



WISKUNDE

Graad 9

Boek 2

KABV

Leerderboek

sasol
inzalo
foundation



UKUQONDA
i n s t i t u t e

**Ontwikkel en gefinansier as 'n voortgesette projek van die Sasol
Inzalo Stigting, in samewerking met die Ukuqonda Instituut.**

Gepubliseer deur The Ukuqonda Institute
Nealestraat 9, Rietondale 0084
Geregistreer as Titel 21-maatskappy, registrasienommer 2006/026363/08
Openbare Bevoordelingsorganisasie, PBO-no. 930035134
Webwerf: <http://www.ukuqonda.org.za>

Eerste publikasie in 2014
© 2014. Kopiereg op die werk is in die uitgewer gevestig.
Kopiereg op die teks is gevestig in die bydraers.

ISBN: 978-1-920705-41-1

Hierdie boek is ontwikkel in samewerking met die Departement van Basiese
Onderwys van Suid-Afrika, met finansiering van die Sasol Inzalo Stigting.

Medewerkers:

Piet Human, Erna Lampen, Marthinus de Jager, Louise Keegan, Paul van Koersveld,
Nathi Makae, Enoch Masemola, Therine van Niekerk, Alwyn Olivier, Cerenus Pfeiffer,
Renate Röhrs, Dirk Wessels, Herholdt Bezuidenhout

Erkennings:

Vir die hoofstukke oor Datahantering is waardevolle idees en datastelle uit die volgende
bronne oorgeneem:

http://www.statssa.gov.za/censusatschool/docs/Study_guide.pdf

http://www.statssa.gov.za/censusatschool/docs/Census_At_School_2009_Report.pdf

Illustrasies en grafika:

Leonora van Staden; Lisa Steyn Illustration; Zhandre Stark, Lebone Publishing Services; Ian Greenop
Rekenaargrafika op die tweede bladsy van die *Leerderboek*-hoofstukke: Piet Human

Voorbladillustrasie: Leonora van Staden

Teksontwerp: Mike Schramm

Uitleg en setwerk: Lebone Publishing Services

Gedruk deur: [printer name and address]

KOPIEREGKENNISGEWING

Jou reg om hierdie boek wetlik te kopieer

Hierdie boek word gepubliseer onder lisensiëring van 'n Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 Unported Lisensie (CC BY-NC).

Jy mag en word aangemoedig om hierdie boek vrylik te kopieer. Jy kan dit soveel keer as wat jy wil fotostateer, uitdruk en versprei.

Jy kan dit aflaai op enige elektroniese toestel, dit per epos versprei en op jou webblad laai. Jy mag ook die teks en illustrasies aanpas, op voorwaarde dat jy aan die kopiereghouers erkenning gee (“erken die oorspronklike werk”).

Beperkings: Jy mag nie kopieë van hierdie boek maak vir die doel van winsbejag nie. Dit geld vir gedrukte, elektroniese en webbladgebaseerde kopieë van hierdie boek, of enige deel van hierdie boek.

Vir meer inligting oor lisensiëring by die Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 Unported (CC BY-NC 4.0), besoek <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

Alle redelike moeite is gedoen om seker te maak dat ingeslote materiaal nie reeds kopiereg by ander entiteite het nie, of in 'n paar gevalle, om erkenning aan kopiereghouers te gee. In sommige gevalle kon dit dalk nie moontlik gewees het nie. Die uitgewer verwelkom die geleentheid om sake reg te stel met enige kopiereghouers wat nie erken is nie.



Behalwe indien anders vermeld, is hierdie werk gelisensieer onder <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

Inhoudsopgawe

Kwartaal 3

Hoofstuk 1:

Funksies	1
----------------	---

Hoofstuk 2:

Algebraïese uitdrukkings	13
--------------------------------	----

Hoofstuk 3:

Vergelykings	31
--------------------	----

Hoofstuk 4:

Grafieke	47
----------------	----

Hoofstuk 5:

Buite-oppervlakte, volume en kapasiteit van 3D-voorwerpe	75
---	----

Hoofstuk 6:

Transformasiemeetkunde	89
------------------------------	----

Hoofstuk 7:

Meetkunde van 3D-voorwerpe	109
----------------------------------	-----

Kwartaal 4

Hoofstuk 8:

Versameling, organisering en opsomming van data 127

Hoofstuk 9:

Stel data voor 141

Hoofstuk 10:

Vertolk, ontleed en doen verslag oor data 161

Hoofstuk 11:

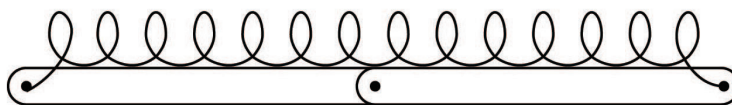
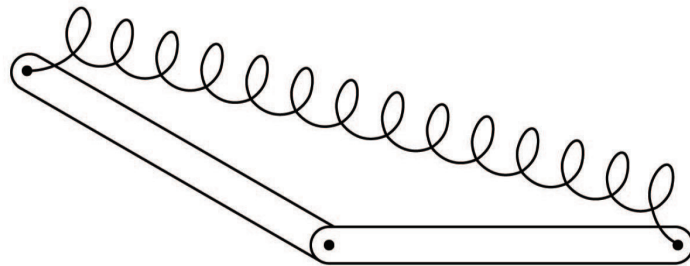
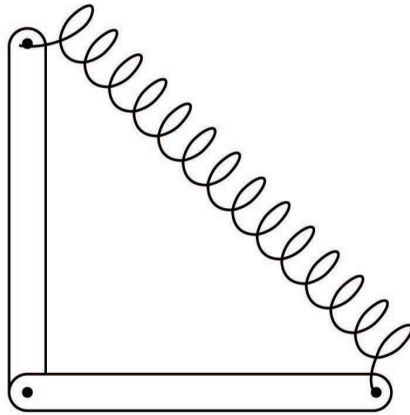
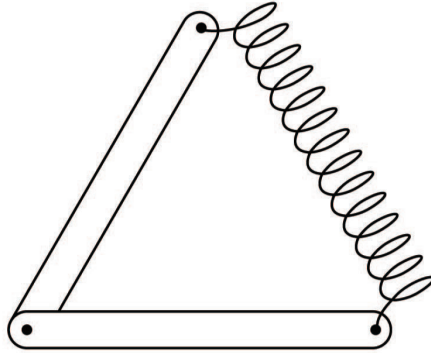
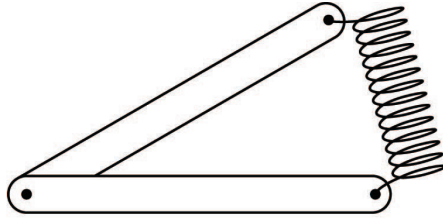
Waarskynlikheid 177

HOOFSTUK 1

Funksies

In hierdie hoofstuk gaan jy met verbande tussen veranderlikes werk. Jy gaan die waardes van uitvoerveranderlikes bepaal deur bewerkings te doen wat in algebraïese taal geskryf is. Jy sal verbande tussen veranderlikes op verskillende maniere voorstel, deur hulle in woorde te beskryf, in vloeidiagramme, in algebraïese taal en deur middel van tabelle en grafieke. Jy sal leer om raak te sien hoe dieselfde verband op verskillende maniere voorgestel kan word.

1.1	Van formules na woorde, tabelle en grafieke	3
1.2	Tabelle en grafieke	6



1 Funksies

1.1 Van formules na woorde, tabelle en grafieke

DIESELFDE OPDRAGTE IN WOORDE EN IN SIMBOLE

1. Elkeen van die formules hier onder dui 'n verband tussen twee stelling getalle aan, wat die *invoergetalle* en die *uitvoergetalle* genoem kan word. Bereken die uitvoergetalle wat met die invoergetalle 0; 1; 2 en 10 ooreenkom vir elke formule.

(a) $y = 3x + 5$

.....

(c) $y = 3x + 5x$

.....

(e) $y = 3x^2 + 5x$

.....

(b) $y = 3(x + 5)$

.....

(d) $y = 3x^2 + 5$

.....

(f) $y = 3x(x + 5)$

.....

2. Die inligting in die formule $y = 5x^2 - 3x$ kan ook in woorde uitgedruk word, byvoorbeeld: Om die uitvoergetal te kry, moet jy 3 keer die invoergetal van 5 keer die kwadraat van die invoergetal aftrek. Skryf die formules in vraag 1 in woorde:

(a) $y = 3x + 5$

.....

(b) $y = 3(x + 5)$

.....

(c) $y = 3x + 5x$

.....

.....

(d) $y = 3x^2 + 5$

.....

.....

(e) $y = 3x^2 + 5x$

.....

.....

(f) $y = 3x(x + 5)$

.....

3. Skryf 'n formule wat dieselfde inligting bevat vir elke stel instruksies.

- (a) *vermenigvuldig die invoergetal met 10, trek dan 3 af om die uitvoergetal te kry*
- (b) *trek 3 van die kwadraat van die invoergetal af, vermenigvuldig dan met 10 om die uitvoergetal te kry*
- (c) *vermenigvuldig die kwadraat van die invoergetal met 10, tel dan 5 keer die invoergetal by om die uitvoergetal te kry*
- (d) *trek 7 keer die kwadraat van die invoergetal van 100 af, vermenigvuldig dan met 3 om die uitvoergetal te kry*
- (e) *tel 4 by die invoergetal, trek dan die antwoord van 50 af om die uitvoergetal te kry*
- (f) *vermenigvuldig die invoergetal met 3, trek dan die antwoord van 15 af om die uitvoergetal te kry*

4. Om jou antwoorde vir vraag 3 te kontroleer, gebruik die tabel hier onder: Voer eers die woordelike (verbale) instruksies uit vir die invoergetalle 1, 5 en 10 in elke vraag hier bo. Kies dan nog 'n invoergetal van jou keuse by. Gebruik dan die formule wat jy vir elke vraag hier bo geskryf het, om die uitvoergetalle te bereken. As hulle verskil, is iets verkeerd. Soek die fout en stel dit reg.

		1	5	10	
(a)	verbale beskrywing				
	formule				
(b)	verbale beskrywing				
	formule				
(c)	verbale beskrywing				
	formule				
(d)	verbale beskrywing				
	formule				
(e)	verbale beskrywing				
	formule				
(f)	verbale beskrywing				
	formule				

5. In sekere gevalle kan vloedigramme gebruik word om rekeninstruksies te gee om uitvoergetalle te bereken. Skryf die formule vir elke vloedigram, en skryf die instruksie ook in woorde.

(a) $\boxed{\times 3} \rightarrow \boxed{+ 17} \rightarrow \dots\dots\dots$

(b) $\boxed{+ 5} \rightarrow \boxed{\times 3} \rightarrow \boxed{+ 2} \rightarrow \dots\dots\dots$

(c) $\boxed{- 2} \rightarrow \boxed{\times 3} \rightarrow \boxed{+ 23} \rightarrow \dots\dots\dots$

(d) $\boxed{\times 2} \rightarrow \boxed{+ 3} \rightarrow \boxed{\times 5} \rightarrow \boxed{+ 4} \rightarrow \dots\dots\dots$

(e) $\boxed{+ 3} \rightarrow \boxed{\times 2} \rightarrow \boxed{+ 4} \rightarrow \boxed{\times 5} \rightarrow \dots\dots\dots$

(f) $\boxed{\times 10} \rightarrow \boxed{+ 19} \rightarrow \dots\dots\dots$

(g) $\boxed{+ 5} \rightarrow \boxed{\times 10} \rightarrow \dots\dots\dots$

6. (a) Voltooi die tabel:

x	0	1	2	3
y volgens jou formule vir 5(a)				
y volgens jou formule vir 5(b)				
y volgens jou formule vir 5(c)				

- (b) As jou uitvoergetalle vir 5(a), 5(b) en 5(c) nie dieselfde is nie, het jy êrens 'n fout gemaak. Soek jou fout en maak dit reg.

7. (a) Voltooi die tabel:

x	-3	-2	-1	0
y volgens jou formule vir 5(d)				
y volgens jou formule vir 5(e)				
y volgens jou formule vir 5(f)				
y volgens jou formule vir 5(g)				

- (b) As jou uitvoergetalle vir 5(d) en 5(f) nie dieselfde is nie, het jy êrens 'n fout gemaak. Soek jou fout en maak dit reg.
- (c) As jou uitvoergetalle vir 5(e) en 5(g) nie dieselfde is nie, het jy êrens 'n fout gemaak. Soek jou fout en maak dit reg.

8. Verduidelik hoekom die uitvoergetalle in 5(a), 5(b) en 5(c) dieselfde is.

.....

.....

1.2 Tabele en grafieke

1. Voltooi die tabel om sommige van die invoer- en uitvoergetalle van die verband, wat met die formule $y = 2x - 3$ beskryf word, te wys.

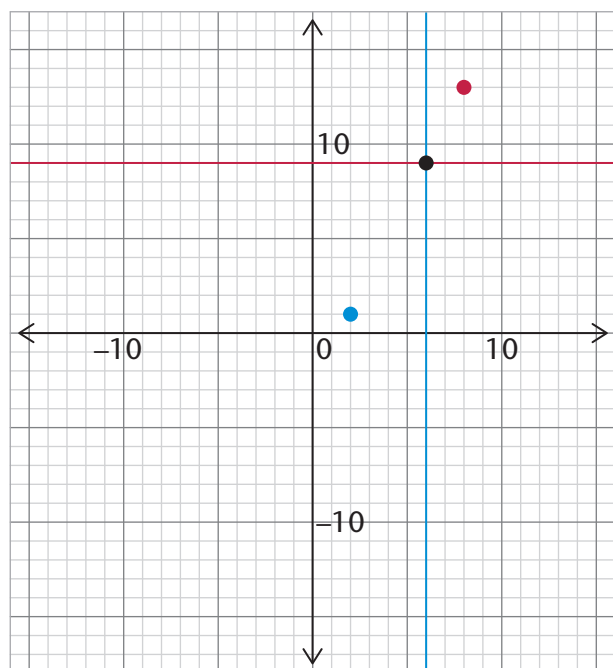
invoergetalle	-5	0	2	4	6	8
uitvoergetalle						

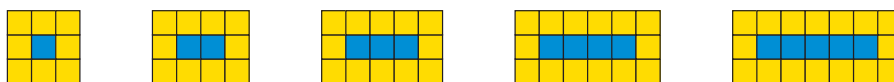
Die vertikale blou lyn op hierdie grafiek stel die invoergetal 6 voor.

Die dik horisontale rooi lyn stel die uitvoergetal 9 voor.

Die swart punt waar die blou en die rooi lyne kruis dui aan dat die invoergetal 6 en die uitvoergetal 9 'n paar vorm. Ons sê ook dat die swart punt die **geordende getallepaar** (6; 9) voorstel.

2. (a) Watter geordende getallepaar stel die rooi punt op die grafiek voor?
- (b) Watter geordende getallepaar stel die blou punt op die grafiek voor?

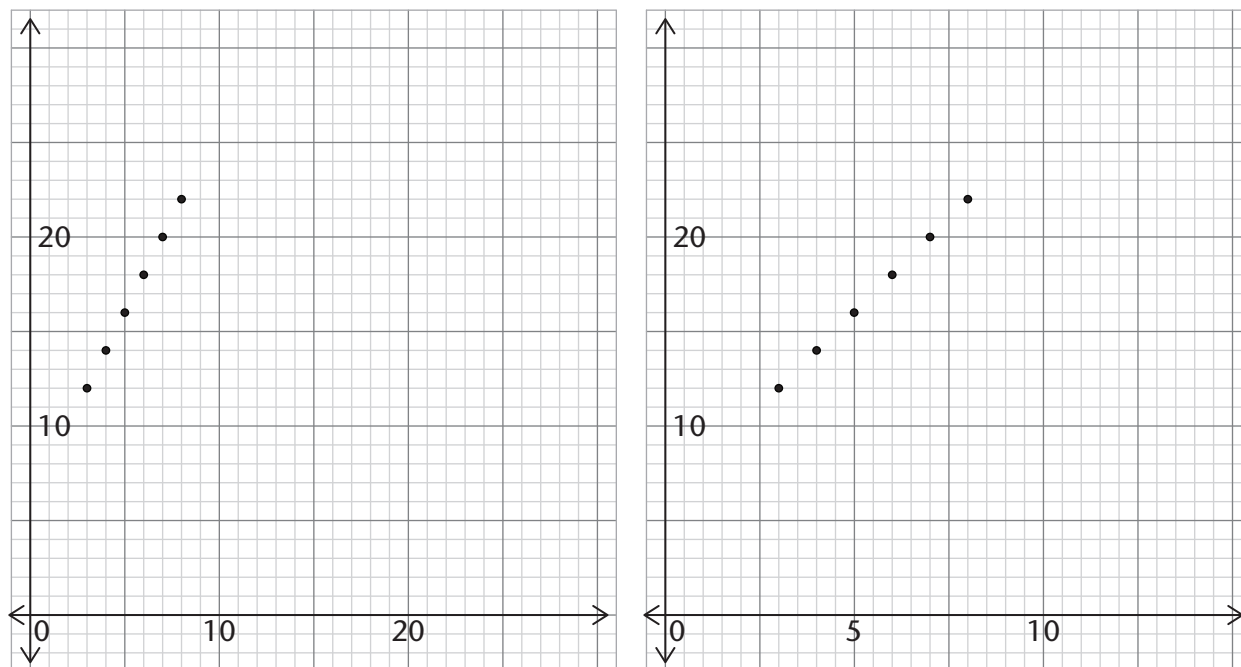




'n Verband tussen twee veranderlikes kan voorgestel word met 'n tabel van waardes van die **onafhanklike** en **afhanklike** veranderlikes (invoer- en uitvoergetalle):

waardes van die onafhanklike veranderlike	3	4	5	6	7	8
waardes van die afhanklike veranderlike	12	14	16	18	20	22

Dieselfde inligting kan ook op 'n grafiek gewys word:



3. Wys die twee grafieke verskillende verbande tussen die twee veranderlikes?

.....

4. Hoe verskil die grafieke?

.....

5. Gebruik een van die grafieke om uit te vind hoeveel geel vierkantjies daar in 'n rangskikking, soos die hier bo, met 12 vierkantjies sal wees.

6. Wys hierdie tabel dieselfde verband as die tabel bo-aan die bladsy? Verduidelik jou antwoord.

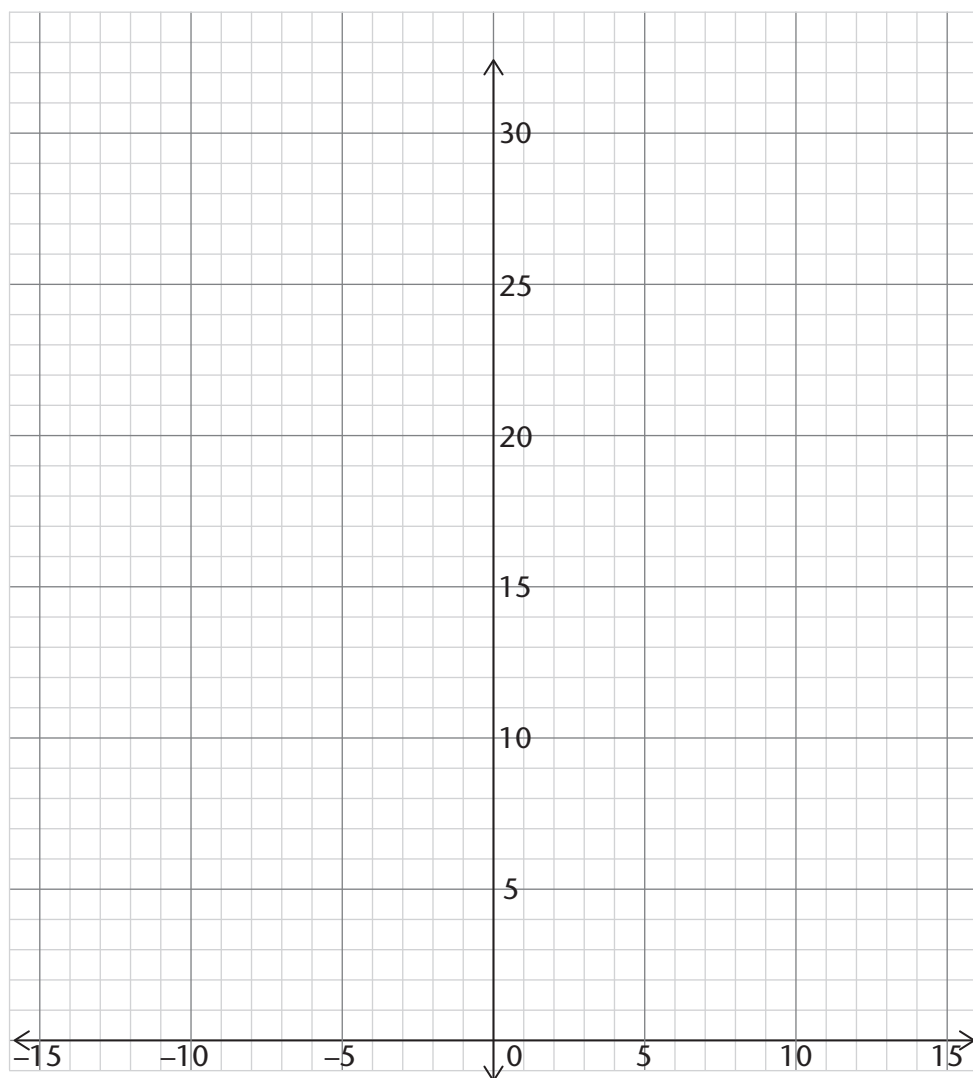
waardes van die onafhanklike veranderlike	0	5	10	15	20	25
waardes van die afhanklike veranderlike	8	18	28	38	48	58

.....

7. (a) Voltooi die tabel vir die verband beskryf deur $y = x^2$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											

- (b) Stel die geordende getalpare in die tabel op die grafiekblad voor.



