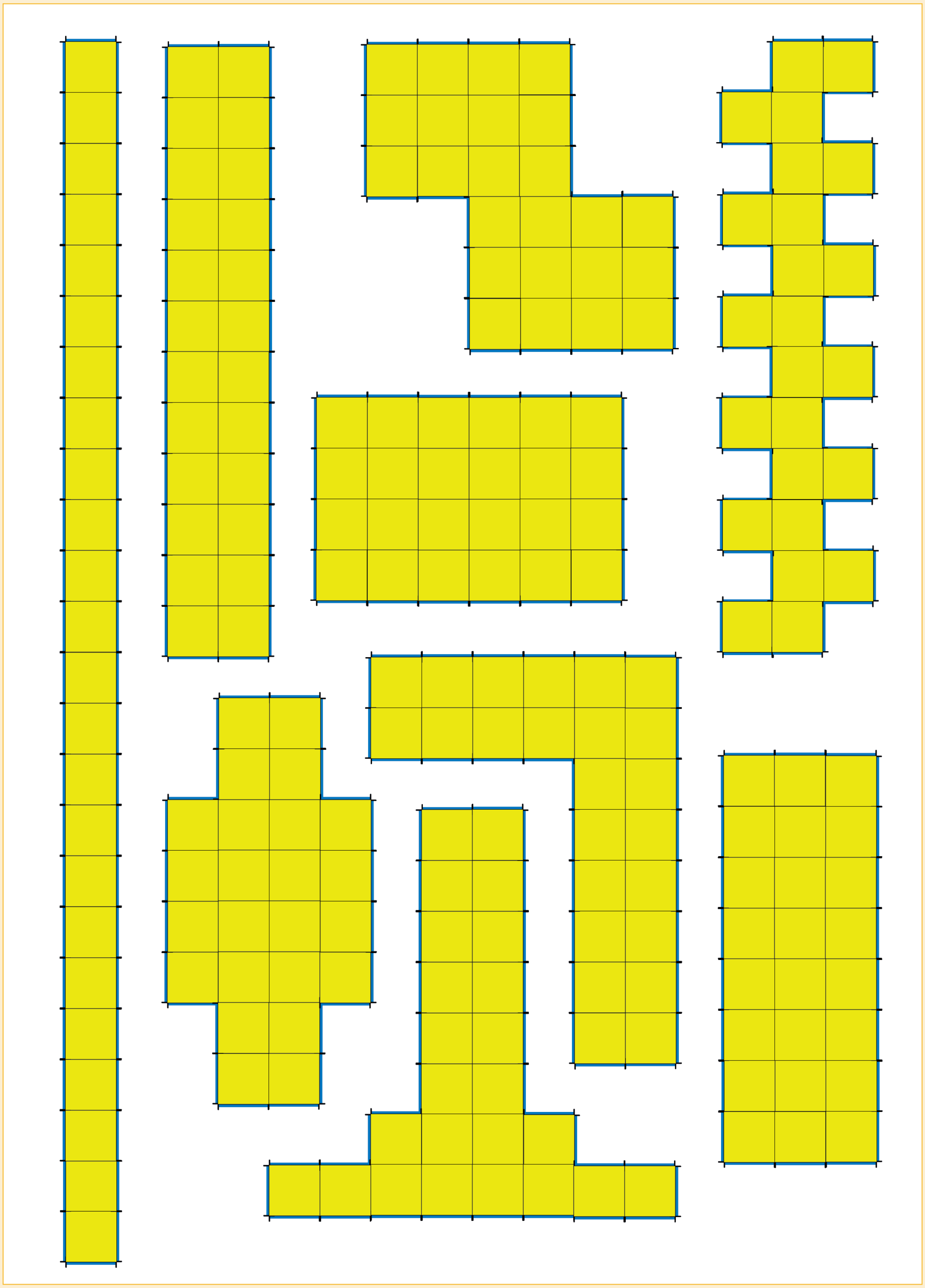


(a) Bereken die omtrek van ABCD.

(b) Bereken die oppervlakte van ABCD.

Hoofstuk 14
Oppervlakte en omtrek van 2D-figure

In hierdie hoofstuk gaan jy hersien hoe om die omtrek en oppervlakte van vierkante, reghoeke, driehoeke en sirkels te bereken. Die omtrek van 'n figuur is die totale afstand langs die sye van die figuur. Die oppervlakte van 'n figuur is die grootte van die plat oppervlak wat deur die figuur omsluit word. Jy gaan ook leer hoe om die oppervlaktes van parallelogramme, ruite, vlieërs en trapesiums te bereken, asook die uitwerking op die omtrek en oppervlakte van 'n figuur ondersoek wanneer die afmetings verdubbel word.



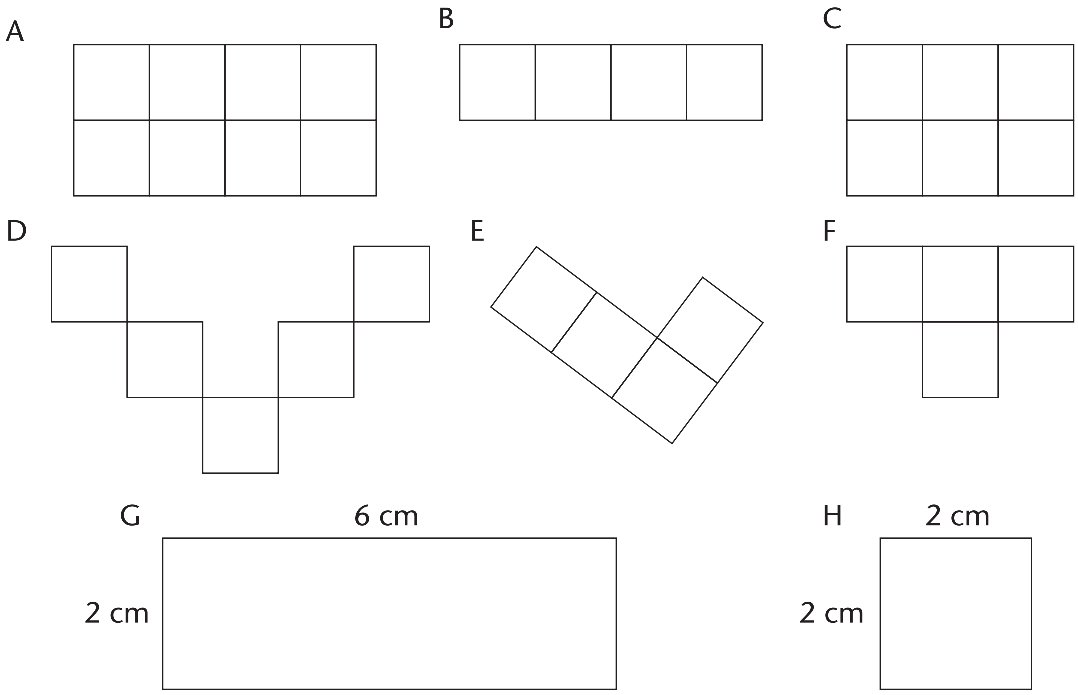
14 Oppervlakte en omtrek van 2D-figure

14.1 Oppervlakte en omtrek van vierkante en reghoeke

HERSIENING VAN BEGRIPPE

1. Elke blokkie in figure A tot F hier onder is 1 cm × 1 cm. Wat is die omtrek en oppervlakte van elk van die figure A tot H? Voltooi die tabel hier onder.

Die **omtrek** (*P*) van 'n figuur is die afstand langs die sye van die figuur. Die **oppervlakte** (*A*) van 'n figuur is die grootte van die plat oppervlak wat deur die figuur omsluit word.

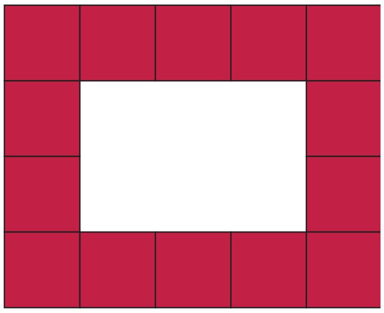


Figuur	Omtrek	Oppervlakte	Aantal 1 cm × 1 cm-vierkante
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			

2. Kyk na die reghoek hier onder. Dit is gevorm deur identiese vierkante wat 1 cm by 1 cm elk is, te tesselleer. In die wit deel is vierkante wat verskuil is.

Om te **tesselleer** beteken om 'n oppervlak met identiese figure te bedek op so 'n manier dat daar geen gapings of oorvleuelings is nie. 'n Ander woord vir tessellasie is **verteëling**.

(a) Sonder om te tel, skryf die totale getal vierkante neer wat gebruik is om die reghoek te vorm, insluitend dié wat versteek is. Verduidelik hoe jy geredeneer het.



....

....

(b) Wat is die oppervlakte van die reghoek, die wit deel ingesluit?

....

Oppervlakte van 'n reghoek = lengte × breedte

$= l \times b$

Oppervlakte van 'n vierkant $= l \times l$

$= l^2$

Beide lengte (l) en breedte (b) word in dieselfde meeteenheid uitgedruk.

3. Sipho en Theunis verf elkeen 'n muur om geld te verdien tydens die skoolvakansie. Sipho verf 'n muur wat 4 m hoog en 10 m lank is. Theunis se muur is 5 m hoog en 8 m lank. Wie moet meer betaal word? Verduidelik.

....

....

....

4. Wat is die oppervlakte van 'n vierkant met 'n lengte van 12 mm?

....

....

5. Die oppervlakte van 'n reghoek is 72 cm² en sy lengte is 8 cm. Wat is sy breedte?

....

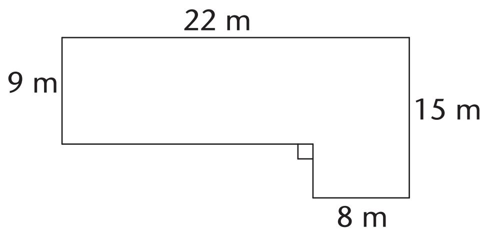
....

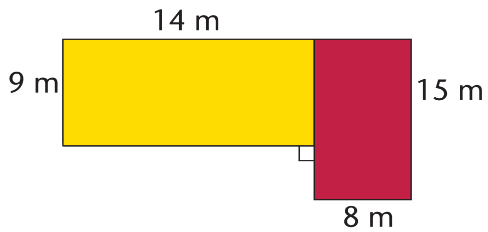
....

14.2 Oppervlakte en omtrek van saamgestelde figure

BREEK FIGURE OP EN SIT HULLE WEER AANMEKAAR

1. Die diagram aan die linkerkant wys die vloerplan van ’n kamer.
   (a) Ons kan die oppervlakte (A) van die kamer bereken deur die vloer in twee reghoeke te verdeel, soos in die skets hier regs gewys word.





$$
\begin{aligned}
A \text{ van kamer} &= A \text{ van geel reghoek} + A \text{ van rooi reghoek}\\
&= (l \times b) + (l \times b)\\
&= (14 \times 9) + (15 \times 8)\\
&= 126 + 120\\
&= 246 \text{ m}^2
\end{aligned}
$$

   (b) Die geel deel van die kamer het ’n houtvloer en die rooi deel het ’n mat. Wat is die oppervlakte van die houtvloer? Wat is die oppervlakte van die mat?

....

   (c) Bereken die oppervlakte van die kamer deur dit op ’n ander manier as in (a) hier bo in twee reghoeke te verdeel. Teken ’n skets.

....

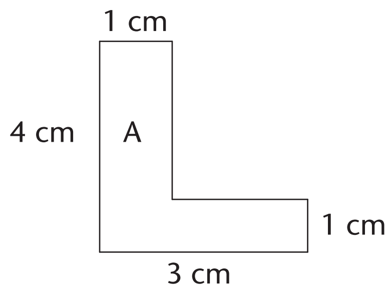
....

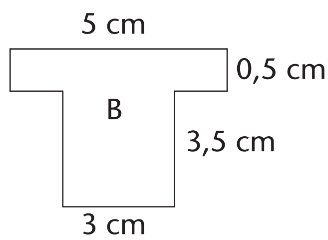
....

....

....

2. Bereken die oppervlakte van die figure hier onder.





3. Merk die formules wat gebruik kan word om die omtrek (P) van ’n reghoek te bereken met regmerkies. Verduidelik jou antwoord.
   - Omtrek $= 2 \times (l + b)$
   - Omtrek $= l + b + l + b$
   - Omtrek $= 2l + 2b$
   - Omtrek $= l + b$

l en *b* verwys na die lengte en die breedte van ’n reghoek.

Die volgende is ekwivalente uitdrukkings vir omtrek:
$P = 2l + 2b$ en $P = 2(l + b)$ en $P = l + b + l + b$

4. Kontroleer met twee klasmaats dat die uitdrukking(s) wat jy hier bo gekies het reg is en gebruik dit om die omtrek van figuur A te bereken. Dink mooi!

5. Die omtrek van ’n reghoek is 28 cm en sy breedte is 6 cm. Wat is sy lengte?

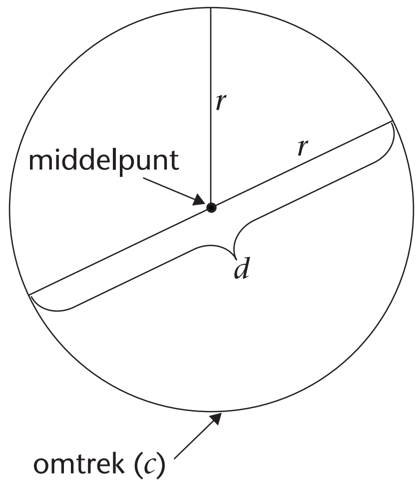
14.3 Oppervlakte en omtrek van sirkels

HERSIENING VAN BEGRIPPE UIT VORIGE GRADE

Jy sal die volgende oor sirkels onthou uit vorige grade:

- Die afstand oor die sirkel deur sy middelpunt word die **middellyn** (d) van die sirkel genoem.
- Die afstand van die middelpunt van die sirkel af na enige punt op die sirkel word die **radius** (r) genoem.
- Die omtrek (c) van 'n sirkel gedeel deur sy middellyn is gelyk aan die irrasionale waarde wat as **pi** (π) bekendstaan. Om berekeninge te vereenvoudig, gebruik ons dikwels die benaderde waardes:

  $\pi \approx 3{,}14$ of $\frac{22}{7}$.



Die volgende is belangrike formules om te onthou:

- $d = 2r$ en $r = \frac{1}{2}d$
- Omtrek van 'n sirkel (c) = $2\pi r$ of πd
- Oppervlakte van 'n sirkel (A) = πr^2

Die Engelse woord vir die middellyn van 'n sirkel is *diameter* (d) en die woord vir die omtrek van 'n sirkel is *circumference* (c).

BEREKENINGE MET SIRKELS

Gebruik $\pi = 3{,}14$ in die volgende berekeninge en rond jou antwoorde af tot twee desimale plekke. As jy 'n vierkantswortel bepaal, onthou dat lengte altyd positief is.

1. Bereken die omtrek en oppervlakte van die volgende sirkels:

   (a) 'n Sirkel met 'n radius van 5 m

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) 'n Sirkel met 'n middellyn van 18 mm

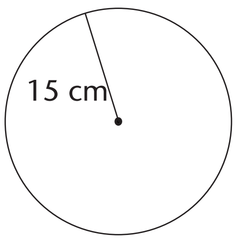
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Bereken die radius van 'n sirkel met:
   (a) 'n omtrek van 53 cm
   (b) 'n omtrek van 206 mm

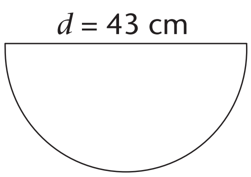
....
....
....
....

3. Werk die oppervlakte van die volgende figure uit:

A



B

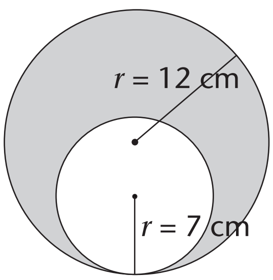


....
....
....
....