8. Voltooi die tabel vir $y = 15 + x$ en stel die geordende getalpare op die grafiekblad hier bo voor.

x	-15	-10	-5	0	5	10	15
$15 + x$							

9. Voltooi die tabel vir $y = 15 - x$ en stel die geordende getalpare op die grafiekblad hier bo voor.

x	-15	-10	-5	0	5	10	15
$15 - x$							

10. (a) Daar is patrone in die uitvoerwaardes vir $y = x^2$ en $y = 15 + x$ in die tabelle.
Beskryf in woorde (gebruik *toeneem* en *afneem*) hoe die patrone verskil.

.....

.....

- (b) Beskryf in woorde hoe die grafieke vir $y = x^2$ en $y = 15 + x$ verskil.

.....

11. (a) Beskryf in woorde hoe die patrone in die uitvoerwaardes vir $y = 15 + x$ en $y = 15 - x$ verskil. Gebruik die woorde *toeneem* en *afneem* in jou beskrywing.

.....

.....

- (b) Beskryf in woorde hoe die grafieke vir $y = 15 + x$ en $y = 15 - x$ verskil.

.....

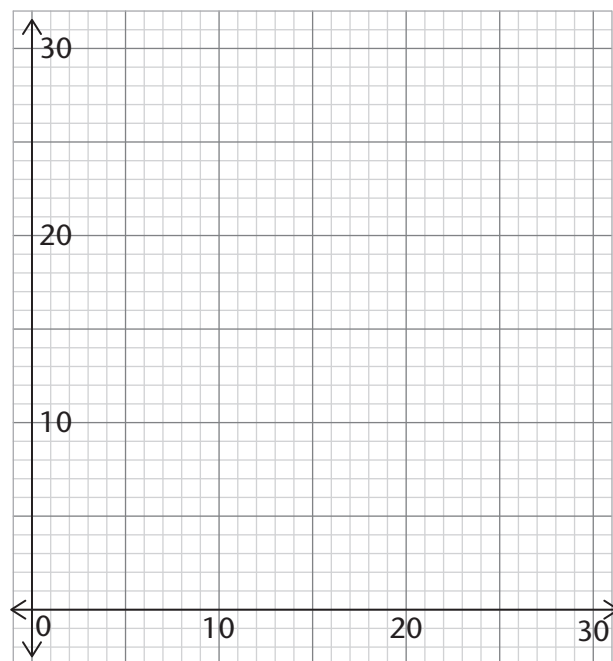
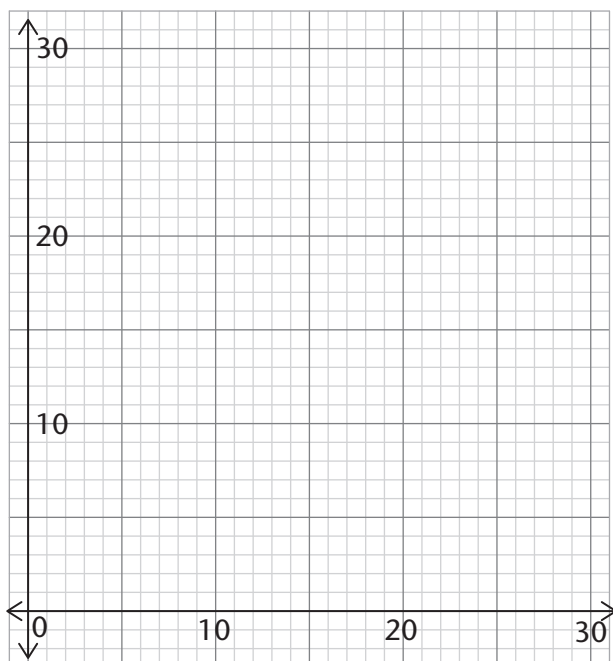
.....

.....

12. Voltooi elk van die volgende tabelle deur die patroon van die uitvoergetalle verder uit te werk. Stel ook die verband op die grafiekblaaie hier onder voor.

(a)	invoergetalle	0	5	10	15	20	25	30
	uitvoergetalle	0	4	8	12			

(b)	invoergetalle	0	5	10	15	20	25	30
	uitvoergetalle	0	2	4	6			



13. Hoe verskil die patrone in 12(a) en (b), en hoe verskil die grafieke?

.....

14. Elke tabel hier onder wys sommige van die waardes van 'n verband wat deur een van hierdie reëls voorgestel word:

$$y = -2x + 3$$

$$y = 2x - 5$$

$$y = -3x + 5$$

$$y = -3(x + 2)$$

$$y = 3x + 2$$

$$y = 5(x - 2)$$

$$y = 2x + 3$$

$$y = 2x + 5$$

$$y = -3x + 6$$

$$y = 5x + 10$$

$$y = 5x - 10$$

$$y = -x + 3$$

(a) Voltooi die uitvoerwaardes in die tabelle.

(b) Beskryf hoe jy die ontbrekende uitvoerwaardes in elke tabel bereken het. Skryf ook die reël (formule) vir elke tabel neer.

- A.
 B.
 C.
 D.
 E.
 F.
 G.

A.	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	6	7	y	2	5	8					
x	0	1	2	3	4	5	6	7											
y	2	5	8																
B.	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>1</td><td>-1</td><td>-3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	6	7	y	3	1	-1	-3				
x	0	1	2	3	4	5	6	7											
y	3	1	-1	-3															
C.	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>y</td><td>-10</td><td>-5</td><td>0</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	6	7	y	-10	-5	0	5				
x	0	1	2	3	4	5	6	7											
y	-10	-5	0	5															
D.	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>y</td><td>-5</td><td>-3</td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	6	7	y	-5	-3	-1					
x	0	1	2	3	4	5	6	7											
y	-5	-3	-1																
E.	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>y</td><td>6</td><td>3</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	6	7	y	6	3	0					
x	0	1	2	3	4	5	6	7											
y	6	3	0																
F.	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	6	7	y	3	2	1	0				
x	0	1	2	3	4	5	6	7											
y	3	2	1	0															
G.	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	6	7	y	3	5	7					
x	0	1	2	3	4	5	6	7											
y	3	5	7																

'N ONDERSOEK: PATRONE IN VERSKILLE

1. Voltooi die tabel vir $y = x^2$, $z = x^2 + 1^2$, $w = x^2 + 2^2$ en $s = x^2 + 3^2$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y										
z										
w										
s										

2. Voltooi die tabelle vir $y = x^2$, $p = (x + 1)^2$, $q = (x + 2)^2$ en $r = (x + 3)^2$.

(a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p										
y										
$p - y$										

(b)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q										
y										
$q - y$										

(c)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r										
y										
$r - y$										

3. In elk van die volgende gevalle behoort jy verskillende uitvoerwaardes vir die twee funksies te hê. Soek jou foute as jou uitvoerwaardes dieselfde is, en maak hulle reg.

- (a) $z = x^2 + 1^2$ en $p = (x + 1)^2$
 (b) $w = x^2 + 2^2$ en $q = (x + 2)^2$
 (c) $s = x^2 + 3^2$ en $r = (x + 3)^2$

4. Voltooi die tabelle op die volgende bladsy vir $y = x^2$, $p = (x + 1)^2$, $q = (x + 2)^2$ en $r = (x + 3)^2$. Gebruik jou antwoorde van vraag 3

(a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p - y$										
$q - y$										
$r - y$										

(b)

x	10	11	12	13	14	15	16	17
$p - y$								
$q - y$								
$r - y$								

5. (a) Voltooi die tabel.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2x + 1$										
$4x + 4$										
$6x + 9$										

(b) Wat is die konstante verskille in die rye van waardes van $2x + 1$, $4x + 4$ en $6x + 9$, vir $x = 1; 2; 3; 4 \dots$?

(c) Het jy enige idee of die soortgelyke ry waardes van $12x + 36$ ook 'n konstante verskil sal hê en wat die verskil kan wees?

.....

(d) Daar is bepaalde patrone in die koëffisiënte en konstante terme van die uitdrukkings in die tabelle hier bo. Sit die patrone voort om nog soortgelyke uitdrukkings te vorm en voltooi die tabel hier onder vir jou uitdrukkings.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

6. (a) As jou antwoorde vir die tabelle in 4(a) en 5(a) reg is, sal hulle dieselfde wees. Probeer om te verduidelik hoekom hulle dieselfde is.

.....

.....

.....

(b) Watter uitdrukkings, soortgelyk aan die in vraag 5(a), het moontlik dieselfde waardes as $(x + 4)^2 - x^2$ en $(x + 5)^2 - x^2$ respektiewelik?

.....

HOOFSTUK 2

Algebraïese uitdrukkings

2.1	Inleiding.....	15
2.2	Faktore van uitdrukkings van die vorm $ab + ac$	16
2.3	Faktore van uitdrukkings van die vorm $x^2 + (b + c)x + bc$	19
2.4	Faktore van uitdrukkings van die vorm $a^2 - b^2$	22
2.5	Vereenvoudig algebraïese breuke	25

$$(8 \times 23 - 5) \times 3 \times 23 - (4 \times 23 + 3) \times 6 \times 23$$

$$= 51$$

$$3 \times 23 = 51$$

$$(8 \times 25 - 5) \times 3 \times 25 - (4 \times 25 + 3) \times 6 \times 25$$

$$= 75$$

$$3 \times 25 = 75$$

$$(8 \times 17 - 5) \times 3 \times 17 - (4 \times 17 + 3) \times 6 \times 17$$

$$= 69$$

$$3 \times 17 = 69$$

$$(8 \times 27 - 5) \times 3 \times 27 - (4 \times 27 + 3) \times 6 \times 27$$

$$= 81$$

$$3 \times 27 = 81$$

2 Algebraïese uitdrukkings

2.1 Inleiding

MANIPULEER UITDRUKKINGS

Wanneer jy 'n veelterm as 'n produk skryf, word die proses **faktorisering** genoem. Dit is die inverse van **uitbreiding**.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{faktorisering}} \\ x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3). \\ \xleftarrow{\text{uitbreiding}} \end{array}$$

'n Numeriese of algebraïese uitdrukking waarvan die laaste stap vermenigvuldiging is, word 'n **produk** genoem. Byvoorbeeld, $12(37 + 63)$, $2x(x - 5)$ en xyz word produkte genoem. 'n Produk is 'n **eenterm**.

Elke gedeelte van 'n produk word 'n faktor van die uitdrukking genoem. As $c = ab$, dan is a en b faktore van c en $x + 2$ en $x + 3$ is die faktore van $(x + 2)(x + 3)$. Omdat $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, is $x + 2$ en $x + 3$ faktore van $x^2 + 5x + 6$.

1. Bereken die waarde van die volgende uitdrukkings vir $x = 12$.

(a) $\frac{(x + 2)(x + 5)}{x + 2}$

(b) $\frac{(x - 3)(x - 4)}{x - 4}$

.....

(c) $\frac{x(2x + 1)}{2x + 1}$

(d) $\frac{(x + 5)(x - 5)}{x - 5}$

.....

2. Kyk of die volgende uitdrukkings identiteite is deur die regterhandse uitdrukkings uit te brei

$2(x + 3) = 2x + 6$, is waar vir alle waardes van x . So 'n stelling word 'n **identiteit** genoem.

(a) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

(b) $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

.....

(c) $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$

(d) $x^2 + 3x = x(x + 3)$

.....

3. Skryf die faktore van die volgende uitdrukkings neer:

- (a) $x^2 + x - 6$ (b) $x^2 + 3x$
 (c) $x^2 + 4x + 3$ (d) $x^2 - 9$

4. Vereenvoudig die volgende kwosiënte (algebraïese breuke).

- (a) $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$ (b) $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$
 (c) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ (d) $\frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 3)(x + 1)}$

5. (a) Sê nou jy moet die waarde van die uitdrukking in (a) kry vir $x = 15$. Watter uitdrukking vereis die minste werk? $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$ of $x - 3$?

(b) Is jy seker dat jy dieselfde antwoorde vir die twee uitdrukkings in (a) sal kry?

In die volgende afdelings gaan jy leer hoe om bepaalde tipes uitdrukkings te faktorisêr. Die volgende identeieite is nuttig wanneer jy moet faktorisêr:

$$a(b + c) = ab + ac \quad (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

2.2 Faktore van uitdrukkings van die vorm $ab + ac$

DIE GROOTSTE GEMENE FAKTOR

1. (a) Is 5 'n faktor van 20? (b) Is 5 'n faktor van 30?
 (c) Is 5'n faktor van $30 + 20$? (d) Is 5 'n faktor van $30 - 20$?
 2. (a) Is a 'n faktor van ab ? (b) Is a 'n faktor van ac ?
 (c) Is a 'n faktor van $ab + ac$? (d) Gee nog 'n faktor van $ab + ac$
 (e) Probeer $\frac{ab + ac}{a}$ vereenvoudig

Veronderstel jy moet $4x^3 + 2x^2 - 6x$ faktorisêr. Dit is duidelik dat $2x$ 'n faktor van elke term is, dus is dit 'n faktor van $4x^3 + 2x^2 - 6x$.

Deur te deel kry ons $\frac{4x^3 + 2x^2 - 6x}{2x} = 2x^2 + x - 3$. Dus $4x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(2x^2 + x - 3)$.

Jy kan jou faktorisering altyd kontroleer deur die antwoord uit te brei en seker te maak dat die resultaat dieselfde is as die oorspronklike uitdrukking.

3. Voltooi die tabel.

Vir elke uitdrukking, vind:	$3x + 6y$	$4a^3 + 2a$	$5x - 2x^2$	$ax^2 - bx^3$	$12a^2b + 18ab^2$
die faktore van die eerste term	3; x				
die faktore van die tweede term	2; 3; y				
die grootste gemene faktor van die twee terme	3				
Skryf die uitdrukking in faktorvorm	$3(x + 2y)$				

4. Bestudeer die voorbeeld en faktoriseer dan die uitdrukkings wat volg.

$$\begin{aligned}(a - b)x + (b - a)y &= (a - b)x - (a - b)y \\ &= (a - b)(x - y)\end{aligned}$$

Let op dat:

$$b - a = -a + b = -(a - b)$$

(a) $(a - b)x + a - b$

(b) $(a - b)x - a + b$

.....

.....

(c) $(a + b)^2 - (a + b)$

(d) $(a + b)x - a - b$

.....

.....

(e) $3x(2x - 3) - (3 - 2x)$

(f) $(y^2 - 4y) + (3y - 12)$

.....

.....

IETS TUSSENIN

1. Deur die tabelle hier onder te voltooi sal jy iets leer wat jou sal help om die faktore te kry van uitdrukkings van die vorm $x^2 + (b + c)x + bc$, byvoorbeeld $x^2 + 17x + 30$.

b	1	2	3	5	-1	-2	-3	-5
c	30	15	10	6	-30	-15	-10	-6
$b + c$								
bc								

b	-1	-2	-3	-5	1	2	3	5
c	30	15	10	6	-30	-15	-10	-6
$b + c$								
bc								

2. Skryf twee getalle x en y , sodat hulle produk xy 30 is, en hulle som $x + y$ die gegewe getal is.

(a) $xy = 30$ en $x + y = 13$

(b) $xy = 30$ en $x + y = -17$

.....

.....

(c) $xy = 30$ en $x + y = -11$

(d) $xy = 30$ en $x + y = 11$

.....

.....

3. Bepaal x en y .

(a) $xy = -30$ en $x + y = -13$

.....

(b) $xy = 30$ en $x + y = -13$

(c) $xy = -30$ en $x + y = 13$

.....

.....

(d) $xy = -30$ en $x + y = -1$

(e) $xy = -30$ en $x + y = 1$

.....

.....

4. Bepaal x en y .

(a) $xy = 36$ en $x + y = 15$

(b) $xy = 40$ en $x + y = 22$

.....

.....

(c) $xy = 36$ en $x + y = 20$

(d) $xy = -40$ en $x + y = 18$

.....

.....

(e) $xy = 36$ en $x + y = -20$

(f) $xy = -40$ en $x + y = -18$

.....

.....

5. Bereken elke uitdrukking vir $x = 2$. Brei ook elke uitdrukking uit.

(a) $(x + 5)(x - 2)$

(b) $(x + 5)(x + 2)$

.....

.....

(c) $(x - 5)(x - 2)$

(d) $(x - 5)(x + 2)$

.....

.....

6. Bereken elke veelterm wat jy in vraag 5 gevorm het vir $x = 2$. Vergelyk die antwoorde met die waardes van die ooreenstemmende produkuitdrukings in vraag 1. In gevalle waar die waardes verskil, het jy dalk êrens 'n fout gemaak het. Stel die foute reg voordat jy met vraag 7 aangaan.

.....

Jy mag die tabelle gebruik wat jy in vraag 1 voltooi het om die antwoorde van sommige van die vrae te vind.

7. Brei elke produk uit.

- (a) $(x + 3)(x + 8)$
- (b) $(x + 2)(x + 12)$
- (c) $(x + 4)(x + 6)$
- (d) $(x + 1)(x + 24)$
- (e) $(x + 3)(x - 8)$
- (f) $(x + 2)(x - 12)$
- (g) $(x + 4)(x - 6)$
- (h) $(x + 1)(x - 24)$

2.3 Faktore van uitdrukkings van die vorm $x^2 + (b + c)x + bc$

Die uitgebreide vorm van 'n produk **van twee lineêre tweeterme** soos $(x + 3)(x + 8)$ of $(x + 3)(x - 8)$ is 'n **kwadratiese drieterm** soos $x^2 + 11x + 24$ or $x^2 - 5x - 24$ met

- 'n term in x^2 ,
- 'n term in x wat die middelterm genoem word, wat $+11x$ in $x^2 + 11x + 24$ is en $-5x$ in $x^2 - 5x - 24$, en
- 'n konstante term wat ook die laaste term genoem word, wat $+24$ in $x^2 + 11x + 24$ is, en -24 in $x^2 - 5x - 24$.

Om 'n uitdrukking soos $x^2 + 5x + 6$ te faktoriseer, beteken om die proses van uitbreiding om te keer. Dit beteken dat ons moet uitvind watter tweeterme die drieterm sal gee as die produk van die tweeterme uitgebrei word, byvoorbeeld:

$$\begin{array}{ccc} & x^2 + 5x + 6 = (? + ?)(? + ?) & \\ \text{uitbreiding} & \begin{array}{c} \text{↩} \\ (x + 2)(x + 3) \\ \text{↪} \\ = x^2 + 5x + 6 \end{array} & \text{faktorisering} \end{array}$$

PROBEER OM DIE FAKTORE TE KRY

1. Vul die ontbrekende dele van die faktore in elk van die volgende in:

- (a) $(x + 3)(x \dots) = x^2 + 9x + 18$
- (b) $(x + 2)(x \dots) = x^2 + 11x + 18$
- (c) $(x + 3)(x - \dots) = x^2 + 9x - 18$

(d) $(\dots + \dots)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$

(e) $x^2 - x - 6$

.....

2. Brei elke produk uit:

(a) $(x + p)(x + q)$

.....

(b) $(x + p)(x - q)$

.....

(c) $(x - p)(x + q)$

.....

(d) $(x - p)(x - q)$

.....

Die produk van die eerste terme van die faktore moet gelyk wees aan die x^2 term van die drieterm.

$$\begin{array}{c} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow \end{array}$$

Beteken: $x \times x = x^2$

Beteken: $2 \times 3 = 6$

Die produk van die laaste terme van die faktore moet gelyk wees aan die laaste term (die konstante term) van die drieterm. Die som van die binneste en buitenste produkte moet gelyk wees aan die term in x (die middelste term) van die drieterm.

$$\begin{array}{c} \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) \\ \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \end{array}$$

Beteken: $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$

$(x + a)(x + b) = x \times x + ax + bx + a \times b = x^2 + (a + b)x + ab$

3. Probeer om hierdie drieterme te faktoriseer.

(a) $x^2 + 8x + 12$

(b) $x^2 - 8x + 12$

.....

OEFFEN MAAK DIE MEESTER

1. Faktoriseer die volgende drieterme: (Onthou om jou antwoord te kontroleer deur die faktore uit te brei om te toets of jy die oorspronklike uitdrukking kry.)

(a) $a^2 + 9a + 14$

(b) $x^2 + 3x - 18$

.....

(c) $x^2 - 18x + 17$

(d) $y^2 + 17y + 30$

.....

(e) $y^2 - 13y - 30$

(f) $y^2 + 7y - 30$

.....

(g) $x^2 + 2x - 15$

(h) $m^2 + 4m - 21$

.....

(i) $x^2 - 6x + 9$

(j) $b^2 + 15b + 56$

.....

.....

(k) $a^2 - 2a - 63$

(l) $a^2 - ab - 30b^2$

.....

(m) $x^2 - 5xy - 24y^2$

(n) $x^2 - 13x + 40$

.....

'n Alternatiewe metode

2. Bestudeer die voorbeeld en faktoriseer dan die uitdrukkings wat volg.

Voorbeeld: Faktoriseer $ac + bc + bd + ad$

$$ac + bc + bd + ad = (ac + bc) + (bd + ad)$$

$$= c(a + b) + d(b + a)$$

$$= (a + b)(c + d)$$

Orden en groepeer terme met gemene faktore

Haal die gemene faktor uit

Skryf uitdrukking as 'n produk

(a) $px + py + qx + qy$

(b) $9x^3 - 27x^2 + x - 3$

.....

.....

(c) $4a + 4b + 3ap + 3bp$

(d) $a^4 + a^3 + 3a + 3$

(e) $xy + x + y + 1$

(f) $ac - ad - bc + bd$

Nog 'n metode

Voorbeeld 1:

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x + 3 \\ = & x^2 + x + 3x + 3 \\ = & (x^2 + x) + (3x + 3) \\ = & x(x + 1) + 3(x + 1) \\ = & (x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

Voorbeeld 2:

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x - 4 \\ = & x^2 - x + 4x - 4 \\ = & (x^2 - x) + (4x - 4) \\ = & x(x - 1) + 4(x - 1) \\ = & (x - 1)(x + 4) \end{aligned}$$

Bewerking:

*Herskryf middelterm as som van 2 terme.
Groepeer.
Haal die GGF uit elke groep uit.
Skryf as 'n produk.*

3. Faktoriseer:

(a) $x^2 + 7x + 12$

(b) $x^2 - 7x + 12$

Die uitdaging is om die middelterm op so 'n manier as die som van twee terme te skryf, dat jy die gemene faktor kan uithaal.