4. Bereken die radius en middellyn van 'n sirkel met:
   (a) 'n oppervlakte van 200 m^2
   (b) 'n oppervlakte van 1 000 m^2

....
....
....
....
....

5. Bereken die oppervlakte van die ingekleurde deel.



....
....
....
....
....

14.4 Herleiding tussen eenhede

HERLEI TUSSEN EENHEDE GEBRUIK VIR OMTREK EN OPPERVLAKTE

Maak altyd seker dat jy die regte eenhede in jou berekeninge gebruik. Oefen die herleidings hier onder.

Onthou:

1 cm = 10 mm	1 mm = 0,1 cm
1 m = 100 cm	1 cm = 0,01 m
1 km = 1 000 m	1 m = 0,001 km

1. Herlei die volgende:

(a) 34 cm = ... mm
(b) 501 m = ... km
(c) 226 m = ... cm
(d) 0,58 km = ... m
(e) 1,9 cm = ... mm
(f) 73 mm = ... cm
(g) 924 mm = ... m
(h) 32,23 km = ... m

Onthou, om tussen vierkante eenhede te herlei kan jy die volgende metode gebruik:

Om cm^2 na m^2 te herlei:

$$\begin{aligned} 1\ cm^2 &= 1\ cm \times 1\ cm \\ &= 0{,}01\ m \times 0{,}01\ m \\ &= 0{,}0001\ m^2 \end{aligned}$$

Voorbeeld

Herlei 50 cm^2 na m^2

$$\begin{aligned} 1\ cm^2 &= 0{,}0001\ m^2 \\ \therefore 50\ cm^2 &= 50 \times 0{,}0001\ m^2 \\ &= 0{,}005\ m^2 \end{aligned}$$

2. Herlei na cm^2:

(a) 650 mm^2

....

....

(b) 1 200 mm^2

....

....

(c) 18 m^2

....

....

(d) 0,045 m^2

....

....

(e) 93 mm^2

....

....

(f) 177 m^2

....

....

3. (a) Herlei 93 mm^2 na m^2.

....

....

(b) Herlei 0,017 km^2 na m^2.

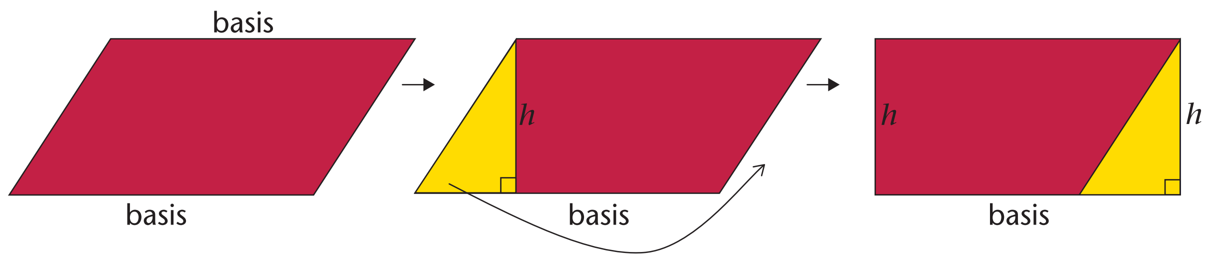
....

....

14.5 Oppervlakte van ander vierhoeke

PARALLELOGRAMME

’n Parallelogram kan in ’n reghoek verander word as ’n reghoekige driehoek van een sy afgesny word en na die ander sy geskuif word:



Ons kan dus die oppervlakte van ’n parallelogram bepaal deur die formule vir die oppervlakte van ’n reghoek te gebruik:

Oppervlakte van reghoek $= l \times b$

$=$ (basis van parallelogram) × (loodregte hoogte van parallelogram)

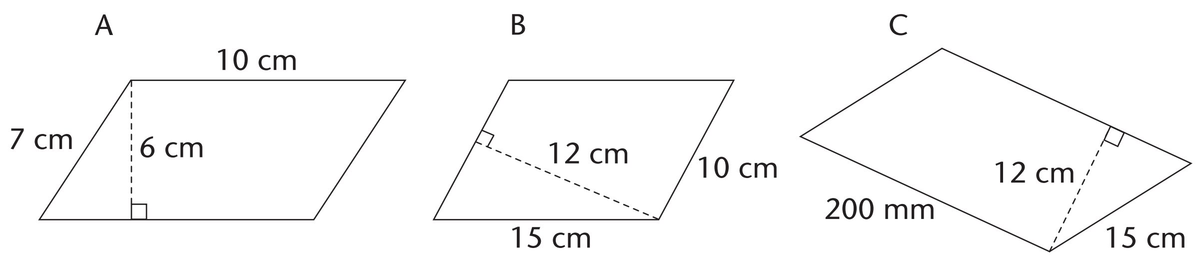
Oppervlakte van parallelogram = Oppervlakte van reghoek

∴ Oppervlakte van parallelogram = basis × loodregte hoogte

1. (a) Teken die parallelogram hier bo in jou oefeningboek oor.
   (b) Gebruik die korter sy as die basis van die parallelogram en volg die stappe hier bo om die formule vir die oppervlakte van ’n parallelogram af te lei.

Ons kan enige sy van die parallelogram as die basis gebruik, maar ons moet die loodregte hoogte gebruik op die sy wat ons gekies het.

2. Werk die oppervlakte van die parallelogramme uit deur die formule te gebruik.



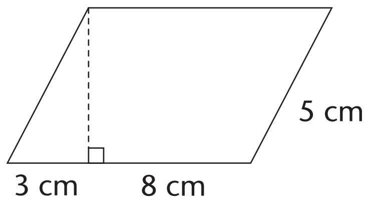
....

....

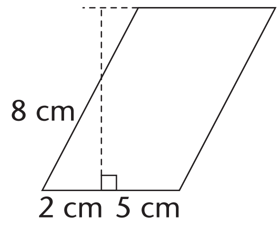
....

3. Werk die oppervlakte van die parallelogramme uit. Gebruik die stelling van Pythagoras om die onbekende sye te bereken wat jy nodig het. Onthou om die vooraf afgeronde waarde vir hoogte te gebruik en dan die finale antwoord tot twee desimale plekke af te rond waar nodig.

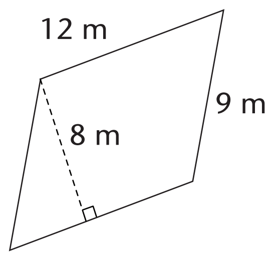
A



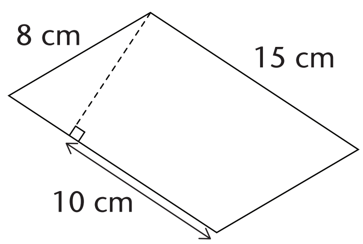
B



C



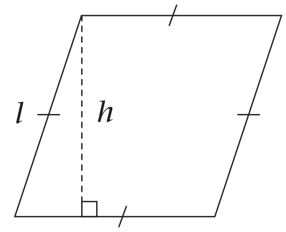
D



RUITE

’n Ruit is ’n parallelogram met alle sye ewe lank.

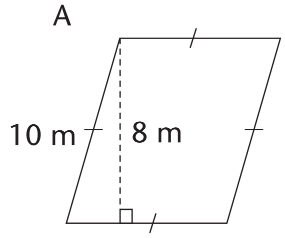
Op dieselfde manier wat ons die formule vir die oppervlakte van ’n parallelogram afgelei het, kan ons die volgende wys:



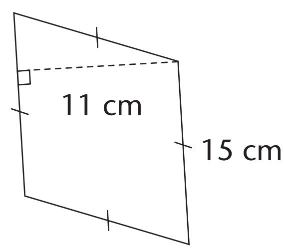
- Oppervlakte van ’n ruit = lengte × loodregte hoogte

1. Werk in jou oefeningboek. Wys hoe om die formule vir die oppervlakte van ’n ruit af te lei.
2. Bereken die oppervlaktes van die volgende ruite. Rond jou antwoorde af tot twee desimale plekke waar nodig.