2.4 Faktore van uitdrukkings van die vorm $a^2 - b^2$

VOORAFWERK

- Voltooi die tabel en kyk of jy 'n patroon (reël) kan raaksien waarvolgens jy die antwoorde van die berekeninge in die eerste kolom kan voorspel sonder om te kwadreer:

(a)	$3^2 - 2^2$	$3 + 2$	$3 - 2$	$(3 + 2)(3 - 2)$
(b)	$4^2 - 3^2$	$4 + 3$	$4 - 3$	$(4 + 3)(4 - 3)$
(c)	$6^2 - 4^2$	$6 + 4$	$6 - 4$	$(6 + 4)(6 - 4)$
(d)	$9^2 - 3^2$	$9 + 3$	$9 - 3$	$(9 + 3)(9 - 3)$

2. Merk jy 'n patroon (reël) waarvolgens jy die antwoorde op sulke berekeninge kan voorspel?

.....

.....

3. Voorspel nou die antwoorde op die volgende sonder om kwadrate uit te werk. Kontroleer jou antwoorde waar nodig. Sal die reël wat jy in vraag 2 ontdek het ook werk vir die volgende gevalle?

(a) $17^2 - 13^2$

(b) $54^2 - 46^2$

(c) $28^2 - 22^2$

.....

.....

4. Formuleer jou reël in simbole:

$a^2 - b^2 =$

5. Kan jy verduidelik hoekom die faktore van $a^2 - b^2$ hierdie vorm het?

.....

Anders gestel: As p en q volkome vierkante is, ook "algebraïese vierkante", dan is:

$$\begin{array}{rcl} p - q & = & (\sqrt{p} + \sqrt{q})(\sqrt{p} - \sqrt{q}) \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 9x^4 - 4y^2 & = & (\sqrt{9x^4} + \sqrt{4y^2})(\sqrt{9x^4} - \sqrt{4y^2}) \\ & = & (3x^2 + 2y)(3x^2 - 2y) \end{array}$$

(Let op dat die bewerkings binne die hakies verskil.)

'n Uitdrukking van die vorm $a^2 - b^2$ word die **verskil tussen twee vierkante** genoem. Om die verskil tussen vierkante te faktorisêr, gebruik ons die identiteit: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ waar a en b getalle of algebraïese uitdrukkings voorstel.

FAKTORISEER DIE VERSKIL TUSSEN TWEE VIERKANTE-UITDRUKKINGS

1. Gebruik die vaardighede wat jy in die vorige oefeninge aangeleer het om die volgende te faktorisêr:

(a) $4a^2 - b^2$

(b) $m^2 - 9n^2$

.....

(c) $25x^2 - 36y^2$

(d) $121x^2 - 144y^2$

.....

(e) $16p^2 - 49q^2$

(f) $64a^2 - 25b^2c^2$

.....

(g) $x^2 - 4$

(h) $16x^2 - 36y^2$

.....

Faktoriseer altyd alles volledig.

Haal altyd die grootste gemene faktor uit as daar een is.

Een (getal 1) is 'n volkome vierkant: $1 = 1^2$ en $1^m = 1$.

Die eksponensiële wet: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. Faktoriseer:

(a) $x^4 - 1$

(b) $16a^4 - 81$

(c) $1 - a^2b^2c^2$

(d) $25x^{10} - 49y^8$

(e) $2x^2 - 18$

(f) $200 - 2b^2$

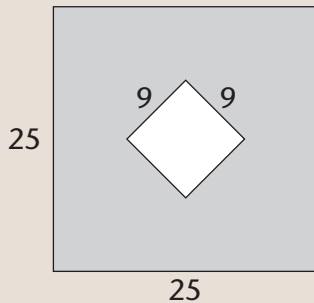
(g) $3xy^2 - 48xa^2$

(h) $5a^4 - 20b^2$

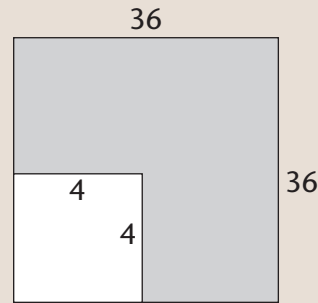
BEREKEN DIE OPPERVLAKTE VAN DIE INGEKLEURDE DEEL.

Gebruik die kortste moontlike metode.

(a)



(b)



DIT IS HOE FAKTORISERING DIE BEREKENINGE MAKLIK KAN MAAK

2.5 Vereenvoudiging van algebraïese breuke

WERK MET ALGEBRAÏESE BREUKE

Liza en Magriet moet die waarde bereken van $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ vir $x = 4,6$.

Liza se oplossing:	Magriet se oplossing:
$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ $= \frac{4,6^2 - 2(4,6) - 3}{4,6 - 3}$ Vervang $x = 4,6$ $= \frac{21,16 - 9,2 - 3}{4,6 - 3}$ $= \frac{8,96}{1,6}$ $= 5,6$	$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ $= \frac{(x - 3)(x + 1)}{x - 3}$ Faktoriseer die noemer $= x + 1$ Vereenvoudig $= 4,6 + 1$ Vervang $x = 4,6$ $= 5,6$

1. Wie se oplossing verkies jy? Hoekom?

.....

Dit is nuttig om kwosiëntuitdrukkings soos

$\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$ te bewerk tot eenvoudiger, maar ekwivalente

somuitdrukkings, soos in hierdie geval: $x + 3$. Dit maak substitusie en die oplos van vergelykings makliker.

2. Los die probleme op:

(a) Evalueer $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$ as $x = 23$.

(b) Los op vir x : $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = 19$.

.....

.....

.....

.....

3. Werk die waarde van elk van die volgende uitdrukkings uit as $x = 36$.

Probeer om die kortste moontlike metode te gebruik.

(a) $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$

(b) $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

.....

.....

.....

.....

HOE IS DIT MOONTLIK DAT $2 = 1$?

Wat het verkeerd geloop in die volgende beredenering?

Laat:		$a = b$	(As: $b \neq 0$)
$\times a$:	$\Leftrightarrow$	$a^2 = ab$	
$- b^2$:	$\Leftrightarrow$	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	
Faktoriseer:	$\Leftrightarrow$	$(a + b)(a - b) = b(a - b)$	
$\div (a - b)$:	$\Leftrightarrow$	$a + b = b$	
Maar $a = b$:	$\Leftrightarrow$	$b + b = b$	
Voeg terme by:	$\Leftrightarrow$	$2b = b$	
$\div b$:	$\Leftrightarrow$	$2 = 1$	

Verduidelik wat verkeerd geloop het en hoekom dit verkeerd is.

DEEL DEUR NUL KAN NIE GEBEUR NIE

- Voltooi die tabel deur die waarde van die uitdrukking $\frac{x+2}{x-2}$ te bereken vir die x -waardes wat in die boonste ry gegee is:

x	-2	0	2	4
$\frac{x+2}{x-2}$				

- As $x = 2$ dan sal $\frac{x+2}{x-2}$ die waarde $\frac{4}{0}$ hê. Wat is die waarde van $\frac{4}{0}$?

.....

- Probeer die waarde van $\frac{4}{0}$ bepaal deur dit te stel as $\frac{4}{0} = a$. Dan is $4 = 0 \times a$. Watter waardes van a sal die stelling waar maak?

.....

- Wat is die resultaat as jy $4 \div 0$ met jou sakrekenaar wil bereken? Kan jy die boodskap op jou sakrekenaar verduidelik?

.....

Deel deur 0 is nie moontlik nie. Die algebraïese breuk $\frac{x+2}{x-2}$ kan nie 'n waarde hê as die noemer $(x-2)$ gelyk is aan 0 nie. Ons sê die uitdrukking $\frac{x+2}{x-2}$ is

ongedefinieerd vir $x - 2 = 0$ dit is, vir $x = 2$. Ons sê ook $x = 2$ is 'n **uitgeslote waarde** van x vir $\frac{x+2}{x-2}$.

DEFINIEER DIE ONGEDEFINIEERDE

1. Is die volgende stellings waar? Indien nie, verbeter die stelling.

(a) $\frac{x}{x} = 1$ vir alle waardes van x .

.....
.....

(b) $\frac{x^3}{x^2} = x$ vir alle waardes van x .

.....
.....

(c) $\frac{x-3}{x-3} = 1$ vir alle waardes van x .

.....
.....

(d) $\frac{x^2+x}{x(x+1)} = 1$ vir alle waardes van x .

.....
.....
.....

2. Vir watter waardes van die veranderlikes sal elke uitdrukking ongedefinieerd wees?

(a) $\frac{7(y+5)}{y+2}$

(b) $\frac{3x+2}{x+4}$

(c) $\frac{2x+1}{x^2-1}$

(d) $\frac{2x^2-1}{(x-2)(x+3)}$

VEREENVOUDIG ALGEBRAÏESE BREUKE

Om 'n algebraïese breuk, wat 'n veelterm as teller of noemer het te vereenvoudig, moet jy eers die veelterm faktoriseer.

Jy moet die uitgeslote waardes noem om te voorkom dat deur 0 gedeel word.

1. Vereenvoudig die volgende algebraïese breuke deur die teller te faktoriseer en dan die eienskap $\frac{ax}{a} = x$ te gebruik as $a \neq 0$. Noem uitgeslote waardes.

(a) $\frac{3xy + y^2}{3x + y}$

(b) $\frac{a^2b + ab^2}{a + b}$

.....

.....

(c) $\frac{3x^2y - 6x^2y^2}{3xy}$

(d) $\frac{10x^4 + 15x^3}{5x^2}$

.....

.....

2. Vereenvoudig die volgende algebraïese breuke deur die teller te faktoriseer en dan die eienskap $\frac{ax}{a} = x$ te gebruik as $a \neq 0$. (Kyk of jy die drieterme kan faktoriseer.)

(a) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

(b) $\frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$

.....

.....

(c) $\frac{x^2 - 5x - 50}{x + 5}$

(d) $\frac{x^2 - 16x + 15}{x - 15}$

.....

.....

3. Vereenvoudig die volgende algebraïese breuke deur die teller te faktoriseer en dan die eienskap $\frac{ax}{a} = x$ te gebruik as $a \neq 0$.

(a) $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(b) $\frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$

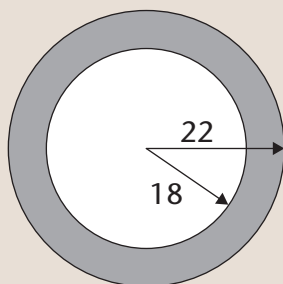
.....

.....

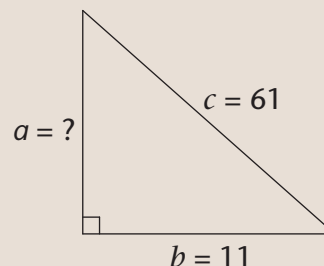
FAKTORISERING KAN JOU BEREKENINGE VERKORT

Gebruik die kortste moontlike metode om jou antwoord te bereken.

- (a) Bereken die ingekleurde oppervlakte.
(Oppervlakte = πr^2 en gebruik $\pi = 3.142$)



- (b) Bereken die lengte van sy a
(Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$)



DIT IS HOE FAKTORISERING DIE BEREKENINGE MAKLIK KAN MAAK!

NOG OEFENING

1. Faktoriseer die volgende uitdrukkings volledig.

(a) $4a + 6b$

(b) $x^2 + 8x + 7$

.....

(c) $c^2 - 9$

(d) $y^2 - 8y + 15$

.....

(e) $-3ab + b$

(f) $-3a(b - 1) + (b - 1)$

.....

(g) $dfg^2 + d^2g - df^2g$

(h) $x^2 + 6x + 8$

.....

(i) $a^2 + 5a + 6$

(j) $x^2 - 8x - 20$

.....

(k) $x^5y^3 - x^3y^5$

(l) $x^3y - xy^3$

.....

.....

(m) $4 - 4y + y^2$

(n) $3a^2 + 18a - 21$

.....

.....

(o) $6a^2 - 54$

(p) $-a^2 - 11a - 30$

.....

.....

(q) $2a^2 + 10a - 72$

.....

.....

(s) $(x + 2)^2 - y^2$

.....

(u) $(a^2 - 2a + 1) - b^2$

.....

.....

(w) $(a - b)x + (b - a)y$

.....

.....

(y) $2x^2y^{10} - 8x^{10}y^2$

.....

.....

(aa) $(a + b)^2 - a - b$

.....

.....

.....

(r) $5x^3 - 15x^2 - 200x$

.....

.....

(t) $(x + y)^2 - a^2$

.....

(v) $1 - (a^2 - 2ab + b^2)$

.....

.....

(x) $a(2x - y) + (y - 2x)$

.....

.....

(z) $(a + b)^3 - 4(a + b)$

.....

.....

(ab) $(x + y)(a - b) + (-x - y)(b - a)$

.....

.....

.....

2. Vereenvoudig die volgende algebraïese breuke so ver as moontlik.

(a) $\frac{16 - 9x^2}{4 + 3x}$

.....

.....

(c) $\frac{x^3 + x^2 - 30x}{x + 6}$

.....

.....

(e) $\frac{ab + bc}{abc}$

.....

.....

(b) $\frac{25x^2 - 36}{5x^2 + 6x}$

.....

.....

(d) $\frac{2x^2 + 5x + 3}{2x + 3}$

.....

.....

(f) $\frac{pa + pb}{a + b}$

.....

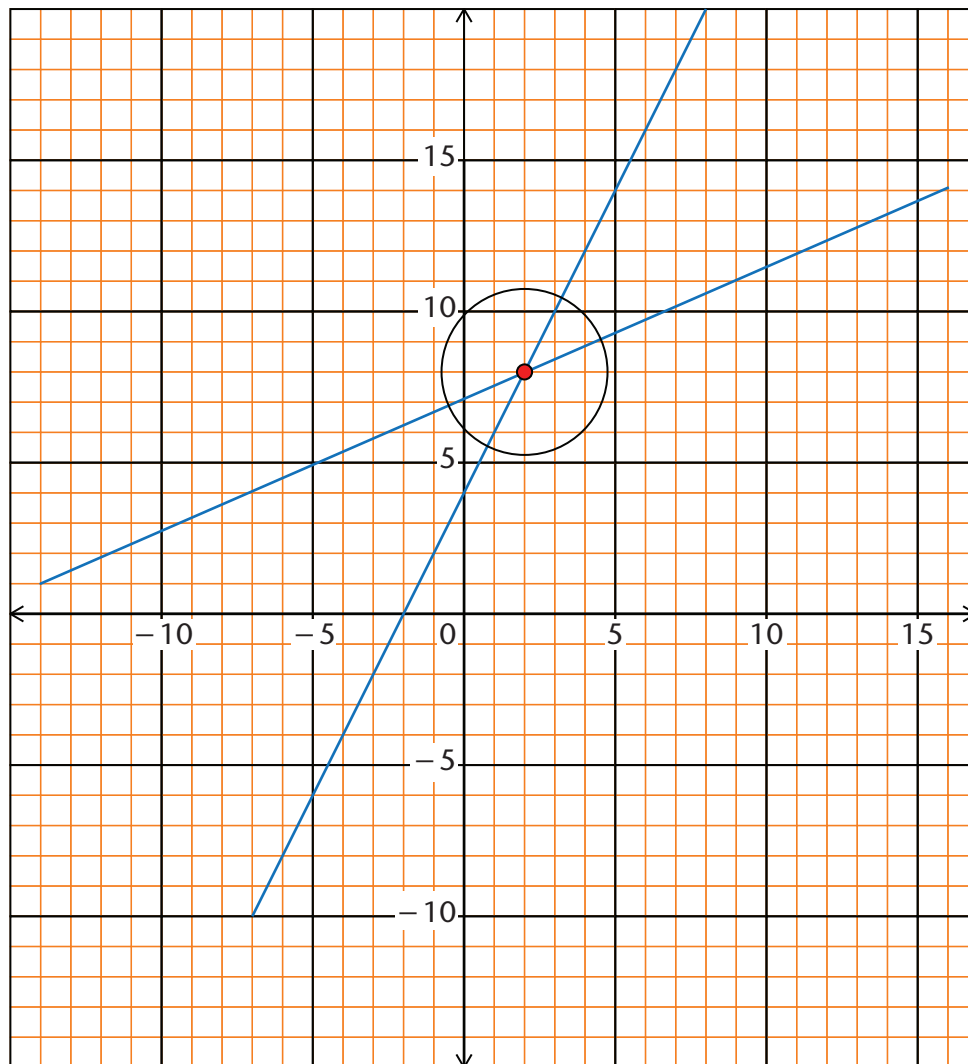
.....

HOOFSTUK 3

Vergelykings

Jy het alreeds vergelykings deur inspeksie en inverse bewerkings in die eerste kwartaal opgelos. In hierdie hoofstuk gaan ons eers die werk hersien. Daarna gaan jy werk met vergelykings wat produkuitdrukkings, soos $2x(x - 2)$ en $(x - 5)(x + 3)$ bevat. Jy gaan nuwe metodes leer om vergelykings op te los, gebaseer op die feit dat, as die produk van twee uitdrukkings (of getalle) nul is, een of albei van die uitdrukkings (of getalle) nul moet wees. Jy gaan faktorisering gebruik om vergelykings in die vorm $pq = 0$ op te stel sodat jy hulle kan oplos.

3.1	Inleiding.....	33
3.2	Los op deur faktorisering, Deel 1	36
3.3	Los op deur faktorisering, Deel 2	38
3.4	Los op deur faktorisering, Deel 3	40
3.5	Stel vergelykings op om probleme op te los	42
3.6	Vergelykings en geordende pare	45



3 Vergelykings

3.1 Inleiding

OPLOS DEUR INSPEKSIE:

- Voltooi die volgende tabel. Bepaal die korrekte x -waardes deur die gegewe waardes vir x in die vergelyking te gebruik om te sien of dit die x -waarde is wat die stelling waar maak.

Jy kan die oplossings van 'n vergelyking van 'n tabel af lees.

	Vergelyking	LK as $x = 4$	Is LK = RK ?	LK as $x = 5$	Is LK = RK ?	LK as $x = 6$	Is LK = RK ?	Regte oplossing
(a)	$3x - 4 = 11$							$x =$
(b)	$2x + 7 = 19$							$x =$
(c)	$13 - 5x = -7$							$x =$

(LK = Linkerkant en RK = Regterkant)

- Hierdie tabel bevat vergelykings en hulle oplossings. Skryf + of – tekens in die spasies om die vergelyking waar te maak vir die gegewe oplossing:

Inspeksie is die oplossing van 'n vergelyking deur die "soek" na 'n oplossing.

	Vergelyking	Oplossing
(a)	$2x \quad 7 = 15$	$x = 4$
(b)	$3 \quad 2x = 11$	$x = -4$
(c)	$-x \quad 7 = 3$	$x = 4$
(d)	$28 \quad 5x = 3$	$x = 5$

Stellings soos $21 - x = 2x + 3$ en $(x - 3)(x - 5) = 0$ wat waar is vir slegs bepaalde waardes van x , word **vergelings** genoem.

'n Stelling soos $2(x + 3) = 2x + 6$, wat waar is vir alle waardes van x waaraan jy kan dink, word 'n **identiteit** genoem.

'n Stelling soos $2(x + 3) = 2x + 3$, wat vir geen waardes van x waar is nie, kan 'n **onmoontlikheid** genoem word.

LOS VERGELYKINGS DEUR INVERSE BEWERKINGS OP

In hierdie afdeling gaan jy 'n ander manier verken om vergelykings op te los.

1. Voltooi die berekeninge:

(a) $3 - 3$

(b) $-9\,765 + 9\,765$

.....

(c) $-a + a$

(d) $13a - 13a$

.....

2. Wat merk jy op?

.....

3. Voltooi die berekeninge:

(a) $3 \div 3$

(b) $3 \times \frac{1}{3}$

.....

(c) $\frac{1}{x} \times x$

(d) $\frac{x}{3} \times \frac{3}{x}$

.....

4. Wat merk jy op?

.....

.....

Ons kan met 'n oplossing as 'n vergelyking begin en dan sekere bewerkings doen om dit in 'n ekwivalente, maar meer ingewikkelde vergelyking te verander.

Twee vergelykings word **ekwivalent** genoem as hulle dieselfde oplossing het.

Bou 'n vergelyking		Los 'n vergelyking op	
Aksie aan beide kante	Ekwivalente vergelyking	Aksie aan beide kante	Ekwivalente vergelyking
Oplossing (1)	$x = 3$	Vergelyking (1)	$3x + 2 = 11$
$\times 3$	$3x = 9$	$- 2$	$3x = 9$
$+ 2$	$3x + 2 = 11$	$\div 3$	$x = 3$
Oplossing (2)	$x = -9$	Vergelyking (2)	$3(x + 2) = x - 12$
$\times 2$	$2x = -18$	verwyder hakies	$3x + 6 = x - 12$
$+ 6$	$2x + 6 = -12$	$- x$	$2x + 6 = -12$
$+ x$	$3x + 6 = x - 12$	$- 6$	$2x = -18$
Faktoriseer	$3(x + 2) = x - 12$	$\div 2$	$x = -9$

Bou 'n vergelyking		Los 'n vergelyking op	
Aksie aan beide kante	Ekwivalente vergelykings	Aksie aan beide kante	Ekwivalente vergelykings
Oplossing (3)	$x = 1$	Vergelyking (3)	$\frac{(x+3)}{2} = 1 + x$
$\times -1$	$-x = -1$	$\times 2$	$x + 3 = 2 + 2x$
$+ 3$	$-x + 3 = 2$	$- 2x$	$-x + 3 = 2$
$+ 2x$	$+x + 3 = 2 + 2x$	$- 3$	$-x = -1$
$\div 2$	$\frac{(x+3)}{2} = 1 + x$	$\div -1$	$x = 1$

Probeer om jou eie vergelykings op te maak en hulle dan op te los. Het jy die “opslossing” gekry waarmee jy begin het?