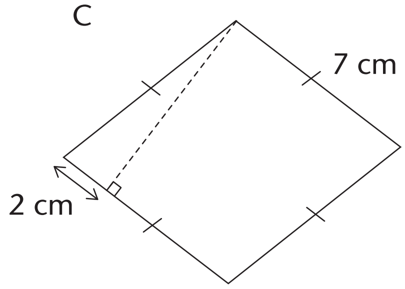
A



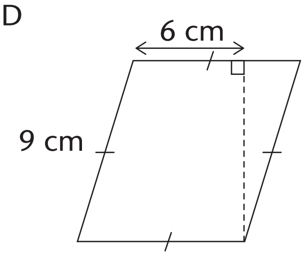
B



C

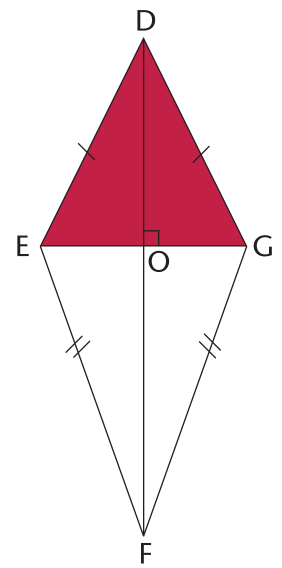


D



VLIEËRS

Om die oppervlakte van 'n vlieër te bereken gebruik jy een van sy eienskappe, naamlik dat die hoeklyne van 'n vlieër loodreg is.



Oppervlakte van vlieër DEFG

= Oppervlakte van ΔDEG + Oppervlakte van ΔEFG

$= \frac{1}{2}(b \times h) + \frac{1}{2}(b \times h)$

$= \frac{1}{2}(\text{EG} \times \text{OD}) + \frac{1}{2}(\text{EG} \times \text{OF})$

$= \frac{1}{2}\text{EG}(\text{OD} + \text{OF})$

$= \frac{1}{2}\text{EG} \times \text{DF}$

Let op dat EG en DF die hoeklyne van die vlieër is.

∴ Oppervlakte van 'n vlieër $= \frac{1}{2}$(hoeklyn 1 × hoeklyn 2)

1. Bereken die oppervlakte van vlieërs met die volgende hoeklyne. Antwoord in m².
   (a) 150 mm en 200 mm (b) 25 cm en 40 cm

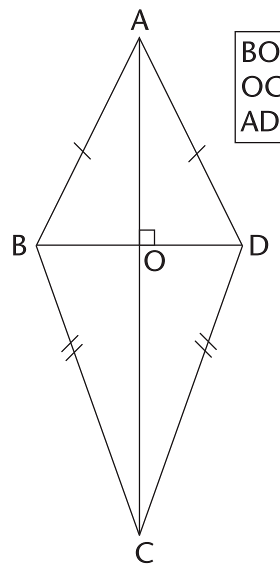
....

....

....

....

2. Bereken die oppervlakte van die vlieër.



BO = OD = 6 cm
OC = 15 cm
AD = 10 cm

....

....

....

....

....

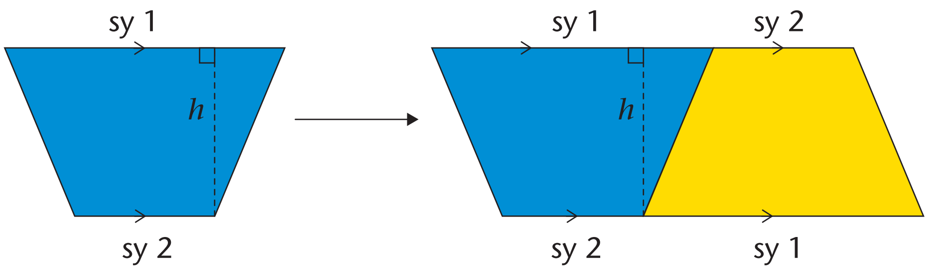
....

....

....

TRAPESIUMS

’n Trapesium het twee ewewydige sye. As ons twee trapesiums tesselleer (verteël) soos in die diagram hier onder gewys word, vorm ons ’n parallelogram. (Die geel trapesium is dieselfde grootte as die blou een. Die basis van die parallelogram is gelyk aan die som van die ewewydige sye van die trapesium.)



Ons kan die formule vir die oppervlakte van ’n parallelogram soos volg gebruik om die formule vir die oppervlakte van ’n trapesium uit te werk:

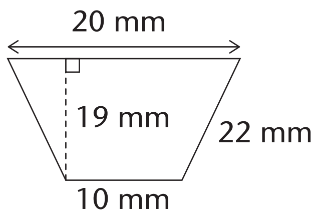
$$\begin{aligned}\text{Oppervlakte van parallelogram} &= \text{basis} \times \text{hoogte}\\ &= (\text{sy } 1 + \text{sy } 2) \times \text{hoogte}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Oppervlakte van trapesium} &= \frac{1}{2}\ \text{oppervlakte van parallelogram}\\ &= \frac{1}{2}(\text{sy } 1 + \text{sy } 2) \times \text{hoogte}\end{aligned}$$

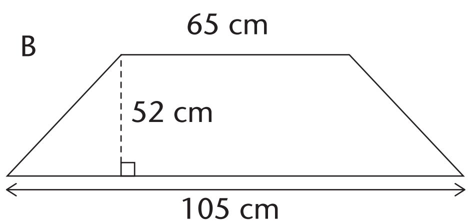
$\therefore$ Oppervlakte van ’n trapesium = $\frac{1}{2}$(som van ewewydige sye) × loodregte hoogte

Bereken die oppervlakte van die volgende trapesiums:

A



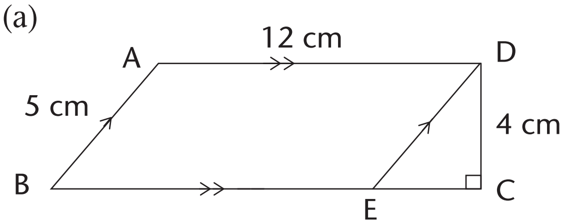
B



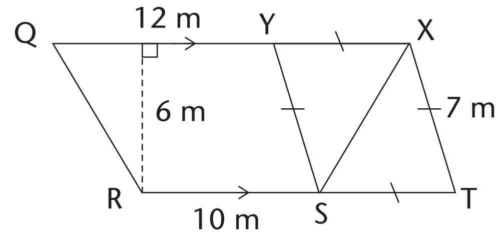
OPPERVLAKTES VAN SAAMGESTELDE FIGURE

Bereken die oppervlaktes van die volgende 2D-figure. Rond jou antwoorde af tot twee desimale plekke waar nodig.

(a)



(b)



. . . .

. . . .

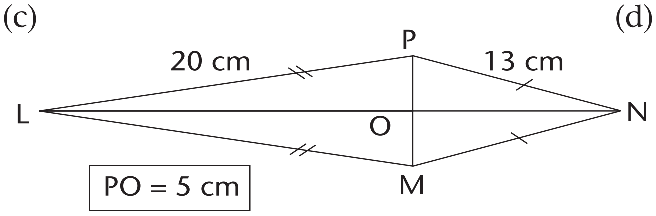
. . . .

. . . .

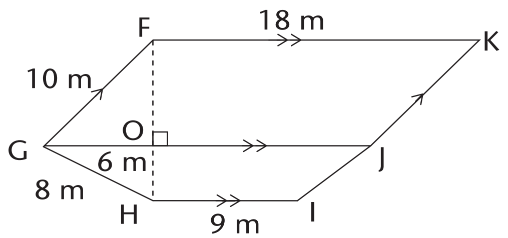
. . . .

. . . .

(c)



(d)



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

14.6 Verdubbeling van afmetings van 'n 2D-figuur

Onthou dat 'n 2D-figuur twee afmetings het, naamlik lengte en breedte. Jy het lengtes en breedtes gebruik om die omtrek en oppervlakte van figure uit te werk, byvoorbeeld:

- lengte en breedte vir reghoeke en vierkante
- basisse en loodregte hoogtes vir driehoeke, ruite en parallelogramme
- twee hoeklyne vir vlieërs.

Maar hoe beïnvloed die verdubbeling van een of albei afmetings van 'n figuur die figuur se omtrek en oppervlakte?

Die vier stelle figure op die volgende bladsy is op 'n rooster van vierkante geteken. Elke ry wys 'n oorspronklike figuur, die figuur met een van sy afmetings verdubbel, en die figuur met albei sy afmetings verdubbel.

1. Werk die omtrek en oppervlakte van elke figuur uit. Rond jou antwoorde af tot twee desimale plekke waar nodig.
2. Watter figuur in elke stel is kongruent aan die oorspronklike figuur?

   ....

3. Vul die omtrek (*P*) en oppervlakte (*A*) van elke figuur in die tabel hier onder in.

Figuur	Oorspronklike figuur	Figuur met albei afmetings verdubbel
A	P = ... A = ...	P = ... A = ...
B	P = ... A = ...	P = ... A = ...
C	P = ... A = ...	P = ... A = ...
D	P = ... A = ...	P = ... A = ...

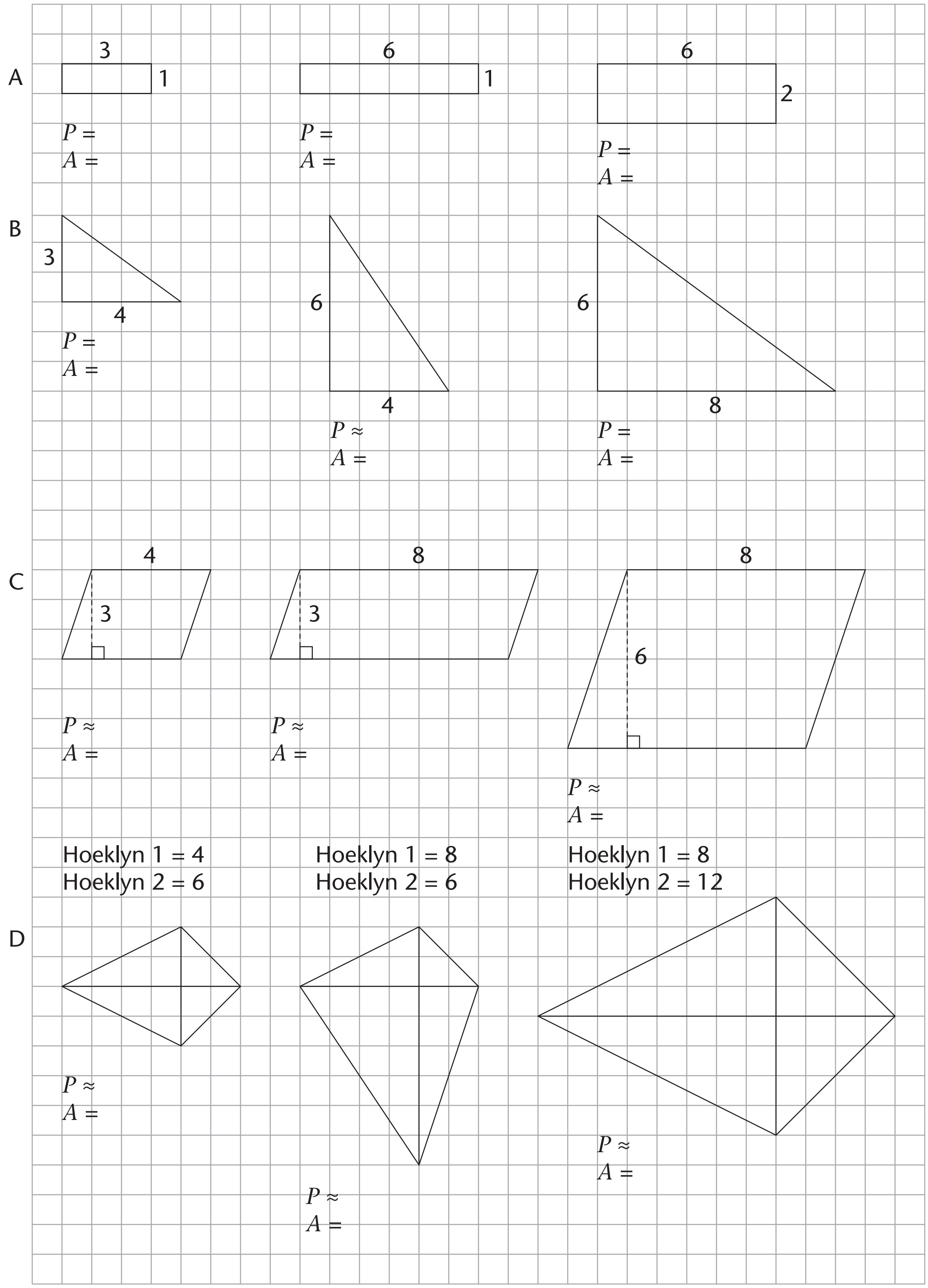
4. Kyk na die tabel wat jy voltooi het. Watter patrone sien jy raak? Kies een:
   - Wanneer albei afmetings van 'n figuur verdubbel word, **word sy omtrek verdubbel** en sy **oppervlakte word verdubbel**.
   - Wanneer albei afmetings van 'n figuur verdubbel word, **word sy omtrek verdubbel** en sy **oppervlakte is vier keer groter**.

   ....

   ....

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 264 2014/07/03 09:36:04 AM

Oorspronklike figuur	Een afmeting verdubbel	Albei afmetings verdubbel

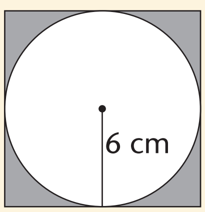


WERKBLAD

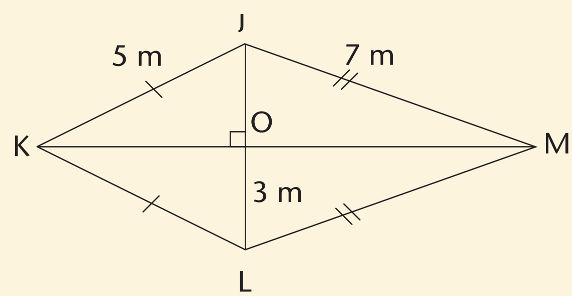
1. Skryf die formules vir die volgende neer:

Omtrek van 'n vierkant	
Omtrek van 'n reghoek	
Oppervlakte van 'n vierkant	
Oppervlakte van 'n reghoek	
Oppervlakte van 'n driehoek	
Oppervlakte van 'n ruit	
Oppervlakte van 'n vlieër	
Oppervlakte van 'n parallelogram	
Oppervlakte van 'n trapesium	
Middellyn van 'n sirkel	
Omtrek van 'n sirkel	
Oppervlakte van 'n sirkel	

2. (a) Bereken die omtrek van die vierkant en die oppervlakte van die ingekleurde dele van die vierkant.



(b) Bereken die oppervlakte van die vlieër.



KWARTAAL 2
Hersiening en assessering

Hersiening

Onthou om al die stappe in jou werk te wys. Let wel: die diagramme in hierdie hersiening en assessering is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.

KONSTRUKSIE VAN MEETKUNDIGE FIGURE

Moenie in hierdie afdeling enige konstruksieboë uitvee nie.

1. Konstrueer die volgende driehoeke en vierhoeke, met gepaste byskrifte:
   (a) Driehoek FGH met GH = 6,2 cm; $\hat{G} = 36°$ en $\hat{H} = 63°$

   (b) Parallelogram PQRS met PQ = 5,7 cm, PS = 7,8 cm en $\hat{R} = 112°$

2. (a) Konstrueer ΔKLM met $KL = 9,4$ cm; $LM = 7$ cm en $MK = 7,8$ cm.

(b) Konstrueer die middelloodlyne van al drie die sye van die driehoek wat jy hier bo geteken het. Jy behoort te vind dat hulle deur dieselfde punt gaan.

(c) Gebruik die snypunt van die drie middelloodlyne as middelpunt van 'n sirkel wat deur al drie hoekpunte van die driehoek gaan. Trek die sirkel met jou passer.