As jy 'n vergelyking oplos keer jy eintlik die maak van die vergelyking om.

5. Los op vir x :

(a) $2(x + 4) + 9 = 15$

(b) $5(x - 2) = 7(2 - x)$

.....	
.....	
.....	
.....	
(c) $\frac{2x}{3} - 2 = 12$	(d) $\frac{3y-3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{5y}{3}$
.....	
.....	
.....	
.....	

Tot dusver het jy slegs met vergelykings van die **eerste graad** te doen gekry. Dit beteken dat hulle slegs *eerste magte* van die onbekende (x) bevat, byvoorbeeld $3x - 2 = 5x + 7$. In die volgende afdeling gaan jy vergelykings van die **tweede graad** oplos, waar die uitdrukking tweede magte bevat. Hier is 'n tweedegraadse vergelyking: $x^2 + 1 = x + 13$.

As die uitdrukking-deel van die vergelyking geskryf is as die produk van 'n eenterm en 'n tweeterm, bv. $x(x - 2) = 0$; of die produk van twee tweeterme, bv. $(x - 2)(x + 3) = 0$ is die resultaat ook 'n tweedegraadse vergelyking.

3.2 Los op deur faktorisering (Deel 1)

ONTWIKKEL 'N STRATEGIE: VERMENIGVULDIGING MET 0

1. Kan jy twee getalle x en y kry sodat as jy hulle vermenigvuldig, die antwoord 0 is, bv. $xy = 0$?

.....

Elke deel van die produk word 'n **faktor** van die uitdrukking genoem.

As $c = ab$, dan is a en b faktore van c .

As $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, dan is $x + 2$ en $x + 3$ faktore van $x^2 + 5x + 6$.

2. Voltooi die tabel:

	Vergelyking	Faktore	Produk	Eerste moontlike oplossing	Tweede moontlike oplossing
Voorbeeld	$x(x - 2) = 0$	x en $(x - 2)$	0	$x = 0$	$x - 2 = 0$ $x = 2$
(a)	$x(x + 5) = 0$				
(b)	$2x(3x - 12) = 0$				
(c)	$0 = (x + 2)(x - 2)$				

Jy kan die vergelyking herskryf sodat dit in die vorm *uitdrukking* = 0 is, byvoorbeeld, jy kan

$x^2 - 2x = 3x + 6$ herskryf as $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Jy kan $x^2 - 5x - 6$ faktoreer en dan die nulprodukteienskap gebruik om die vergelyking op te los.

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x = 6 \text{ of } x = -1$$

Nulprodukteienskap:

As: $a \times b = 0$

Dan: $a = 0$ of

$b = 0$ of

$a = 0$ en $b = 0$

In 'n later afdeling gaan jy vergelykings soos die voorbeeld hier bo oplos. Jy moet die vergelyking in die vorm, *uitdrukking* = 0 skryf, die linkerkant faktoreer en dan die nulprodukteienskap gebruik.

HAAL DIE GROOTSTE GEMENE FAKTOR UIT

Die proses waardeur 'n somuitdrukking (veelterm) as 'n produk (eenterm) geskryf word, word **faktorisering** genoem. Dit is die omgekeerde van **uitbreiding**.

Kyk na die uitdrukking $2x^2 - 6x$.

$2x$ is 'n faktor van beide terme, daarom is dit 'n faktor van $2x^2 - 6x$.

Deur deling kry ons $\frac{2x^2 - 6x}{2x} = x - 3$.

Dus is $2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$.

Dit is onnodig om die deelstap van hierdie metode uit te skryf. Bepaal die gemene faktor en skryf dan die produkform direk neer.

$$2x^2 - 6x = 2x(\quad)$$

Bepaal die waardes van x wat die volgende stellings waar sal maak:

1. $x^2 = -3x$

2. $x^2 + 2x^2 = 6x$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

3. $\frac{6x}{3} + x = -4x^2$

4. $x = x(2 - x)$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

3.3 Los op deur faktorisering (Deel 2)

LOS OP DEUR DRIETERME TE FAKTORISEER

Die produk van die eerste terme van die faktore moet gelyk wees aan die x^2 -term van die drieterm.

Die produk van die laaste terme van die faktore moet gelyk wees aan die laaste term (die konstante term) van die drieterm.

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Beteken: $x \cdot x = x^2$

Beteken: $2 \cdot 3 = 6$

Die som van die binne- en buiteprodukte moet gelyk wees aan die x -term van die drieterm.

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Beteken: $(2 + 3)x = 5x$

Die faktore is van die vorm: $(x \cdot x) + (a + b)x + (a \cdot b) = (x + a)(x + b)$.

Bepaal die waardes van x wat die volgende stellings waar sal maak.

Onthou om die vergelyking in die vorm *uitdrukking* = 0 te skryf sodat jy die nulproduk-eienskap kan gebruik.

1. $x^2 + 9x = -14$

2. $x^2 + 3x = 18$

.....

.....

.....

.....

3. $x^2 - 18x = -17$

4. $x^2 + 30 = 11x$

.....

.....

.....

.....

5. $x^2 = 13x + 30$

6. $x^2 + 7x = 30$

.....

.....

.....

.....

LOS OP DEUR DIE VERSKIL TUSSEN TWEE VIERKANTE TE FAKTORISEER

Onthou uit die vorige hoofstuk:

As p en q volkome vierkante (ook “algebraïese vierkante”) is, dan:

$$\begin{aligned}
 p - q &= (\sqrt{p} + \sqrt{q})(\sqrt{p} - \sqrt{q}) \\
 \downarrow \quad \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 9x^4 - 4y^2 &= (\sqrt{9x^4} + \sqrt{4y^2})(\sqrt{9x^4} - \sqrt{4y^2}) \\
 &= (3x^2 + 2y)(3x^2 - 2y)
 \end{aligned}$$

’n Uitdrukking van die vorm $a^2 - b^2$ word die **verskil tussen twee vierkante** genoem.

Om ’n verskil tussen vierkante te faktoreer, gebruik ons die identiteit: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ waar a en b getalle of algebraïese uitdrukkings voorstel.

Bepaal die waardes van die onbekende (x of a of n , ens.) wat die volgende stellings waar sal maak.

Onthou om die vergelyking eers in die vorm *uitdrukking* = 0 te skryf, sodat jy die nulprodukteienskap kan gebruik.

- | | |
|-----------------|-------------------|
| 1. $x^2 = 4$ | 2. $x^2 = 16$ |
| | |
| | |
| | |
| | |
| 3. $4a^2 = 9$ | 4. $81 = 9n^2$ |
| | |
| | |
| | |
| | |
| 5. $25x^2 = 36$ | 6. $121x^2 = 144$ |
| | |
| | |
| | |
| | |
| 7. $16p^2 = 49$ | 8. $64a^2 = 25$ |
| | |
| | |
| | |
| | |

3.4 Los op deur faktoriserings (Deel 3)

LOS OP DEUR DIE GEBRUIK VAN EIENSKAPPE VAN EKSPONENTE

1. Skryf die volgende getalle as die produk van hulle priemfaktore:

(a) 128

(b) 243

.....

(c) 125

(d) 2 401

.....

2. Bepaal die waardes van x wat die volgende stellings waar sal maak:

(a) $2^x = 2^7$

(b) $3^x = 3^5$

(c) $5^x = 5^3$

(d) $7^x = 7^4$

.....

3. Bepaal die waardes van x wat die volgende stellings waar sal maak.

(a) $2^x = 128$

(b) $3^x = 243$

.....

.....

(c) $5^x = 125$

(d) $7^x = 2 401$

.....

.....

(e) $2^x + 9 = 25$

(f) $27(3^x) = 3$

.....

.....

.....

Alle getalle kan as die produk van hulle priemfaktore geskryf word:

$16 = 4 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

Die getal word gefaktoriseer totdat al die faktore priemgetalle is.

As die grondtal aan die LK gelyk is aan die grondtal aan die RK, moet die eksponent aan die LK gelyk wees aan die eksponent aan die RK.

As $a^x = a^y$, dan is $x = y$.

In die vergelyking $2^x = 16$, is die lettersimbool (x) die eksponent. Vergelykings met 'n lettersimbool as eksponent word **eksponensiële vergelykings** genoem.

GEMENGDE OEFENINGE VIR VERDERE INOEFENING

Bepaal die waardes van die onbekende (x of m of b , ens.) wat die volgende stellings waar sal maak:

1. $\frac{6x}{3} + x = -4x^2$

.....

.....

.....

.....

.....

2. $x = x(2 - x)$

.....

.....

.....

.....

.....

3. $x^2 + 2x = 15$

.....

.....

.....

.....

.....

4. $m^2 + 4m = 21$

.....

.....

.....

.....

.....

5. $x^2 + 3 = 4x$

.....

.....

.....

.....

.....

6. $b^2 - 16b = -15$

.....

.....

.....

.....

.....

7. $1 = a^2$

.....

.....

.....

.....

.....

8. $25x^2 = 49$

.....

.....

.....

.....

.....

9. $2^x - 25 = -9$

.....

.....

.....

10. $81(3^x) = 3$

.....

.....

.....

3.5 Stel vergelykings op om probleme op te los

DIE WISKUNDIGE MODELLERINGSPROSES

Voorbeeld van 'n probleemsituasie.

Drukkery A vra 45c per bladsy en R12 om 'n boek te bind.

Drukkery B vra 35c per bladsy en R15 om 'n boek te bind.

Vir 'n boek van hoeveel bladsye sal die twee drukkerie se prys dieselfde wees?

Jy kan 'n vergelyking opstel om die probleem te beskryf.

Laat x die getal bladsye wees waarvoor die werk by beide dieselfde sal kos. Dan is

$$45x + 1\,200 = 35x + 1\,500.$$

Die vergelyking stel 'n wiskundige probleem voor wat opgelos kan word sonder om noodwendig aan die praktiese situasie te dink. Dit word 'n **wiskundige model** van die praktiese situasie genoem.

Los nou die vergelyking op.

$$45x + 1\,200 = 35x + 1\,500$$

$$45x - 35x = 1\,500 - 1\,200$$

$$10x = 300$$

$$x = 30$$

Wanneer ons 'n **wiskundige oplossing** lewer, word dit as die **ontleding (analise)** van die wiskundige model beskryf.

Ons kan nou vra wat die oplossing van die wiskundige probleem (" $x = 30$ ") beteken met betrekking tot die praktiese situasie. Toe die vergelyking opgestel is, is die simbool x gebruik as 'n plekhouer vir die getal bladsye in 'n boek wat ewe veel by die twee drukkerie sal kos. Wat sê die oplossing dus vir jou?

Die wiskundige oplossing kan **vertolk** (geïnterpreteer) word om vas te stel wat dit in die praktiese situasie sou kon beteken.

Ons kan nou kontroleer of 'n boek met 30 bladsye dieselfde kos by die twee besighede.

By Drukkery A kos 30 bladsye $30 \times 45c = 1350c = R13,50$.

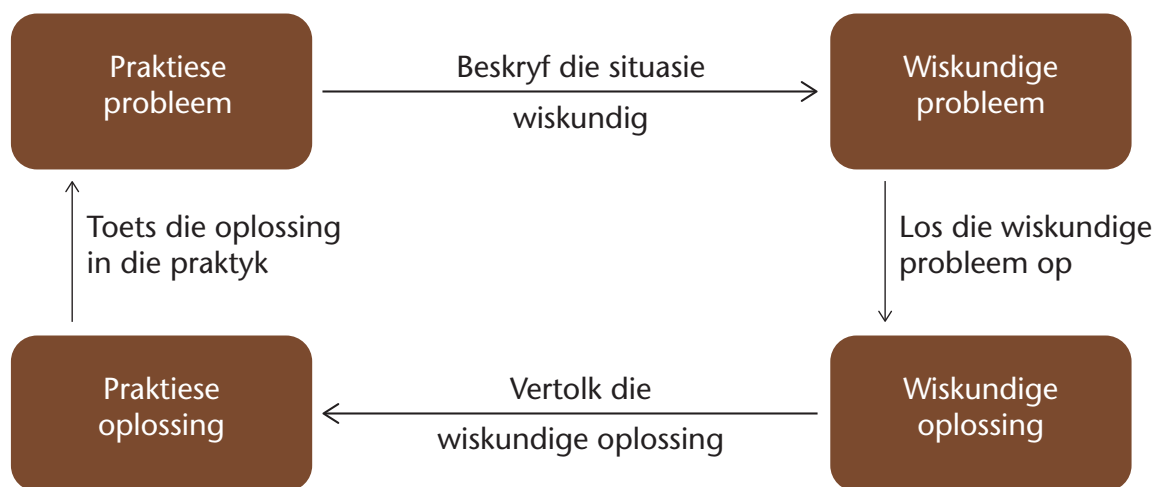
Om te bind kos R12, so die totale koste is R25,50.

By Drukkery B kos 30 bladsye $30 \times 35c = 1050c = R10,50$.

Om te bind kos R15, so die totale koste is R25,50.

Die oplossing van die wiskundige probleem is ook 'n oplossing van die praktiese probleem.

Die wiskundige oplossing behoort in die **praktiese situasie getoets te word**, want dis moontlik dat foute gemaak is.



Wanneer mense op hierdie manier te werk gaan, sê ons hulle doen **wiskundige modellering**.

OEEN JOU MODELLERINGSVAARDIGHEDE

Die hooftrekke van die wiskundige model en 'n paar leidrade om dit te voltooi word vir elke situasie in vrae 1 tot 3 gegee. Vul die ontbrekende inligting in.

1. Louis is 6 jaar ouer as Karin en Karin is 4 jaar ouer as Heidi. Die som van hulle ouderdomme is 53 jaar. Hoe oud is Heidi?

Model: Laat x wees: Heidi se ouderdom
 Dan: Karin se ouderdom sal
 En:
 Dus: = 53

Ontleding: $x + (x + 4) + (x + 10) = 53$

Interpretasie: Heidi is dus:

2. Die som van twee getalle is 15. Drie keer die kleiner getal is 5 meer as die groter getal. Bereken die twee getalle. (**Wenk:** laat die kleiner getal x wees.)

Model: Laat x wees:
 Dan: is die groter getal
 Dus:

Ontleding:

Interpretasie: Dus die kleiner getal is:
 En die groter getal is:

3. Die som van drie opeenvolgende ewe getalle is 108. Wat is die getalle?

Wenk: Opeenvolgende getalle is getalle wat op mekaar volg.

Ons definieer 'n ewe getal as 'n getal van die vorm $2n$ waar n 'n telgtal is.

Model: Laat die eerste getal wees:

Dan:

Dus:

Ontleding:

Interpretatsie: Die eerste getal is dus:

Die tweede getal is:

En die derde getal is:

4. Firma A bereken die koste van 'n stuk werk met behulp van die formule

Koste = $500 + 30t$, waar t die getal dae is wat dit duur om die werk te voltooi.

Firma B bereken die koste van dieselfde werk deur gebruik te maak van die formule

Koste = $260 + 48t$, waar t die getal dae is wat nodig is om die werk te voltooi.

- (a) Wat sal firma A vra vir 'n werk wat 10 dae duur?

.....
.....
.....
.....

- (b) Hoe lank sal Firma B neem om 'n werk te voltooi waarvoor hulle R596 kwoteer het?

.....
.....
.....
.....
.....

- (c) Daar is 'n spesifieke werk waarvoor die firmas dieselfde kwoteer en wat hulle dieselfde tyd neem om te voltooi. Hoe lank neem hierdie werk?

.....
.....
.....
.....
.....

3.6 Vergelykings en geordende pare

AS ONBEKENDES VERANDERLIKES WORD

In al die vorige afdelings het ons met vergelykings gewerk wat vaste of beperkte oplossings gehad het. Hulle het net een lettersimbool gehad, wat in hierdie geval die rol van 'n plekhouer vir die waarde/s wat die stelling waar sou maak, vervul het.

Bestudeer die vergelyking: $y = 5x + 2$

1. Hoeveel lettersimbole het die vergelyking? (Noem hulle.)

.....

2. Is dit moontlik om hierdie “vergelýking” op te los?

.....

3. Voltooi die tabel.

x	12	10	20	5	6	-5	-10
$5x + 2$							

FUNKSIES AS VERSAMELINGS GEORDENDE PARE

'n Spesifieke invoergetal, byvoorbeeld 10, en die uitvoergetal wat daarby pas (52 in die geval van die funksie wat deur $y = 5x + 2$ aangedui word), word 'n geordende getallepaar genoem. Geordende getallepare kan in 'n tabel gegee word soos jy in vraag 3 hier bo gedoen het.

Geordende getallepare kan in hakies geskryf word: (invoergetal; uitvoergetal).

Die pare wat jy byvoorbeeld in die tabel in vraag 3 hier bo ingevul het kan ook geskryf word as (12; 62), (10; 52), (20; 102), (5; 27), (6; 32), (-5; -23), (-10; -48)

In die funksie wat deur $y = 5x + 2$ aangedui word, stel die lettersimbool in die formule (x in hierdie geval) die **invoer** of **onafhanklike** veranderlike voor, terwyl die ander veranderlike (y) die **uitvoer** of **afhanklike** veranderlike voorstel.

As daar presies een waarde van y vir elke waarde van x is, sê ons dat y 'n **funksie van** x is.

1. Voltooi elke tabel deur die geordende pare in hakies onder die tabel te skryf, soos gewys in die gegewe voorbeeld. Kies dan nog enige twee invoergetalle en skryf ook twee addisionele geordende pare neer wat aan elke gegewe funksie behoort.

Vir die funksie met die reël $y = 4x + 5$

x	-2	0	1	2	5
y	-3	5	9	13	25

(-2; -3), (0; 5), (1; 9), (2; 13), (5; 25), en (10; 45) en (20; 85)

- (a) Vir die funksie met die reël $y = x^2 + 9$

x	5		0	-3	
y		18			34

(5; 34), (3; 18), (0; 9), (-3; 18), (-5; 34), en (...; ...), en (...; ...)

- (b) Vir die funksie met die reël $y = 3x - 2$

x	5	1	0	-3	
y					-17

(5; 13), (1; 1), (0; -2), (-3; -11), (-5; -17), en (...; ...) en (...; ...)

- (c) Vir die funksie met die reël $y = 5x - 4$

x	-5	-3	1	2	
y					21

(-5; -29), (-3; -19), (1; 1), (2; 6), (5; 21), en (...; ...) en (...; ...)

- (d) Vir die funksie met die reël $y = 12 - 3x$

x	1	2	3	4	
y					-3

(1; 9), (2; 6), (3; 3), (4; 0), (5; -3), en (...; ...) en (...; ...)

- (e) Vir die funksie met die reël $y = x^2 + 2$

x	-12	-7	-2	3	
y					102

(-12; 146), (-7; 51), (-2; 6), (3; 11), (10; 102), en (...; ...) en (...; ...)

- (f) Vir die funksie met die reël $y = 2^x + 2$

x	0	1	2	3	
y					18

(0; 3), (1; 4), (2; 6), (3; 10), (4; 18) en (...; ...) en (...; ...)

2. (a) Watter geordende paar behoort aan beide $y = 3x - 2$ en $y = 5x - 4$?

- (b) Watter geordende paar behoort aan beide $y = 12 - 3x$ en $y = 5x - 4$?

3. Watter geordende paar behoort aan beide $y = 5x + 7$ en $y = 3x + 25$?

.....

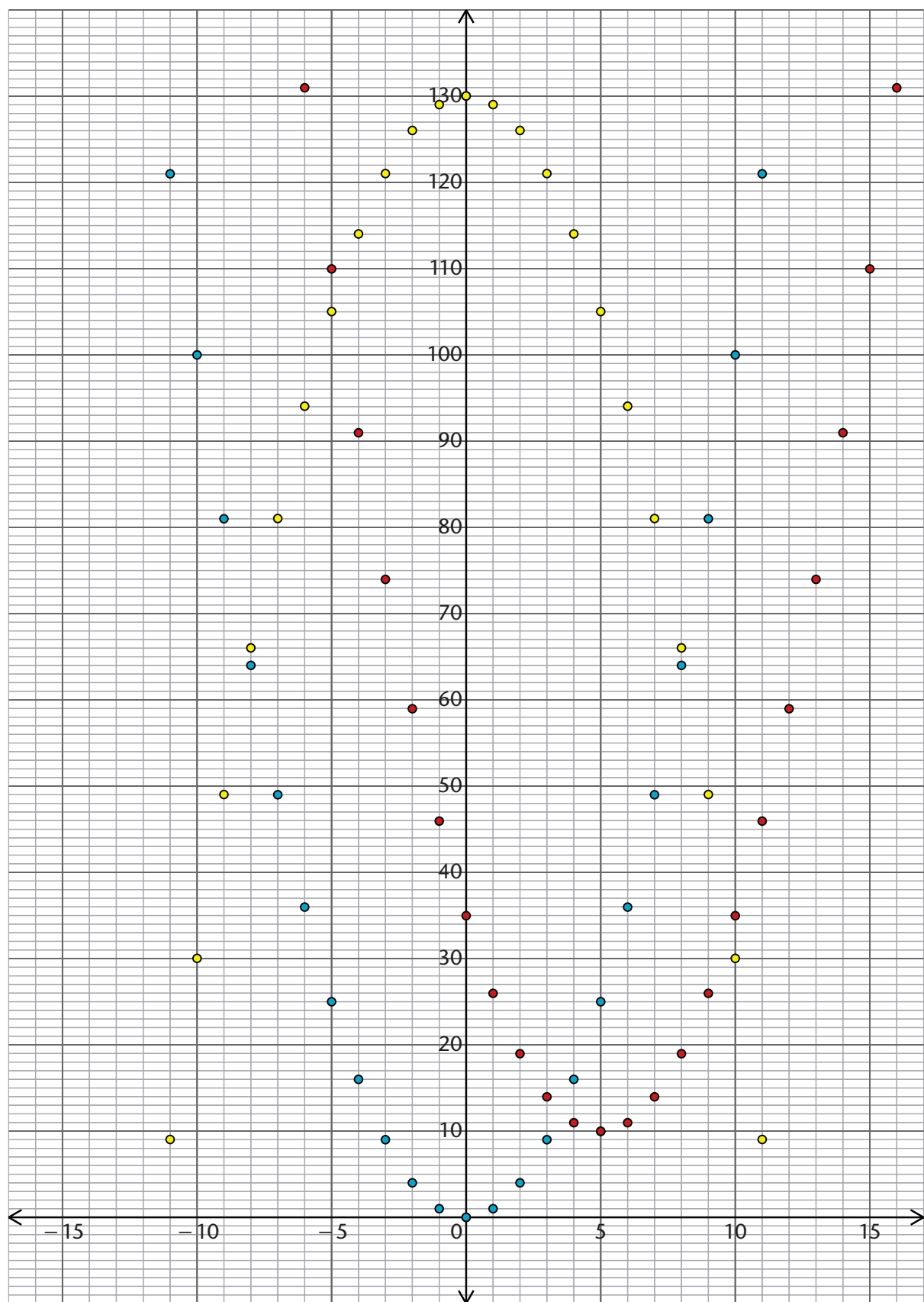
.....