3. Konstrueer die volgende hoeke sonder 'n gradeboog:

(a) 45°

(b) 210°

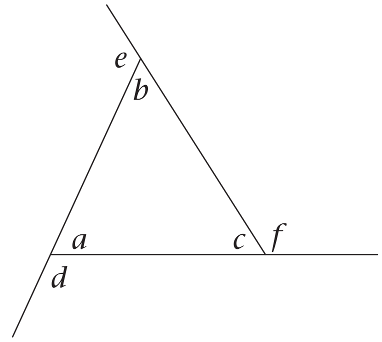
4. Konstrueer 'n reëlmatige seshoek deur die volgende instruksies te volg:
   - Konstrueer 'n horisontale lyn AB wat 2 cm lank is.
   - Stel jou passer op 2 cm, en trek sirkelboë vanaf A en B wat bo lyn AB sny. Noem die boë se snypunt O.
   - Trek 'n sirkel met middelpunt O en radius 2 cm. Dit behoort deur A en B te gaan.
   - Met middelpunt B en radius steeds 2 cm, trek 'n boog vanaf B om die sirkel te sny aan die ander kant as A. Noem hierdie punt C.
   - Herhaal die vorige stap om punte D tot F te skep.
   - Verbind punte B en C met 'n reguit lyn. Herhaal met C en D en so aan, totdat jy terug is by A. Jy het nou 'n reëlmatige seshoek gekonstrueer!

MEETKUNDE VAN 2D-FIGURE

1. Die onderstaande tabel is 'n opsomming van die eienskappe van hoeklyne van vierhoeke. Voltooi dit deur regmerkies in die toepaslike blokkies te plaas.

	Parallelogram	Reghoek	Vierkant	Ruit	Trapesium	Vlieër
Hoeklyne halveer mekaar						
Hoeklyne sny mekaar loodreg						

2. Kyk na hierdie figuur.
   Let op dat *d*, *e* en *f* buitehoeke van die driehoek is.



   (a) Skryf 'n vergelyking neer wat die verband beskryf tussen hoek *d* en die som van twee ander hoeke in die diagram.

   ....

   (b) Bereken die grootte van $d + e + f$. Gee redes vir jou antwoord.

   ....

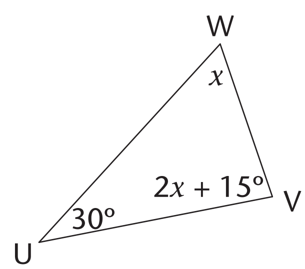
   ....

   ....

   ....

   ....

3. Bepaal die grootte van $\hat{V}$. Wys al die stappe van jou werk en gee redes wanneer jy enige meetkundige stellings gebruik.



   ....

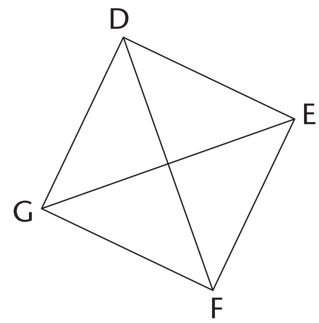
   ....

   ....

   ....

   ....

4. DEFG is 'n vierkant met DF = 12 cm. Bepaal die lengte van die vierkant se sye, afgerond tot twee desimale plekke. Wys al die stappe van jou werk en gee redes wanneer jy enige meetkundige stellings gebruik:



. . . .

. . . .

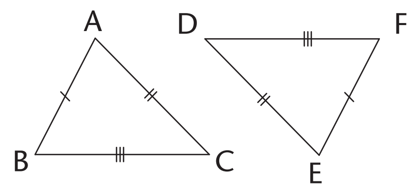
. . . .

. . . .

. . . .

5. Is hierdie pare driehoeke kongruent? Indien wel, skryf die verband in die vorm $\Delta XYZ \equiv \Delta ORQ$, met X wat ooreenstem met O, Y met R, ensovoorts. Noem ook watter voorwaarde bewys dat die driehoek kongruent is (bv. SSS). Indien hulle nie kongruent is nie, verduidelik hoekom hulle nie kongruent is nie.

   (a)

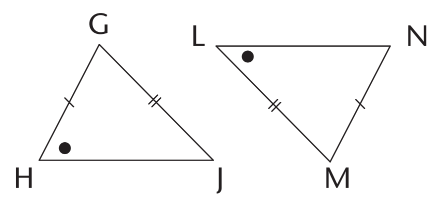


. . . .

. . . .

. . . .

   (b)

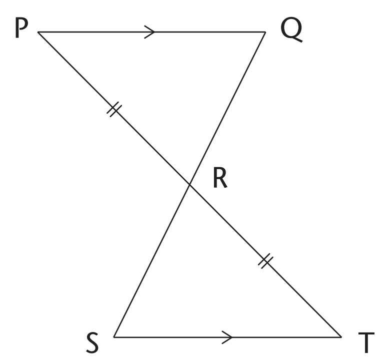


. . . .

. . . .

. . . .

6. Bewys, met stappe, redes en stellings, dat die twee driehoeke in die diagram kongruent is.



. . . .

. . . .

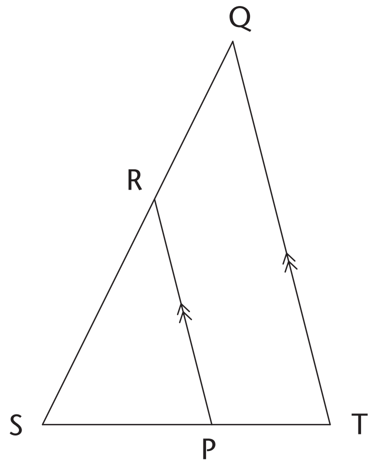
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. Kyk na die diagram.
   Bewys dat $\Delta SRP \,|||\, \Delta SQT$.



. . . .

. . . .

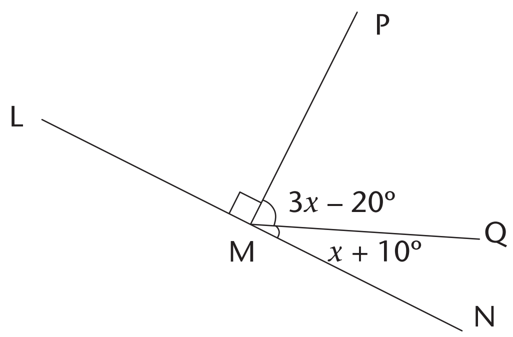
. . . .

. . . .

. . . .

MEETKUNDE VAN REGUIT LYNE

1. Bepaal die grootte van $P\hat{M}Q$.



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

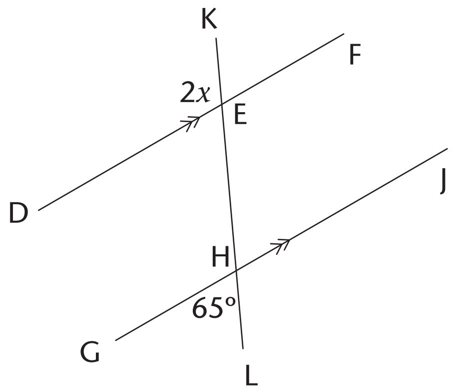
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Bepaal die waarde van x in elke geval. Wys al die stappe van jou werk en gee redes wanneer jy enige meetkundige stellings gebruik.
   (a)



. . . .

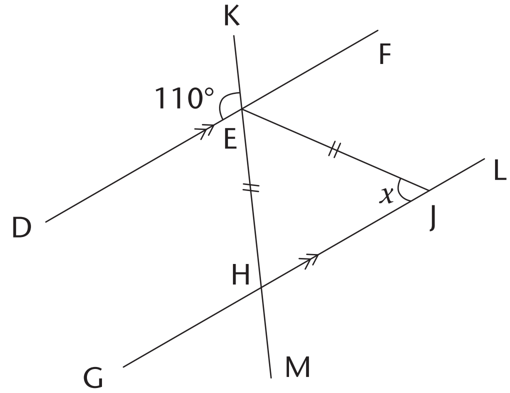
. . . .

. . . .