HOOFSTUK 4

Grafieke

In hierdie hoofstuk sal jy meer leer oor hoe om grafieke te teken wat wys hoe hoeveelhede verander, en oor hoe om grafieke te interpreteer. Grafieke kan wys hoe hoeveelhede toeneem en afneem, hoe vinnig hulle toeneem en afneem en waar hulle maksimum- en minimumwaardes bereik. Jy sal veral aandag gee aan grafieke van hoeveelhede wat teen 'n konstante koers (tempo) verander. Hierdie grafieke is reguit lyne.

4.1	Globale grafieke	49
4.2	Veranderinge teen verskillende tempo's.....	58
4.3	Teken grafieke van tabelle van geordende pare	61
4.4	Gradiënt.....	63
4.5	Vind die formule vir 'n grafiek	66
4.6	x- en y-afsnitte	71
4.7	Grafieke van nie-lineêre funksies.....	73



4 Grafieke

4.1 Globale grafieke

DISKRETE EN AANEENLOPENDE VERANDERLIKES

Simon haal heuning uit op sy plaas en verkoop dit in groot bottels. Dit gaan so goed met sy besigheid dat hy nie meer al die werk alleen kan behartig nie. Hy het hulp nodig. Simon weet dat een mens normaalweg 2 bottels heuning oor 3 dae kan uithaal. Hy stel hierdie tabel op om hom te help om vas te stel hoeveel voltydse werkers hy moet aanstel om die verskillende getal bottels in 'n vyfdagweek vol te maak.

Bottels per week	$3\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	10	$13\frac{1}{3}$	$16\frac{2}{3}$	20	$23\frac{1}{3}$
Werkers	1	2	3	4	5	6	7

- (a) Hoeveel werkers het Simon nodig as hy 40 bottels per week wil volmaak?

.....

- Hoeveel bottels kan 9 werkers per week volmaak?

- Hoeveel werkers het Simon nodig om 15 bottels per week vol te maak?

.....

- Wat is die twee veranderlikes in die situasie hier bo?

.....

In 'n geval soos hier bo kan 'n mens enige getal bottels, asook dele van 'n bottel, hê. 'n Mens kan dus 'n telgetal (byvoorbeeld 4 bottels) of 'n breukhoeveelheid (byvoorbeeld $6\frac{2}{3}$ of 4,45 bottels) hê. Die ander veranderlike in hierdie situasie, die getal voltydse werkers, verskil egter. Slegs telgetalle van mense is moontlik.

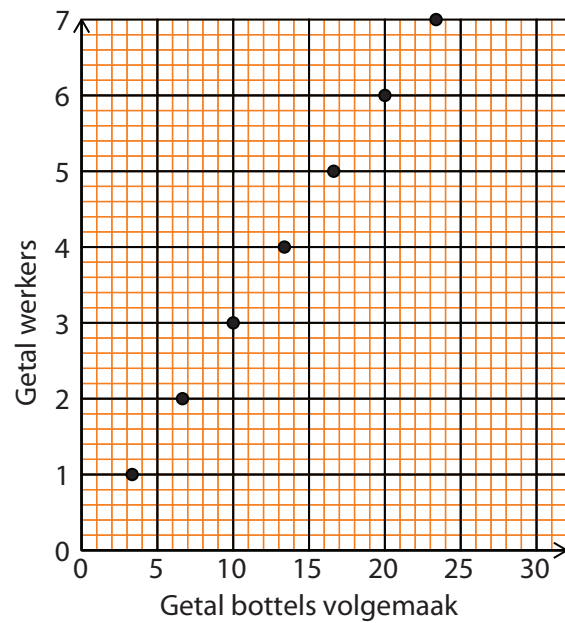
Hoeveelhede, soos die hoeveelheid bottels heuning, wat enige breuk kan bevat, word soms "aaneenlopende hoeveelhede" of "kontinue" veranderlikes genoem. Hoeveelhede wat getel kan word, soos 'n getal mense, of 'n getal motors of riviere of dorpe, word soms "diskrete hoeveelhede" of "diskrete veranderlikes" genoem.

As 'n grafiek van 'n diskrete veranderlike getrek word, maak dit sin om slegs punte te stip en nie 'n lyn te trek nie.

- Kan jy die tweede grafiek onder op die volgende bladsy, gebruik om uit te vind hoeveel werkers nodig is om 30 bottels in 'n week te vul en hoeveel om 40 bottels te vul? Kontroleer jou antwoorde deur berekeninge te doen.

.....

Hier is 'n grafiek van die inligting van Simon se tabel.



Hier is 'n ander grafiek van dieselfde inligting.

3. In watter opsig is hierdie twee grafieke verskillend?

.....

.....

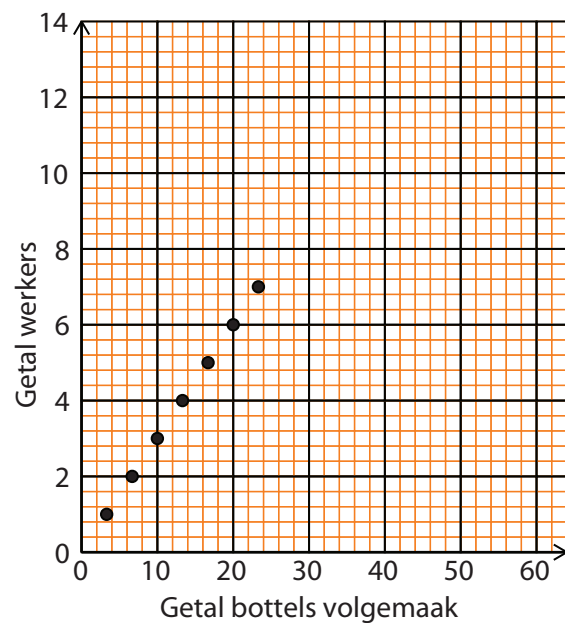
.....

.....

.....

.....

.....



4. Sê en elke geval of die veranderlikes “kontinu” of “aaneenlopend” is.
- (a) Jy bestel pizzas vir ’n klaspartytjie en jy het 1 pizza nodig vir elke 3 leerders.

.....

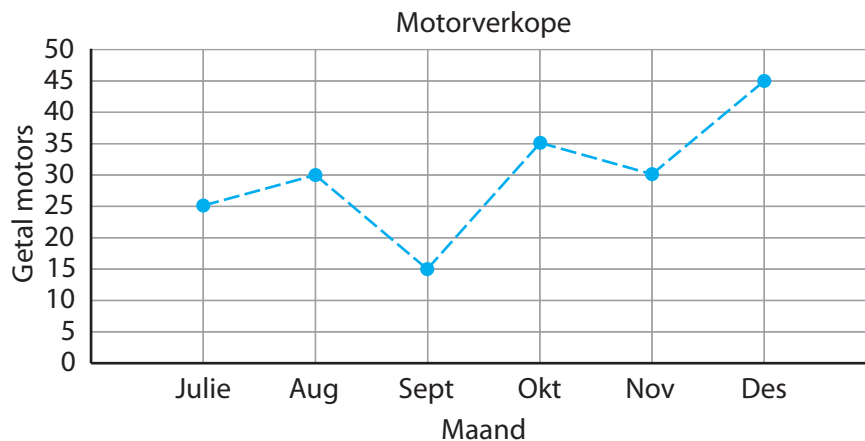
- (b) Jou lengte wat op verskillende tye gemeet is soos wat jy langer geword het.

.....

- (c) Die spoed waarteen ’n motor beweeg as jy dorp toe ry.

.....

5. Die lyngrafiek wys die getal motors wat ’n maatskappy tussen Julie en Desember 2014 verkoop het.



- (a) Is die data in die grafiek diskreet of aaneenlopend? Hoekom?

.....

- (b) Hoeveel motors is in Augustus verkoop?

- (c) Gedurende watter maande is die maksimum en die minimum motors verkoop?

.....

- (d) Hoeveel meer motors is in November as in Julie verkoop?

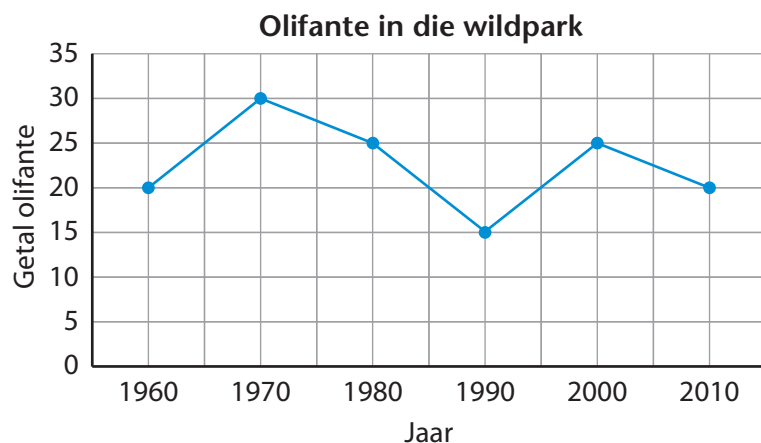
- (e) Gedurende watter maande het die motorverkope afgeneem?

.....

- (f) Sou jy sê dat motorverkope oor die algemeen oor die 6 maande toegeneem het? Verduidelik jou antwoord.

.....

6. Hierdie grafiek wys die olifantbevolking in 'n wildpark in Suid-Afrika tussen 1960 en 2010. Bestudeer die grafiek en beantwoord die vrae wat volg.



- (a) Het die olifantbevolking tussen 1970 en 1990 vermeerder of verminder?

.....

- (b) Gedurende watter jare het die olifantbevolking toegeneem?

.....

- (c) Gedurende watter jaar was die olifantbevolking in die wildpark die grootste?

.....

- (d) Is die data in hierdie grafiek diskreet of aaneenlopend?

.....

- (e) Hoeveel olifante dink jy was daar in 1995 in die wildpark?

.....

- (f) Die volgende data wys die getal olifante by 'n ander wildpark. Stip die inligting op die grafiekpapier hier bo.

Jaar	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Olifante	30	25	20	15	20	35

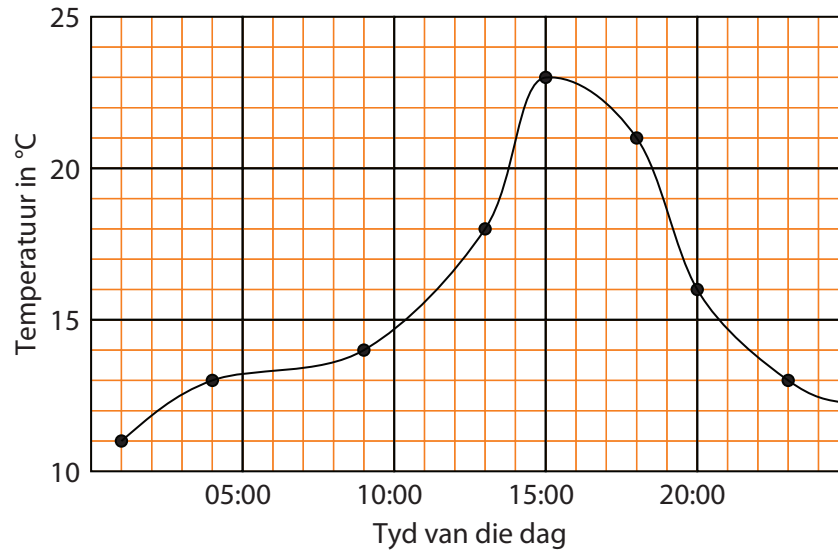
- (g) Sou jy sê dat die tweede wildpark meer olifante tussen 1960 en 2010 gehad het as die eerste wildpark? Verduidelik jou antwoord.

.....

.....

TOON STYGING EN DALING OP GRAFIEKE AAN

Die grafiek hier onder wys die temperatuur oor 'n 24-uur tydperk in 'n dorp in die Vrystaat. Die grafiek is geteken deur die punte, wat die werklike lesings wys, te verbind.



1. (a) Dink jy die temperature hier bo is op 'n somersdag of 'n wintersdag aangeteken?

.....

.....

- (b) Watter tyd van die dag is die hoogste temperatuur aangeteken en wat was dit?

.....

- (c) Gedurende watter tyd van die dag het die temperatuur gestyg en gedurende watter tyd het die temperatuur gedaal?

.....

.....

- (d) Gedurende watter tyd (ure) het die temperatuur die vinnigste gestyg?

.....

- (e) Gedurende watter tyd (ure) van die dag het die temperatuur die vinnigste gedaal?

.....

2. Hier is beskrywings van temperatuurveranderinge op vyf verskillende dae.

Dag A: Dit is reeds vroeg in die oggend warm. Die temperatuur verander nie veel gedurende die dag nie, maar laat in die middag veroorsaak 'n windjie dat die temperatuur redelik vinnig sak.

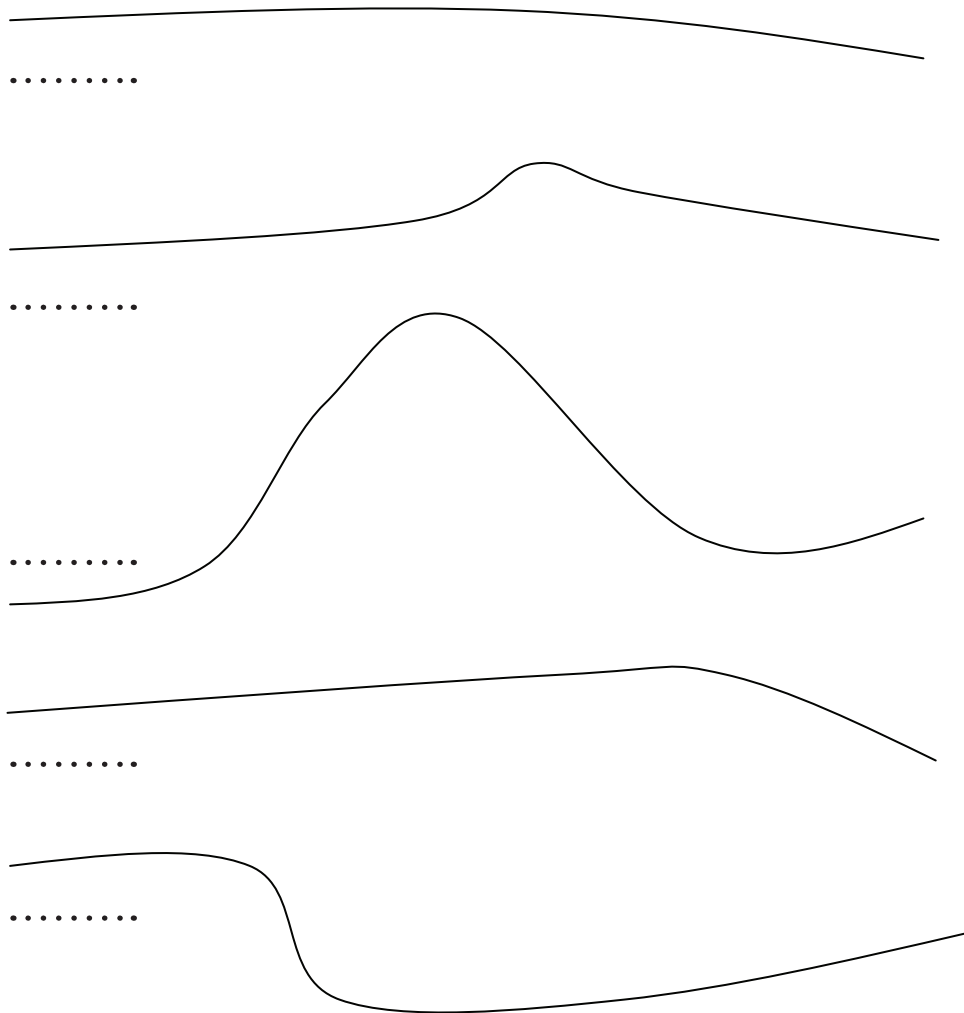
Dag B: Dit is baie koud vroeg in die oggend en word redelik warm kort na die son opkom. Teen die middag kom daar 'n koue wind op en die temperatuur sak tot laat in die middag. Toe gaan die wind lê en dit word weer warmer teen die aand.

Dag C: Dit is vroegoggend warm en die temperatuur bly ongeveer konstant tot die middag. Daarna daal die temperatuur geleidelik.

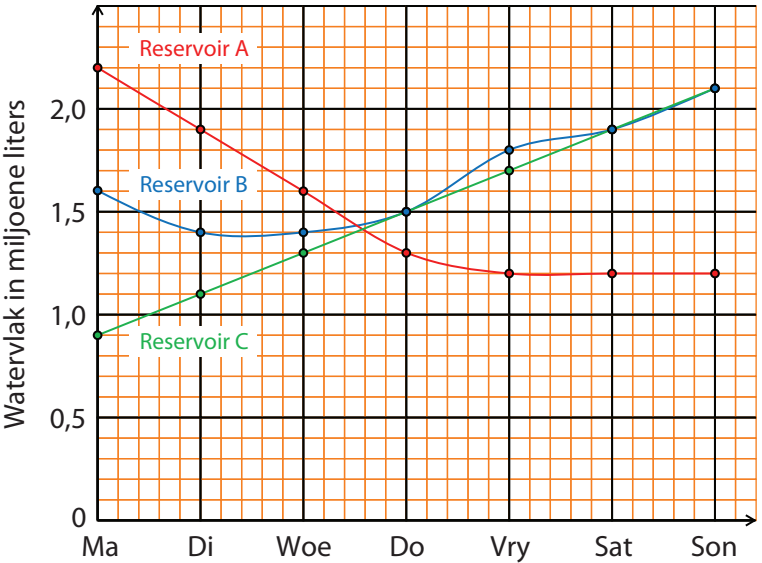
Dag D: Dit is vroegoggend koud en dit bly die hele dag koud, behalwe vir 'n kort rukkie na middagete toe die son 'n tydjie deurbreek.

Dag E: Dis warm vroeg in die môre, maar kort na sonop daal die temperatuur skerp. Dit bly laag tot die middel van die middag, wanneer dit 'n bietjie warmer word.

Die vorm van die temperatuurgrafieke vir 24-uur periodes, beginnende vroegoggend, word hier onder gegee. Skryf by elke grafiek watter van die dae, soos hier bo beskryf, waarskynlik deur elke grafiek weerspieël word.



Water word deur drie reservoirs of opgaartenks aan 'n dorpie voorsien. Die hoeveelheid water in elke opgaartenk word elke dag om 08:00 gemeet. Die watervlak in reservoir A word deur die rooi grafiek hier onder voorgestel, terwyl die watervlakke van tenks B en C in blou en groen respektiewelik voorgestel word.



Die watervlakke, in miljoene liter, word ook in die tabel hier onder voorgestel.

	Ma	Di	Wo	Do	Vr	Sa	So
Reservoir A	2,2	1,9	1,6	1,3	1,2	1,2	1,2
Reservoir B	1,6	1,4	1,4	1,5	1,8	1,9	2,1
Reservoir C	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1

3. Jy mag die grafiek of die tabel, of albei, gebruik om die antwoorde op die volgende vrae te vind.
 - (a) Op watter dae verhoog die watervlak in reservoir B daaglik?

.....
 - (b) Op watter dag verhoog die watervlak in reservoir B die meeste, en hoeveel verhoog dit van daardie dag tot die volgende dag?

.....
 - (c) Met hoeveel verander die watervlak in reservoir B elke dag?

.....
 - (d) Met hoeveel verander die watervlak in reservoir C elke dag?

.....
 - (e) Beskryf die stand van die watervlak vanaf Vrydag tot Saterdag in reservoir A.

.....

4. Op 'n dag kom hierdie veranderinge in temperatuur op 'n spesifieke plek voor.

Tussen 00:00 en 03:00 daal die temperatuur met 2°C .

Tussen 03:00 en 06:00 daal die temperatuur met 3°C .

Tussen 06:00 en 10:00 bly die temperatuur konstant.

Tussen 10:00 en 12:00 styg die temperatuur met 3°C .

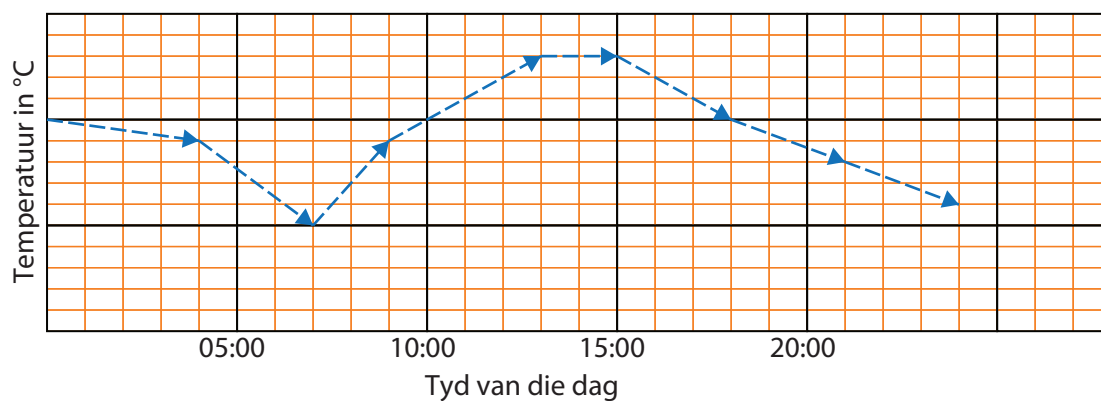
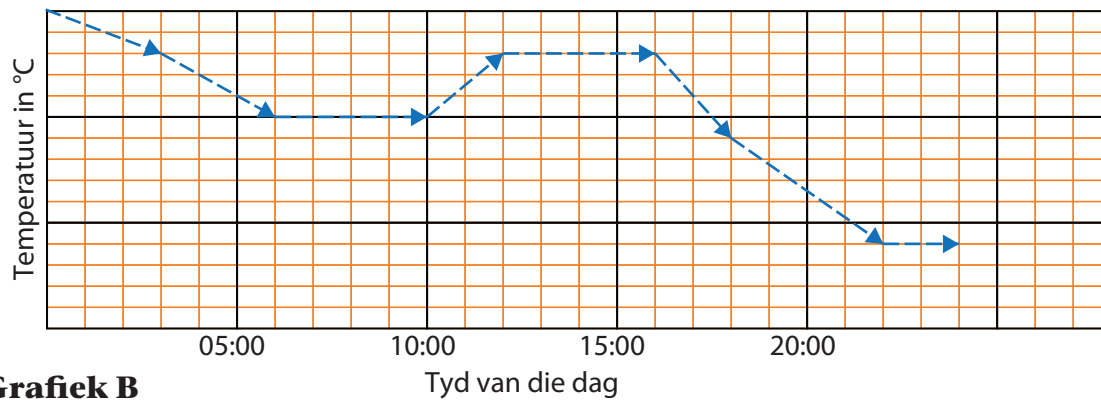
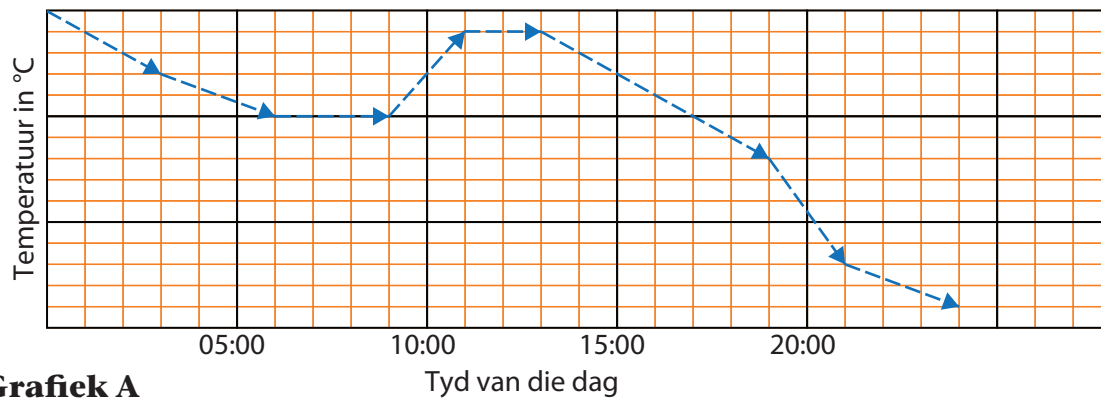
Tussen 12:00 en 16:00 bly die temperatuur konstant.

Tussen 16:00 en 18:00 daal die temperatuur met 4°C .

Tussen 18:00 en 22:00 daal die temperatuur met 5°C .

Tussen 22:00 en 24:00 bly die temperatuur konstant.

Watter van die boonste temperatuurveranderinge word deur die volgende grafieke aangedui?



5. Gee 'n verbale beskrywing, soos in vraag 4, van die temperatuurveranderinge soos aangedui in grafiek A in vraag 4.

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

6. Gee 'n verbale beskrywing van die temperatuurveranderinge soos in grafiek C.

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

Tussen en, is die temperatuurverandering

7. Kyk na grafiek A in vraag 4.

- (a) Met hoeveel grade daal die temperatuur vanaf 13:00 tot 19:00?
- (b) Met hoeveel grade daal die temperatuur vanaf 19:00 tot 21:00?
- (c) Wanneer daal die temperatuur die vinnigste, van 13:00 tot 19:00 of van 19:00 tot 21:00? Verduidelik jou antwoord.

.....

.....

.....

8. Kyk na grafiek C in vraag 4.

- (a) Met hoeveel grade styg die temperatuur vanaf 07:00 tot 09:00?
- (b) Met hoeveel grade styg die temperatuur vanaf 09:00 tot 13:00?
- (c) Wanneer styg die temperatuur die vinnigste, vanaf 07:00 tot 09:00 of vanaf 09:00 tot 13:00? Verduidelik jou antwoord.

.....

.....

.....

9. Kyk na grafiek B in vraag 4.

- Met hoeveel grade daal die temperatuur vanaf 16:00 tot 18:00?
- Met hoeveel grade daal die temperatuur vanaf 18:00 tot 22:00?
- Wanneer daal die temperatuur die vinnigste, vanaf 16:00 tot 18:00 of vanaf 18:00 tot 22:00? Verduidelik jou antwoord.

.....

.....

4.2 Veranderinge teen verskillende tempo's

Die watervlak in kiloliter (kl) in verskillende wateropgaartenks oor 'n periode van 30 uur word op die grafieke hier onder en op die volgende bladsy voorgestel.

1 kiloliter = 1 000 liter

- In watter tenks styg die vlak gedurende die 30-uur periode?
 - In watter tenks daal die vlak gedurende die 30-uur periode?
- Hoeveel water is daar aan die begin van die 30-uur periode in elkeen van die tenks?

.....

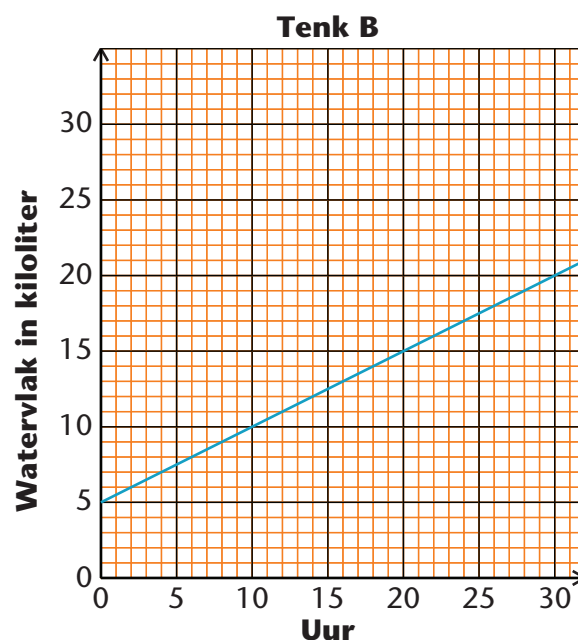
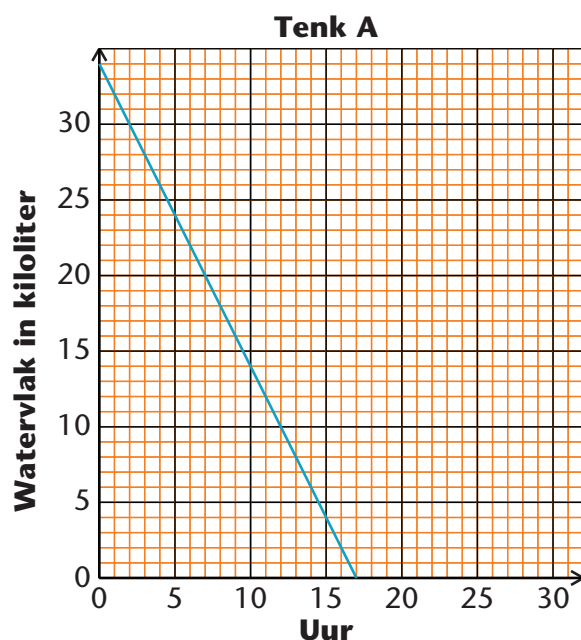
.....

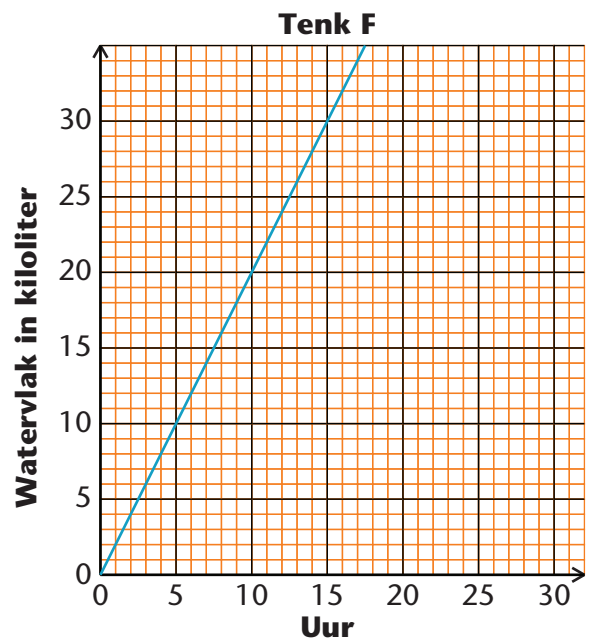
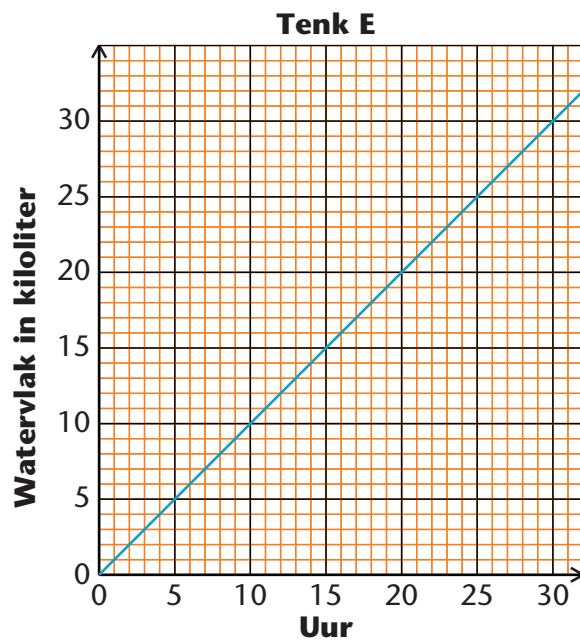
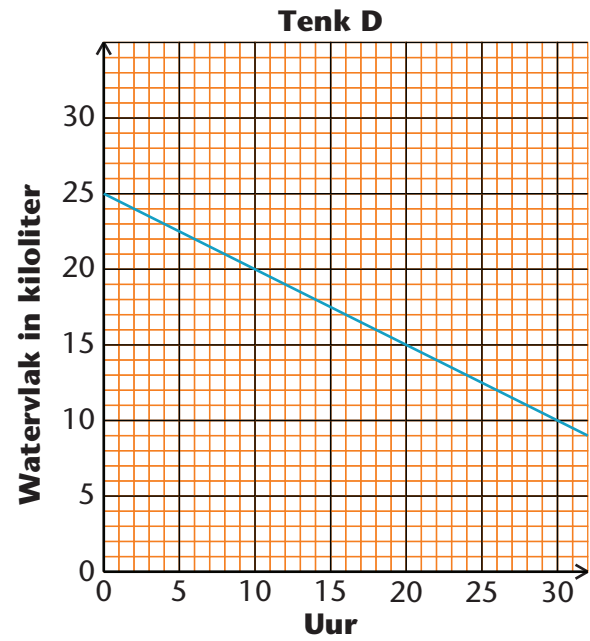
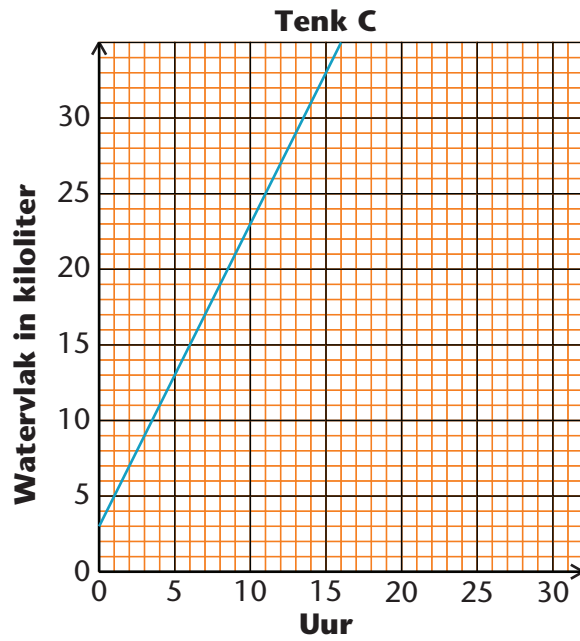
- Watter tenk verloor die vinnigste water? Verduidelik jou antwoord.

.....

- In watter tenk styg die water die stadigste? Verduidelik jou antwoord.

.....





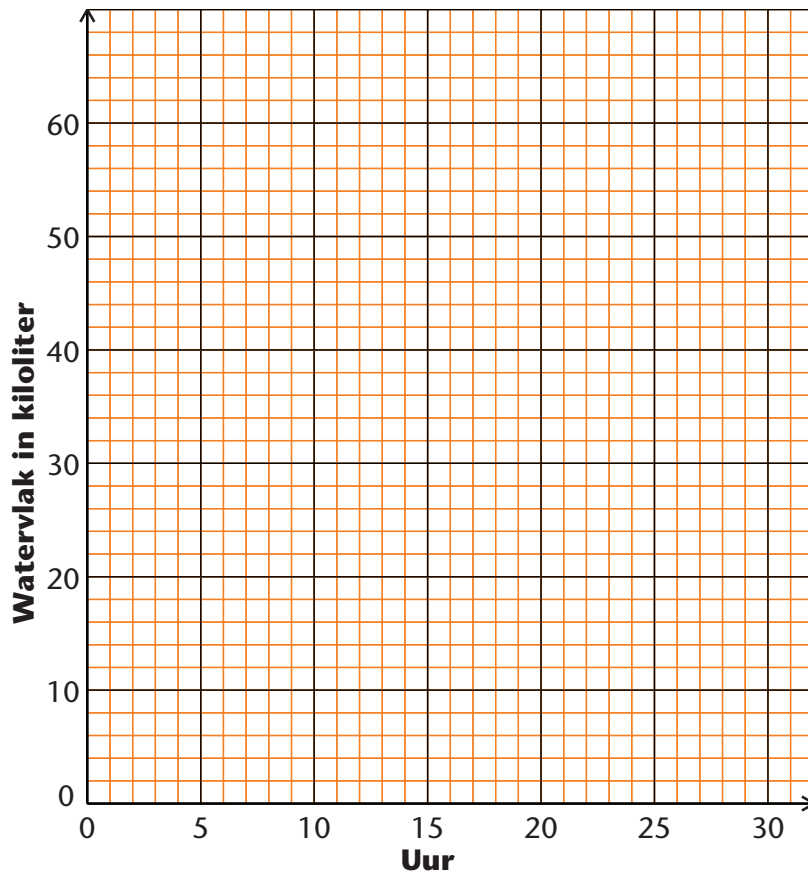
3. Voltooi die tabel. Gebruik negatiewe getalle vir dalings.

	Verandering per uur	Verandering oor vyfuurtydperk
Tenk A		
Tenk B		
Tenk C		
Tenk D		
Tenk E		
Tenk F		

As 'n konstante stroom water in 'n tenk ingepomp word sodat die watervlak elke uur met 3 kiloliter styg, sê ons:

Water word in die tenk ingepomp teen 'n **konstante koers** van **3 kiloliter per uur**.

4. (a) Aan die begin van 'n 30-uur periode bevat tenk G 12 kiloliter water. Water word dan in die tenk ingepomp teen 'n koers van 3 kiloliter per uur. Trek 'n stippellyn-grafiek op die grafiekpapier hier onder om die watervlak in tenk G aan te dui.
- (b) Tenk H bevat ook 12 kiloliter water aan die begin van 'n 30-uur periode. Water word dan teen 'n konstante koers van 1,5 kiloliter per uur ingepomp. Teken 'n ononderbroke lyngrafiek hier onder om die watervlak in tenk H aan te toon.



5. Voltooi die tabel vir tenks G en H oor die 30-uur periode.

Ure	0	5	10	15	20	25	30
Kiloliter in tenk G	12						
Kiloliter in tenk H	12						

4.3 Teken grafieke van tabelle van geordende pare

'n Koördinaatgrafiek wys die verband tussen die afhanklike en die onafhanklike veranderlike in 'n funksie. As die onafhanklike veranderlike verander, beïnvloed dit die afhanklike veranderlike. Soms is daar geen patroon in die verandering nie – ander kere is daar wel 'n patroon. In graad 9 gaan ons fokus op grafieke waar daar wel 'n patroon in die verandering is. Ons gaan veral kyk na grafieke met lineêre funksies. Die grafiek van 'n lineêre funksie is 'n reguit lyn.

GRAFIEKE VIR FUNKSIES MET VERSKILLEDE KONSTANTE VERSKILLE

- Voltooi die tabel.

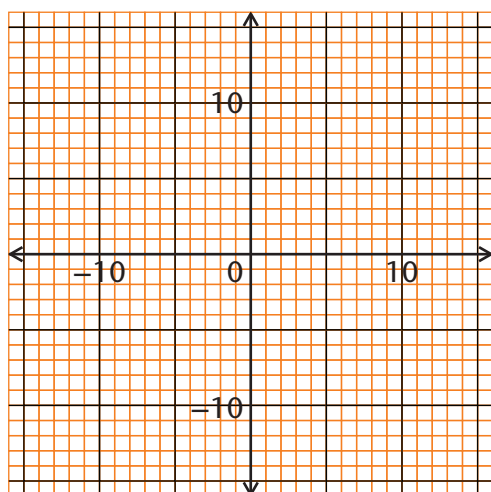
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Funksie A	8	$8\frac{1}{2}$	9	$9\frac{1}{2}$						
Funksie B	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Funksie C	0	$1\frac{1}{2}$	3	$4\frac{1}{2}$						
Funksie D	-4	-2	0	2						

- Stel elkeen van die verbande in vraag 1 met 'n grafiek voor deur die punte te stip op die grafiekpapier hier onder en die punte te verbind. Skryf elke keer neer wat die konstante verskil tussen die funksiewaardes is in die spasie langs die grafiek.

Funksie A

Konstante verskil =

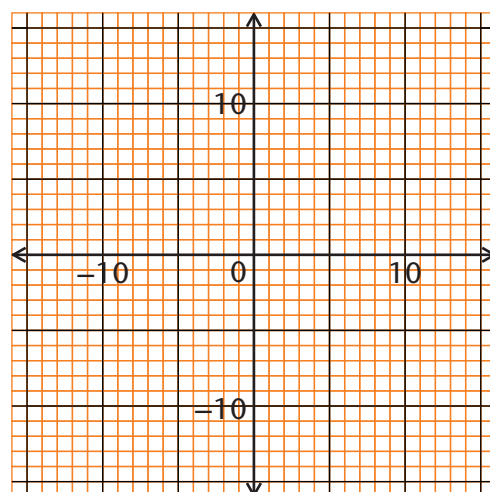
.....



Funksie B

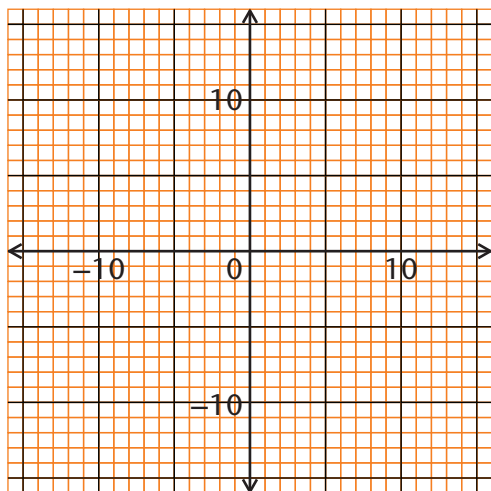
Konstante verskil =

.....



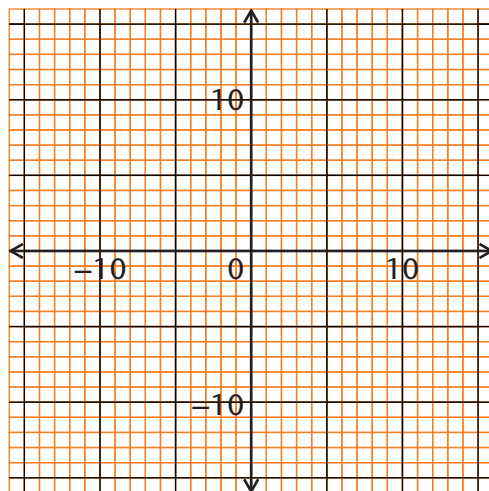
Funksie C

Konstante verskil =



Funksie D

Konstante verskil =



3. Party van die grafieke wat jy geteken het styg (of daal) vinnig, soos 'n steil heuwel of berg. Ander styg (of daal) stadig. Kyk goed na die grafieke wat jy geteken het, en na die konstante verskil tussen die funksiewaardes in elke geval.