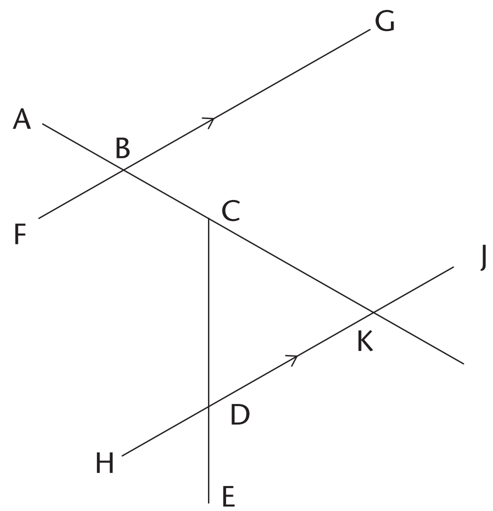
. . . .

. . . .

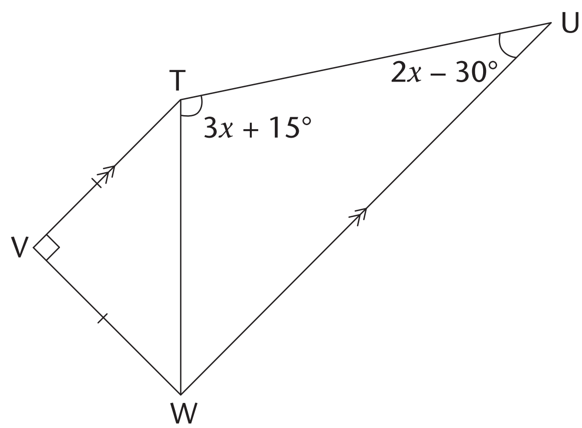
(b) Gegee: EH = EJ



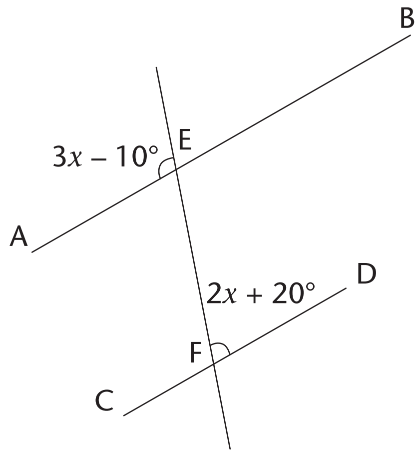
(c) $A\hat{B}G = x$; $B\hat{C}D = 130°$ en $C\hat{D}J = 72°$



(d)



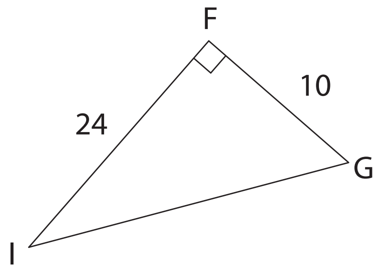
3. Vir watter waarde van x is AB en CD ewewydig? Wys al die stappe van jou werk en gee redes wanneer jy enige meetkundige stellings gebruik.



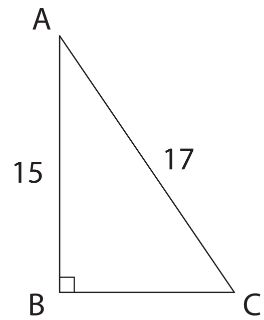
DIE STELLING VAN PYTHAGORAS

1. Bereken die lengte van die sy wat nie gegee is nie.

(a)

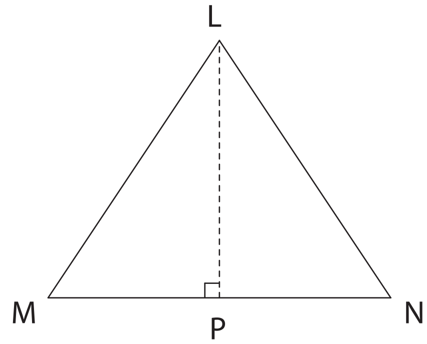


(b)



2. ’n Rivier is 50 m breed. Neem aan dat die rivier heeltemal reguit is. Indien Camelia oor die rivier swem tot by ’n punt wat 12 m stroomaf is van die punt reg oorkant haar, hoe ver sal sy swem? Rond jou antwoord af tot een desimale plek.

3. Driehoek LMN is gelykbenig met LM = LN, MN = 36 cm en LP = 24 cm. Bepaal die omtrek van die driehoek.



....

....

....

4. DEFG is 'n reghoek met DE = 20 cm en hoeklyn EG = 101 cm. Bepaal die oppervlakte van die reghoek.

....

....

5. Is dit moontlik dat 'n reghoekige driehoek die volgende sylengtes kan hê: 36; 76 en 84? Wys al die stappe wat nodig is om jou antwoord te ondersteun.

....

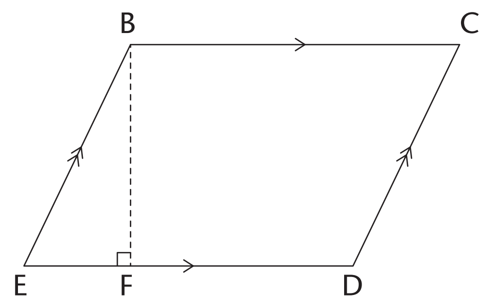
....

....

OPPERVLAKTE EN OMTREK VAN 2D-FIGURE

1. Bepaal (i) die omtrek, en (ii) die oppervlakte, van elk van die volgende figure. Gee jou antwoorde in sentimeter of vierkante sentimeter, soos van toepassing, en afgerond tot een desimale plek.

   (a) BF = 8 cm; BC = 10 cm; FD = 6 cm



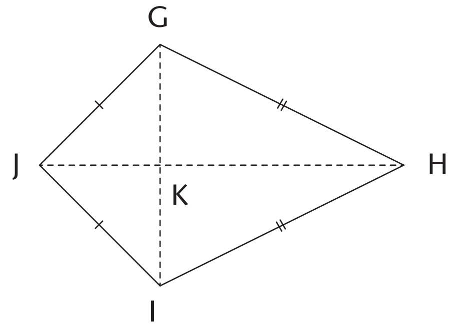
....

....

....

....

(b) GI = 12 cm; JK = 6 cm en JK : KH = 1 : 2



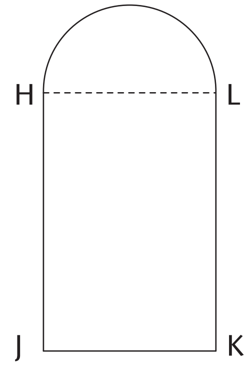
....

....

....

....

(c) Die figuur hier langsaan is 'n venster bestaande uit 'n reghoek HJKL en 'n halfsirkel bo-op. HJ = 0,5 m en JK = 0,2 m.



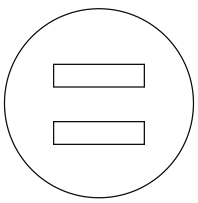
....

....

....

....

2. 'n Knoop is gemaak in die vorm van 'n sirkel met twee kongruente reghoeke uitgesny soos in die diagram gewys. Die knoop se middellyn is 25 mm en die reghoeke is 12 mm by 3 mm. Bereken die oppervlakte van die knoop se boonste oppervlak in vierkante sentimeter.



....

....

....

3. 'n Reghoek se lengte is $3d$ en sy breedte is $7e$. Skryf vereenvoudigde uitdrukkings vir:

(a) die oppervlakte van die reghoek

....

(b) die omtrek van die reghoek

....

4. Vul die blokke wat nie ingekleur is nie in die onderstaande tabel in om te wys wat die uitwerking op die omtrek en die oppervlakte is as mens een dimensie van die figuur verdubbel (vir die reghoek, die lengte; vir die driehoek, die basis; vir die sirkel, die radius). Neem die oorspronklike omtrek as x, en die oorspronklike oppervlakte as y. Een antwoord is reeds ingevul.