- (a) Kan jy enige verband tussen die konstante verskil en die “steilte” van die grafiek sien?

.....

- (b) Probeer verduidelik hoekom dit so is.

.....

.....

4. (a) Voltooi die tabelle.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2x + 3$										
$5x + 4$										
$3x + 3$										

- (b) Bepaal die verskil tussen die opeenvolgende terme in elk van die boonste drie getallerye. Wat sien jy raak aangaande die verskil?

.....

- (c) Watter verskil sou jy tussen die opeenvolgende terme en die uitvoergetalle vir $4x + 5$ verwag, as die invoergetalle die natuurlike getalle 1; 2; 3; is?

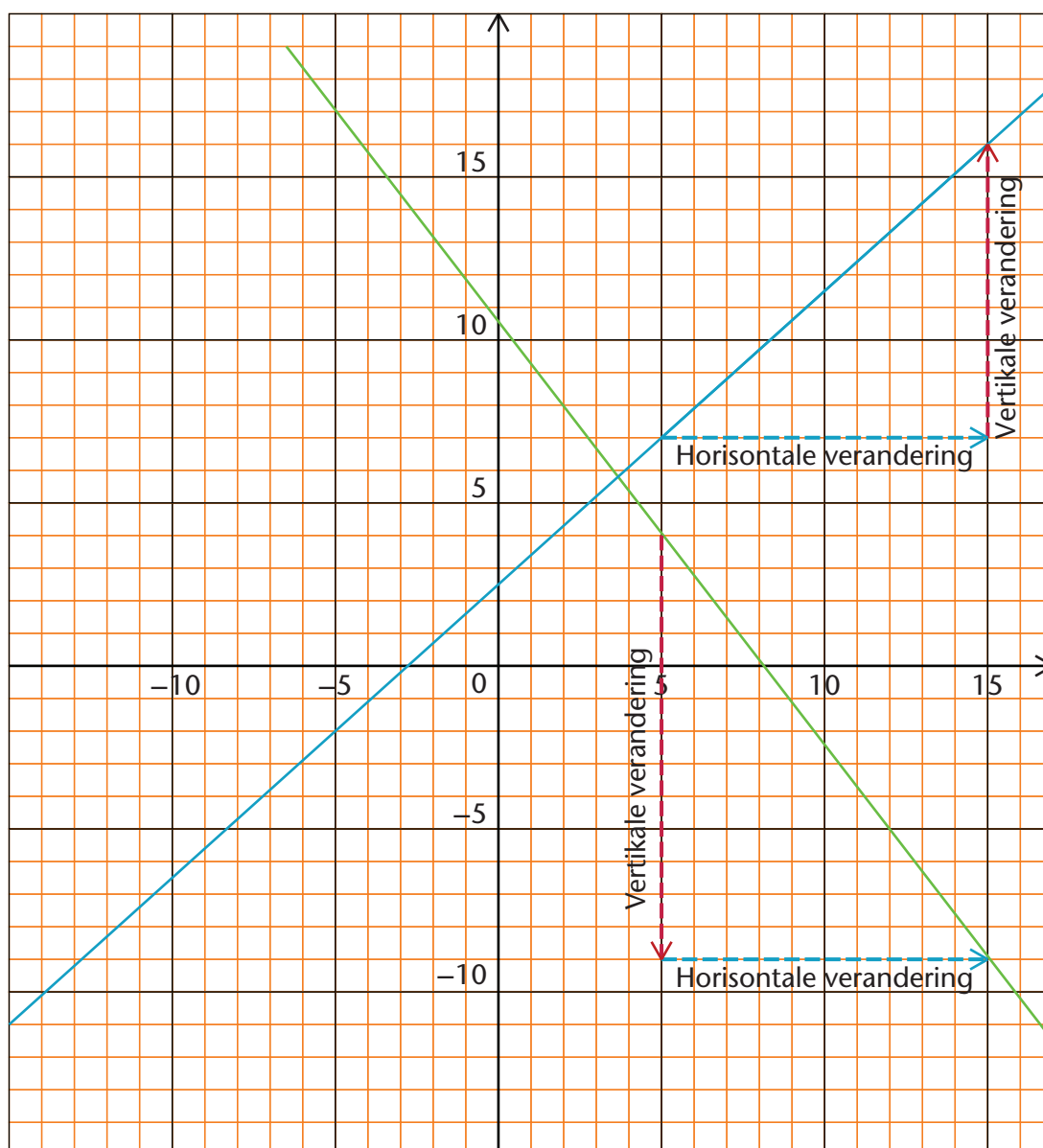
.....

4.4 Gradiënt

Die “steilte” of **helling** van ’n lyn kan aangedui word deur ’n getal, soos wat hier onder beskryf word. Hierdie getal word die **gradiënt** van die lyn genoem.

Die gradiënt is die vertikale verandering gedeel deur die horisontale verandering, soos wat jy van links na regs op die lyn beweeg.

$$\text{Gradiënt} = \frac{\text{vertikale verandering}}{\text{horisontale verandering}}$$



Die gradiënt van die blou lyn hier bo is $\frac{9}{10} = 0,9$.

Die gradiënt van die groen lyn is $\frac{-13}{10} = -1,3$.

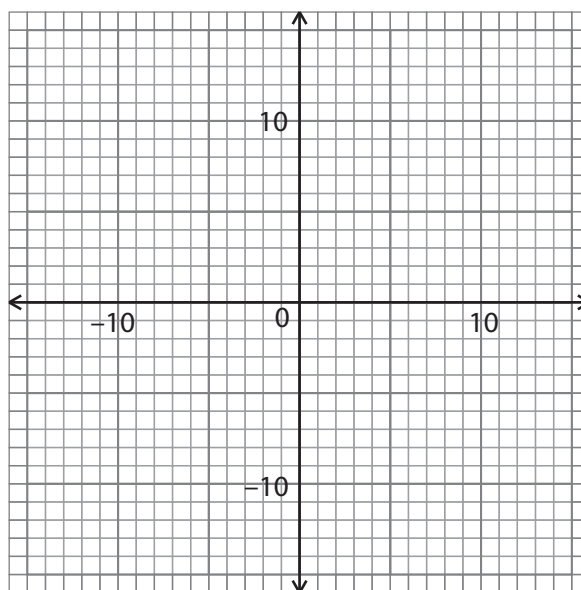
Let daarop dat die horisontale verandering altyd as positief geneem word (beweging na regs), maar die vertikale verandering kan positief wees (as dit opwaarts is) of negatief (as dit afwaarts is).

1. 'n Bepaalde lyn gaan deur die punte (2; 3) en (8; 15). 'n Reguit lyn is deur die twee punte getrek.

- (a) Probeer dink aan 'n manier waarop jy die gradiënt van die lyn wat deur die twee punte gaan, sal kan uitwerk.

.....

- (b) Stip die twee punte op die grafiekpapier regs.
- (c) Watter horisontale verandering en vertikale verandering is nodig om te beweeg van die punt (2; 3) na die punt (8; 15)? Jy mag pyle trek om jou te help om helder hieroor te dink.



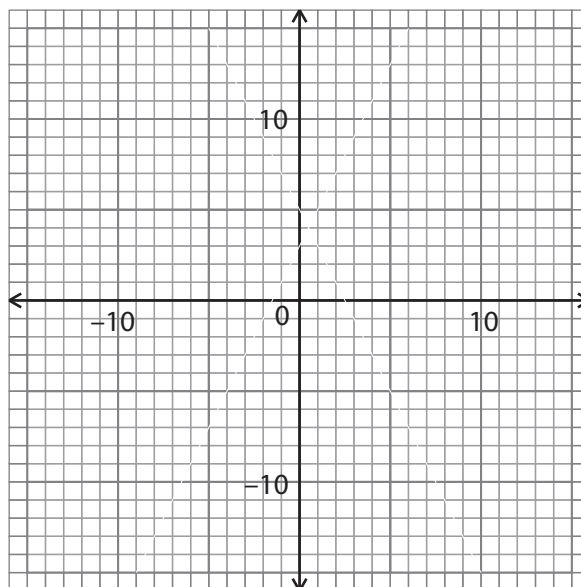
-

 (d) Werk die gradiënt van die lyn uit wat deur die twee punte gaan.

.....

2. Voltooi die tabel en stip die grafieke van $y = 2x + 3$ en $y = -2x + 5$ op die gegewe grafiekpapier.

x	-3	1	3	5
$2x + 3$				
$-2x + 5$				

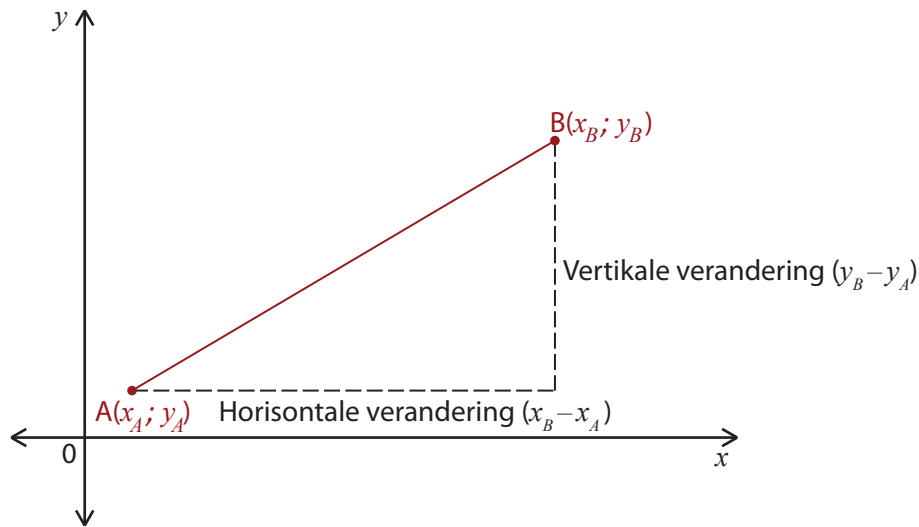


3. Bereken die gradiënte van die grafieke van $y = 2x + 3$ en $y = -2x + 5$. Jy mag die koördinate gebruik van enige van die punte wat jy gestip het.

.....

.....

Veronderstel die koördinate van punt A is $(x_A; y_A)$ en die koördinate van punt B is $(x_B; y_B)$.



Die gradiënt van lyn AB is: $m_{AB} = \frac{\text{vertikale verandering}}{\text{horisontale verandering}} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

Opsommend:

As jy twee punte A $(x_A; y_A)$ en B $(x_B; y_B)$ het, dan is die

formule vir die gradiënt: $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

Voorbeelde van die uitwerking van die gradiënt tussen twee punte:

Bereken die gradiënt van die lyn wat deur die punte loop:

(a) A(2; 5) en B(4; 1)

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \\ &= \frac{5 - 1}{2 - 4} \\ &= \frac{4}{-2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

(b) C(2; 2) en D(-6; 0)

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} \\ &= \frac{2 - 0}{2 - (-6)} \\ &= \frac{2}{8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(c) A(0; -1) en B(1; 1)

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \\ &= \frac{-1 - 1}{0 - 1} \\ &= \frac{-2}{-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Die gradiënt van 'n reguit lyn is oral dieselfde, dus maak dit nie saak watter 2 punte jy gebruik om die gradiënt te bereken nie.

BEPAAAL DIE GRADIËNT

Doen die volgende taak in jou oefeningboek.

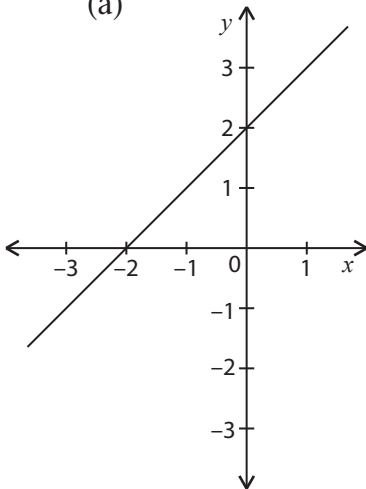
1. Bepaal die gradiënt van die lyne wat deur die volgende punte loop:

- (a) A(2; 10) en B(6; 12) (b) C(1; 3) en D(-2; -3) (c) E(0; 3) en F(4; -1)
(d) G(5; 2), H(4; 4) en I(2; 8)

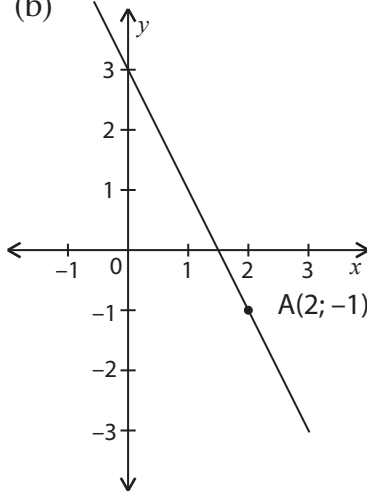
.....
.....

2. Bepaal die gradiënt van die volgende lyne:

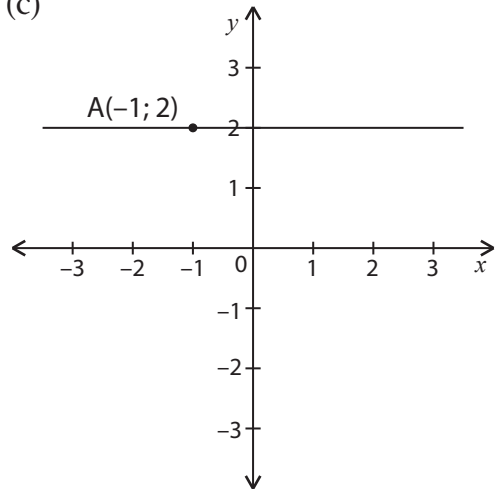
(a)



(b)



(c)



.....

4.5 Vind die formule vir 'n grafiek

TABELLE EN FORMULES

1. Elke tabel wys waardes vir 'n verband wat deur een van hierdie reëls weergegee word:

$$y = -2x + 3$$

$$y = 2x - 5$$

$$y = -3x + 5$$

$$y = -3(x + 2)$$

$$y = 3x + 2$$

$$y = 5(x - 2)$$

$$y = 2x + 3$$

$$y = 2x + 5$$

$$y = -3x + 6$$

$$y = 5x + 10$$

$$y = 5x - 10$$

$$y = -x + 3$$

(a) Voltooi die onderstaande tabelle deur die patrone in die uitvoerwaardes uit te brei.

A.	x	0	1	2	3	4	5	6	7
	y	2	5	8					

B.	x	0	1	2	3	4	5	6	7
	y	3	1	-1	-3				

C.	x	0	1	2	3	4	5	6	7
	y	-10	-5	0	5				

D.	x	0	1	2	3	4	5	6	7
	y	-5	-3	-1					

E.	x	0	1	2	3	4	5	6	7
	y	6	3	0					

F.	x	0	1	2	3	4	5	6	7
	y	3	2	1	0				

G.	x	0	1	2	3	4	5	6	7
	y	3	5	7					

(b) Beskryf, vir elke tabel, wat jy gedoen het om nog uitvoerwaardes te kry. Skryf ook die reël (formule) neer wat met die tabel ooreenstem.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Jy mag opgelet het dat die vergelykings van 'n reguit lyn eenders lyk.

Die vergelyking van 'n reguit lyn is: $y = mx + c$

m verwys na die **gradiënt** van die lyn.

c sê vir ons waar die lyn die y -as sny.

Dit word die y -afsnit genoem en het die koördinate $(0; c)$.

Gradiënt

Gradiënt beteken die steilte of die helling van die lyn.

Afsnit

Die punt waar 'n lyn een van die asse sny.

- die lyn $y = 3x + 4$ het 'n **gradiënt van 3** en die y -afsnit is **(0; 4)**.
- die vergelyking van 'n lyn met 'n **gradiënt van -2** en y -afsnit van **(0; 10)** is $y = -2x + 10$.
- die lyn $y = 2x$ het 'n **gradiënt van 2** en die y -afsnit is **(0; 0)**.
- die lyn $y = 5$ het 'n **gradiënt van 0** en die y -afsnit is **(0; 5)**.
- Wat is die gradiënt en y -afsnit van die lyn $2y = 6x + 10$?

As jy gesê het $m = 6$ en $c = 10$ sou jy verkeerd wees. Die vergelyking is nie in standaardvorm nie. Jy moet eers die vergelyking na standaardvorm verander voordat jy die waardes van die gradiënt en die y -afsnit kan bepaal.

$$2y = 6x + 10 \rightarrow \text{Deel albei kante deur 2}$$

$$y = 3x + 5$$

Die gradiënt is dus 3 en die y -afsnit is.

Standaardvorm

Die standaardvorm van 'n reguit lyngrafiek is **$y = mx + c$** . Aan die een kant behoort daar slegs 'n " y " te staan (met 'n koëffisiënt van 1).

- As $m > 0$ sal die lyn styg.
- As $m < 0$ sal die lyn daal.
- As die lyn horisontaal is, is $m = 0$.
- As die lyn vertikaal is, is m ongedefinieerd.

2. Voltooi die tabel:

Vergelyking	Gradiënt	y -afsnit
$y = 3x + 5$		
$y = \frac{x}{2} - 7$		
$y = 2 - 3x$		
$-y = 5x - 10$		
$y = 3$		
	1	(0; 0)
	-2	(0; -7)

3. Skryf die volgende vergelykings in standaardvorm en bepaal dan die gradiënt en die y -afsnit.

(a) $2y + 4x = 10$

(b) $-3x = y + 4$

(c) $3x - 4 = y$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(d) $3y + 6 = x$

(e) $y = -3x + 4y - 12$

(f) $y = 3x - 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(g) $y = \frac{1}{4}x + 6$

(h) $y = -12$

(i) $x = 15$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BEPAAAL DIE VERGELYKING VAN 'N REGUIT LYN

Die vergelyking van 'n reguit lyn is $y = mx + c$. As jy die vergelyking van 'n reguit lyn moet bepaal, hoef jy slegs die waardes van m en c te bereken.

As jy die waardes van twee punte op die grafiek ken, kan jy die gradiënt bereken deur die formule $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ te gebruik.

As jy eers weet wat die gradiënt is, kan jy die waarde van die y -afsnit met behulp van vervanging bereken.

Voorbeeld 1: Bepaal die vergelyking van die reguit lyn wat deur die punte (1; 1) en (5; 13) loop.

Stap 1: Bereken die gradiënt.

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 13}{1 - 5} = \frac{-12}{-4} = 3$$

Stap 2: Aangesien jy nou weet dat $m = 3$ kan jy m in die vergelyking vervang.

$$y = mx + c.$$

$$\text{Dus } y = 3x + c.$$

Stap 3: Om c te bepaal moet jy die koördinate van 'n punt op die lyn in die vergelyking vervang. (Dit kan óf die punte wees wat gegee is, óf kies die makliker een)

Vervang (5; 13) in $y = 3x + c$

$$(13) = 3(5) + c$$

$$13 = 15 + c$$

$$13 - 15 = c$$

$$-2 = c$$

Stap 4: Skryf die vergelyking: $y = 3x - 2$

Voorbeeld 2: Bepaal die vergelyking van die lyn wat deur (4; -1) en (7; 5) loop.

Inligting	m (Gradiënt)	c (y -afsnit)	(Vergelyking)
(4; -1)	$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$	Vervang $m = 2$ en (7; 5)	$y = mx + c$
(7; 5)	$= \frac{-1 - 5}{4 - 7}$	$y = mx + c$	$y = 2x - 9$
	$= \frac{-6}{-3}$	$y = 2x + c$	
	$= 2$	$(5) = 2(7) + c$	
		$5 = 14 + c$	
		$-9 = c$	

Voorbeeld 3: Bepaal die vergelyking van die lyn met 'n gradiënt van 4 wat deur (2; 6) loop.

Inligting	m (Gradiënt)	c (y -afsnit)	(Vergelyking)
$m = 4$	$m = 4$	Vervang $m = 4$ en (2; 6)	$y = mx + c$
(2; 6)		$y = mx + c$	$y = 4x - 2$
		$y = 4x + c$	
		$6 = 4(2) + c$	
		$-2 = c$	

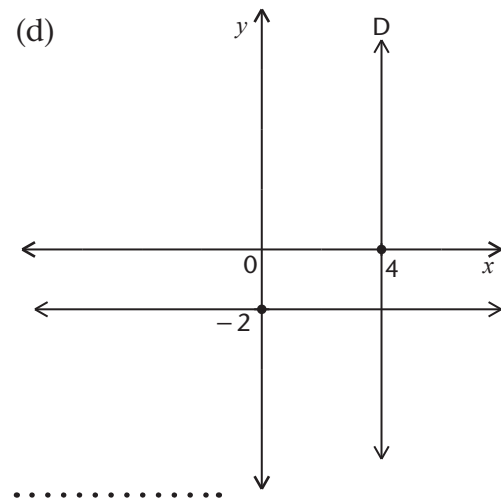
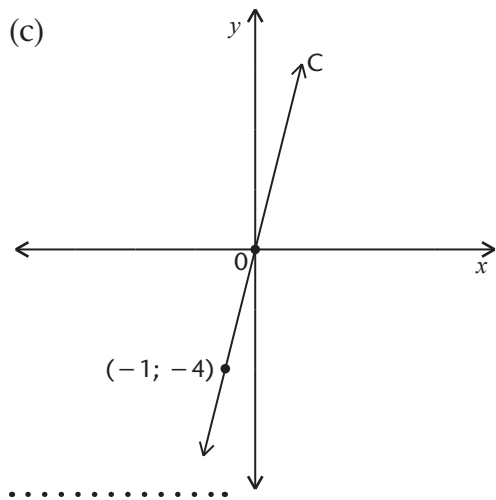
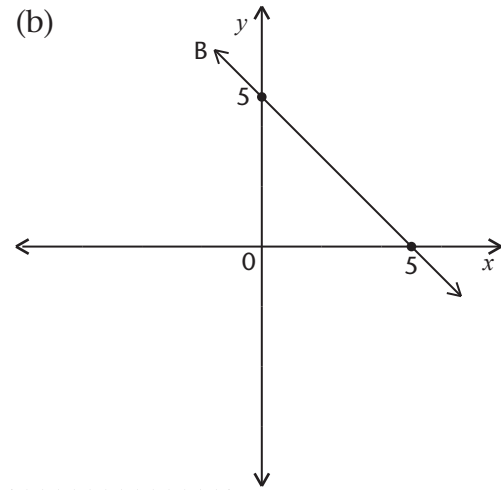
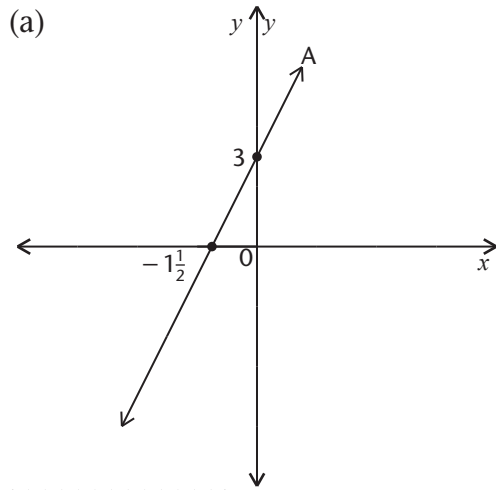
1. Bepaal die vergelyking van elk van die reguit lyne wat deur die gegewe punte loop.