	Reghoek	Driehoek	Sirkel
Nuwe omtrek			
Nuwe oppervlakte	$2y$		

Assessering

In hierdie afdeling dui die getalle tussen hakies aan die einde van 'n vraag die getal punte aan wat die vraag werd is. Gebruik hierdie inligting om jou te help bepaal hoeveel werk nodig is. Die totale getal punte wat aan die assessering toegeken word, is 60.

1. (a) Konstrueer driehoek RST met RS = 7,3 cm, $\hat{R} = 42°$; en $\hat{S} = 67°$. (3)

   (b) Konstrueer die halveerlyne van elk van die hoeke van die driehoek wat jy in (a) geteken het. Jy behoort te vind dat hulle deur 'n gemeenskaplike punt gaan. (4)

   (c) Met die gemeenskaplike snypunt van die halveerlyne wat jy in (b) gekonstrueer het as middelpunt, konstrueer 'n sirkel wat al drie sye van die driehoek raak. Gebruik jou passer om die sirkel te trek. (1)

   (d) Is dit altyd moontlik om 'n driehoek te teken as die lengte van een van die sye gegee word en die groottes van die twee hoeke wat aangrensend aan daardie sy is, gegee word (soos byvoorbeeld in vraag 1(a) gedoen is)? Verduidelik jou antwoord. (2)

   ....

   ....

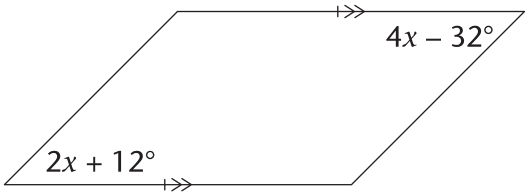
(e) Konstrueer 'n hoek van 150° sonder om 'n gradeboog te gebruik. (2)

(f) Mthunzi dink aan 'n vierhoek en gee vir Sam dié leidraad: "Die hoeklyne sny mekaar loodreg, maar die sye is nie almal ewe lank nie." Help vir Sam deur die naam van die figuur neer te skryf. (1)

....

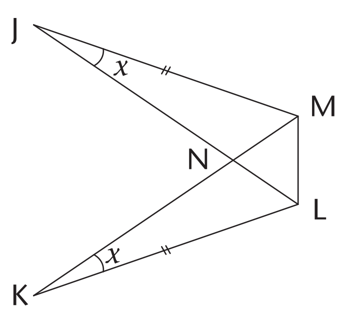
(g) Kyk na die figuur hier onder. Skryf 'n vergelyking neer en gebruik dit om die waarde van x te bepaal. (3)

....



2. Kyk na die diagram hier regs.

(a) Bewys dat $\Delta JNM \equiv \Delta KNL$. (4)



....

....

....

....

....

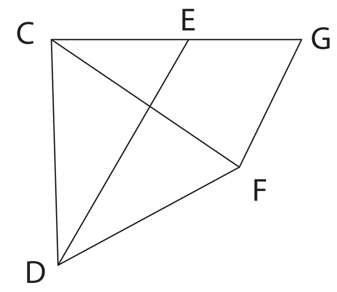
(b) Is daar genoeg inligting om te bewys dat $\Delta JLM \equiv \Delta KML$? Verduidelik jou antwoord. (2)

....

....

....

(c) Kyk na die diagram hier regs. Gegee: $\Delta CDE \equiv \Delta FCG$.
Bewys dat ED || GF. Gee redes vir alle bewerings. (3)



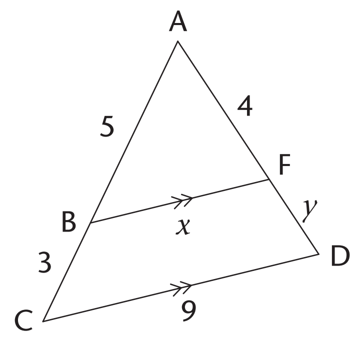
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. In die diagram hier onder stel al die getalle lengtes van sye voor.



(a) Verduidelik kortliks hoekom $\Delta ABF \,|||\, \Delta ACD$ (volle bewys nie vereis nie). (1)

. . . .

. . . .

(b) Gebruik die gelykvormigheid van die driehoeke om die lengte van die volgende lynstukke te bepaal (afgerond tot een desimale plek): (6)

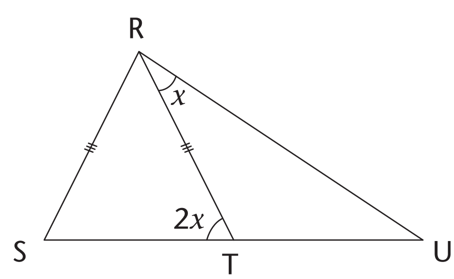
(i) x

. . . .

(ii) y

. . . .

4. Kyk na die diagram. Bepaal, met redes, die grootte van $\hat{U}$ in terme van x. (4)



. . . .

. . . .

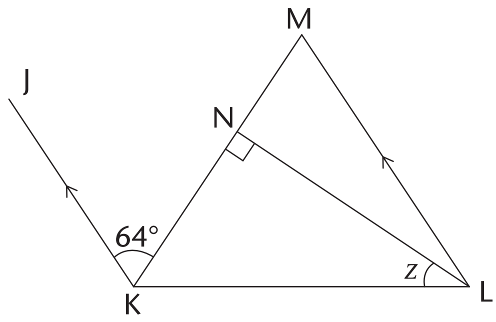
. . . .

. . . .

. . . .

Wiskunde_gr9_LB_BoekA.indb 280 2014/07/03 09:36:09 AM

5. Kyk na die diagram hier regs. MK = ML. Bepaal met redes, die waarde van z. (5)



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

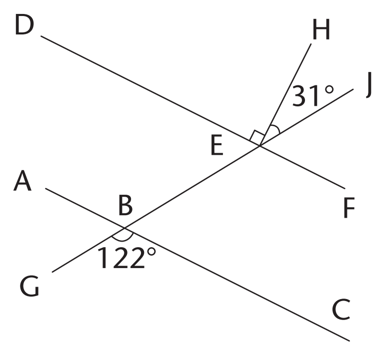
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. Is AC || DF? Motiveer deur jou antwoord te bewys. (3)



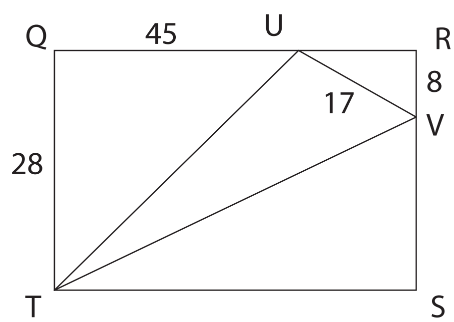
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. Kyk na die diagram hier langsaan. QRST is 'n reghoek. Alle getalle stel lengtes van sye voor.



(a) Bereken die lengte van UT. (3)

. . . .

. . . .

(b) Bereken die omtrek van driehoek TUV, afgerond tot een desimale plek. (4)

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

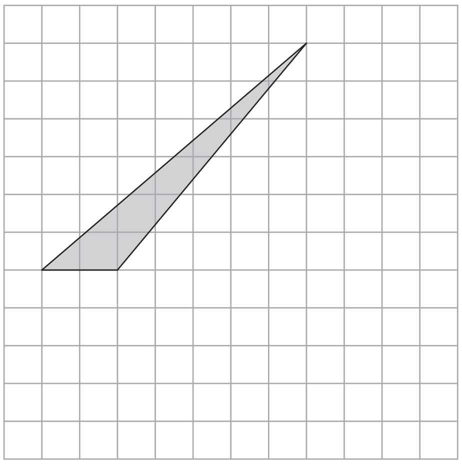
. . . .

8. ’n Reghoek se oppervlakte is $6a^2$ en sy omtrek is $10a$.
   Bepaal sy dimensies in terme van a. (2)

   ....

   ....

9. Teken, op die rooster hier onder, ’n parallelogram met dieselfde oppervlakte as hierdie driehoek. (2)



10. Die omtrek van ’n ruit is 60 cm, en die lengte van een van sy hoeklyne is 24 cm.
    (a) Bereken die lengte van ’n sy van die ruit. (1)

    ....

    (b) Bewys dat die ruit se oppervlakte 216 cm^2 is. (4)

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....