(a) (3; 10) en (2; 5)	(b) (-4; 5) en (2; 5)	(c) (0; 0) en (4; -8)
.....		
(d) $(1\frac{1}{2}; 4)$ en $(-\frac{1}{2}; 12)$	(e) (3; 4) en (-7; -1)	(f) (0; 3) en (-14; -4)
.....		

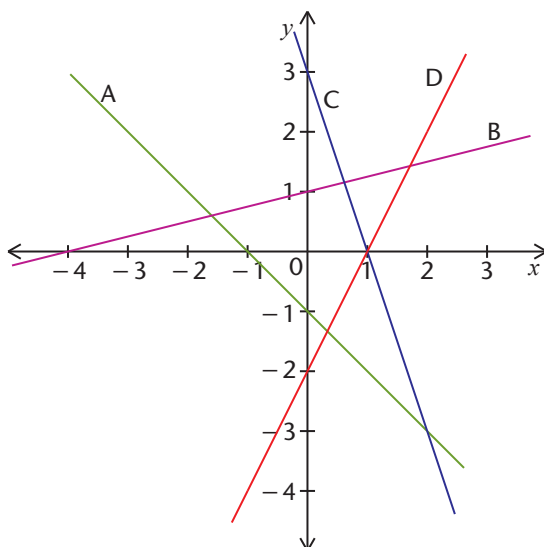
2. Bepaal die vergelyking van 'n reguit lyn met:

(a) 'n gradiënt van 5 wat deur die punt (1; -3) loop
.....
(b) 'n gradiënt van -2 wat deur die punt (0; 0) loop
.....
(c) 'n y -afsnit van 7 wat deur die punt (1; -3) loop
.....

3. Bepaal die vergelykings van die reguit lyne. Vraag (d) is 'n uitdaging.



4.6 x- en y-afsnitte



1. Skryf die koördinate van die punte, waar elke lyn 2 asse sny, neer:

	x-afsnit	y-afsnit
A		
B		
C		
D		

2. Wat het al die x-afsnitte in gemeen?

.....

3. Wat het al die y -afsnitte in gemeen?

.....

4. Bepaal die koördinate van die x - en y -afsnitte van die volgende reguit lyne.

(a) $y = 3x + 12$

(b) $y = x - 3$

.....

(c) $y = -2x - 4$

(d) $2y = 6x + 12$

.....

(e) $4x + 2y = 20$

(f) $13 - y = -26x$

.....

VERTIKALE EN HORIZONTALE LYNE

Daar is sekere spesiale lyne wat so eenvoudig is dat jy geen ingewikkelde metodes nodig het om hulle te teken of hulle vergelykings te kry nie; jy kan maar net na hulle kyk.

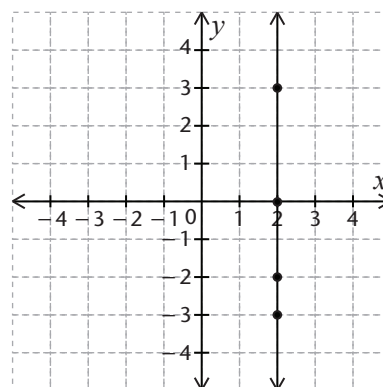
1. Wat het die volgende koördinaatpare in gemeen?

$(2; 3)$, $(2; -2)$, $(2; 0)$ and $(2; -3)$

.....

2. Skryf nog twee punte neer wat 'n x -koördinaat van 2 het.

.....



As jy hierdie punte op 'n stel asse stip sal jy sien dat hulle 'n **vertikale lyn** vorm.

Die vergelyking van die lyn is $x = 2$.

3. Sal die twee ekstra punte wat jy neergeskryf het (vraag 2) ook op die lyn verskyn?

.....

4. Skryf vyf koördinaatpare neer met $x = -1$.

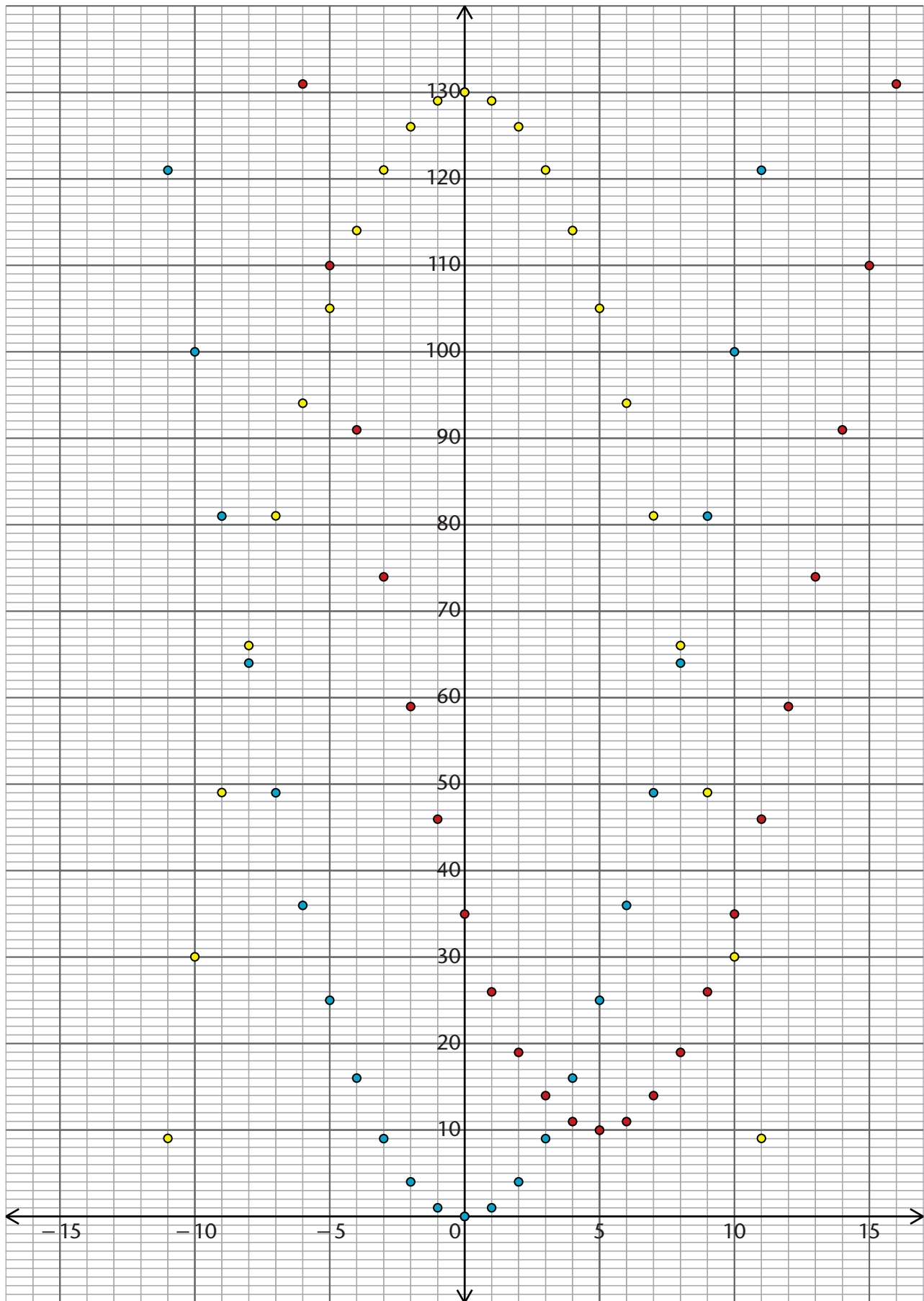
.....

Party van die volgende verbande word deur grafieke op die volgende bladsy voorgestel. Stel vas watter van die verbande voorgestel word deur watter stel punte op die grafiek. Jy mag die tabelle hier onder gebruik om jou te help om hierdie vraag te beantwoord. Jy kan byvoorbeeld sekere uitvoergetalle bereken deur die formules te gebruik en dit dan in die tabelle te skryf.

$$y = (x - 5)^2 + 10$$
$$y = x^2 - 10x + 35$$

[illegible]

Stel van geel punte
 Stel van blou punte
 Stel van rooi punte

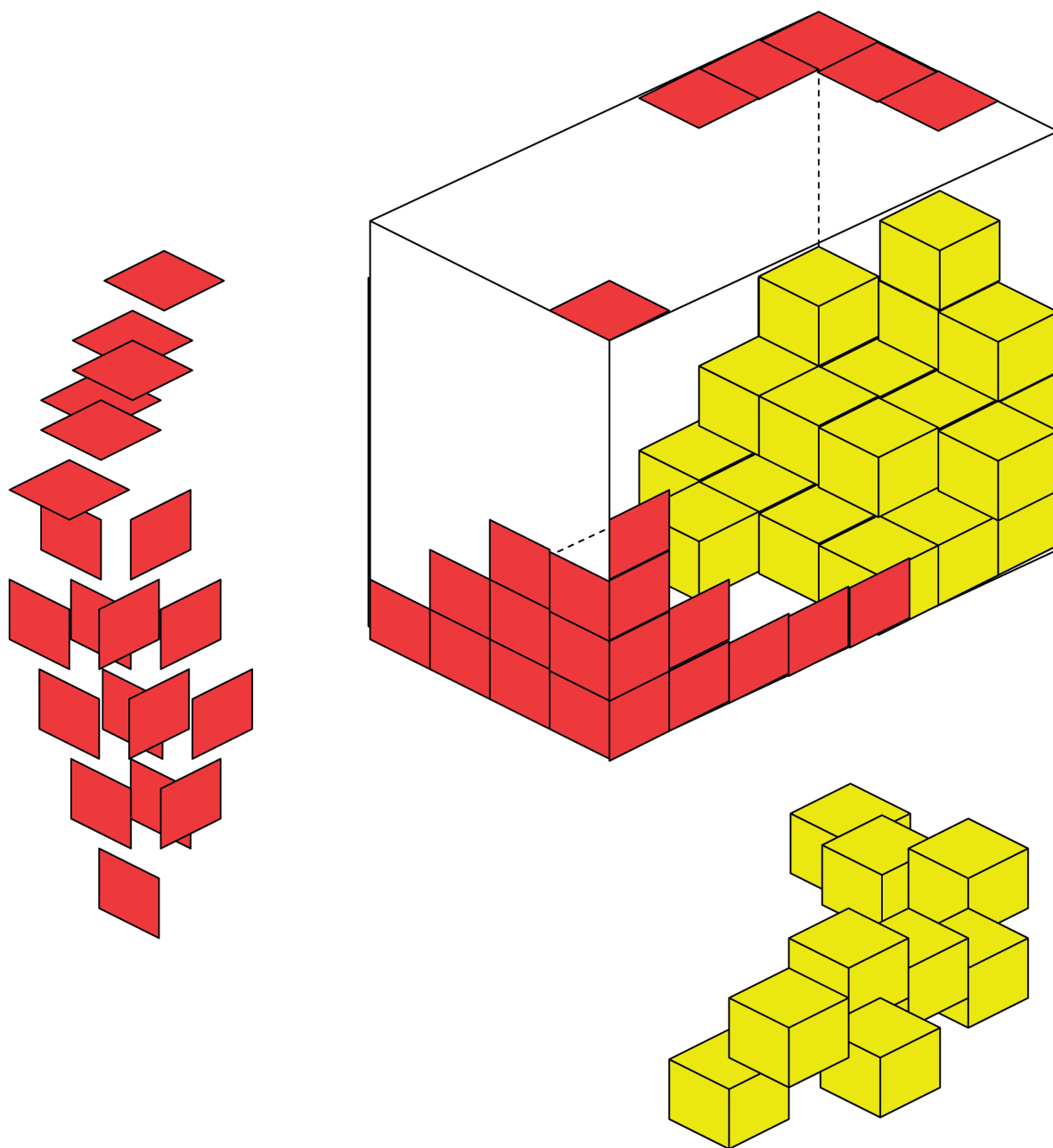


HOOFSTUK 5

Buite-oppervlakte, volume en kapasiteit van 3D-voorwerpe

Teen die tyd behoort jy te weet hoe om die buite-oppervlakte en volume van kubusse, reghoekige prisma's en driehoekige prisma's te bereken. In hierdie hoofstuk sal jy dit weer hersien, oefen om omskakelings te doen tussen ekwivalente eenhede wat vir volume gebruik word en die verskil tussen volume en kapasiteit hersien. Jy sal ook ondersoek hoe om die buite-oppervlakte en volume van silinders te bereken, asook verken hoe die volumes van 'n prisma en 'n silinder beïnvloed word as een of meer van die afmetings verdubbel.

5.1	Buite-oppervlakte	77
5.2	Volume	81
5.3	Kapasiteit	85
5.4	Die uitwerking van die verdubbeling van afmetings op volume.....	86



5 Buite-oppervlakte, volume en kapasiteit van 3D-voorwerpe

5.1 Buite-oppervlakte

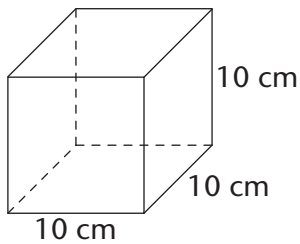
BUITE-OPPERVLAKTE VAN PRISMAS

Die **buite-oppervlakte** van 'n voorwerp is die totale oppervlakte van al sy vlakke bymekaargetel. Jy het die volgende formule in die vorige grade geleer:

■ Buite-oppervlakte van 'n prisma = Somtotaal van die oppervlaktes van al die vlakke

Bereken die buite-oppervlakte van die volgende voorwerpe om te hersien wat jy alreeds moet weet.

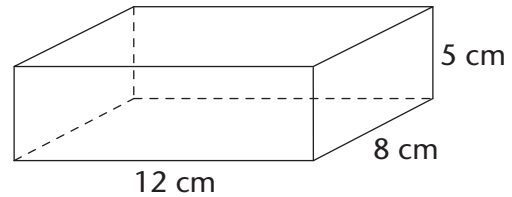
1.



.....

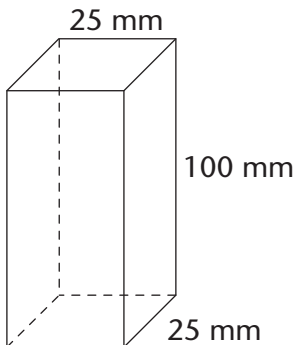
 [ons gebruik BO vir buite-oppervlakte].

2.



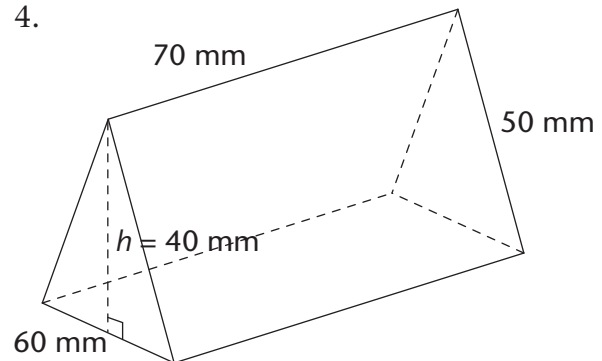
.....

3.



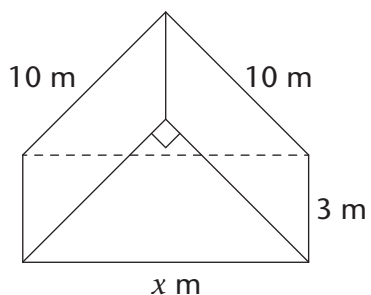
.....

4.



.....

5.



.....

.....

.....

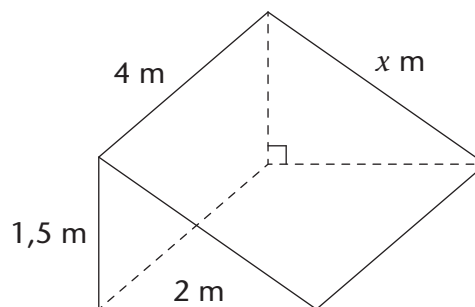
.....

.....

.....

.....

6.



.....

.....

.....

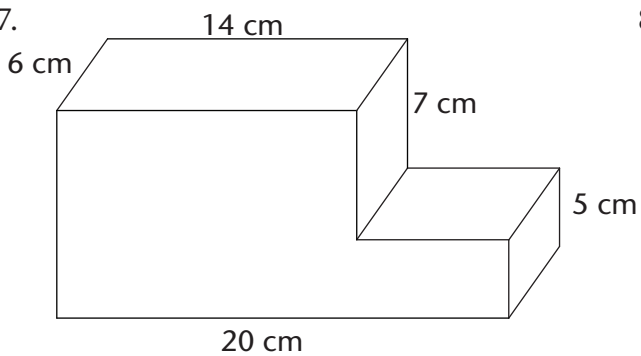
.....

.....

.....

.....

7.



.....

.....

.....

.....

.....

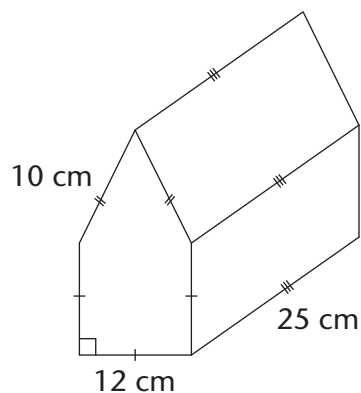
.....

.....

.....

.....

8.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

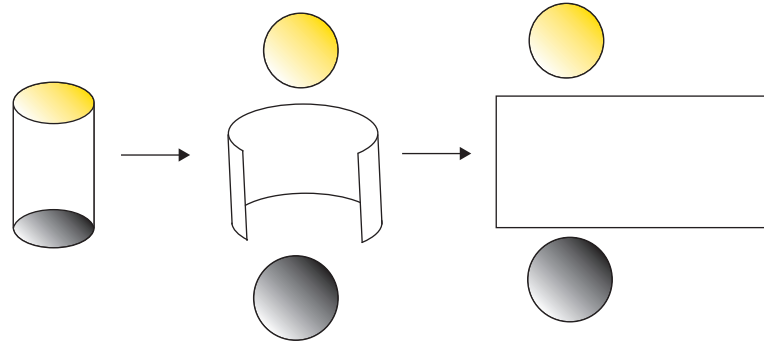
.....

.....

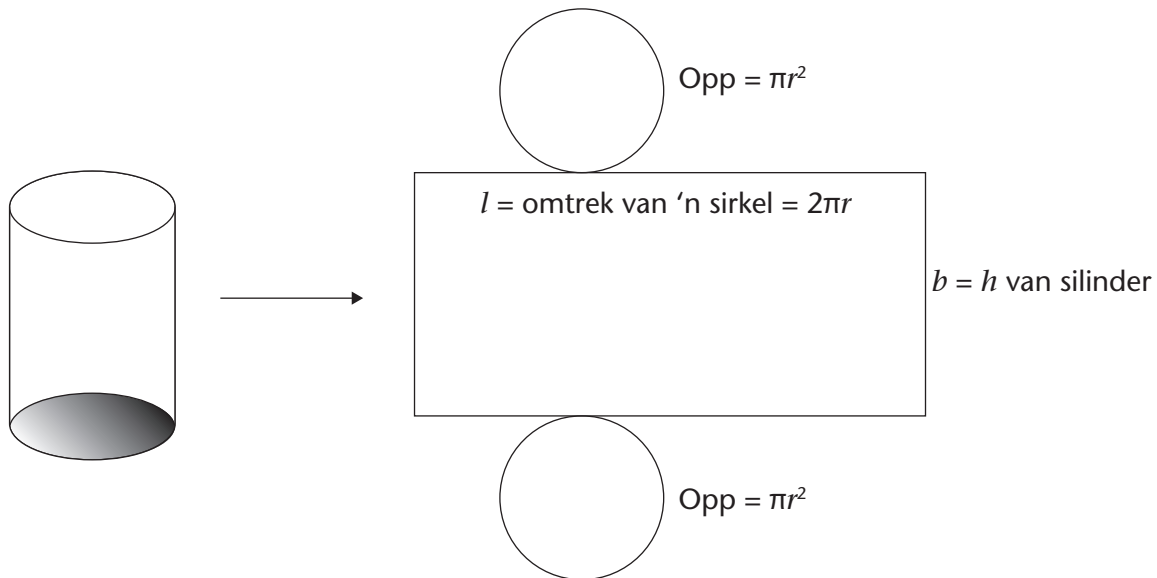
ONDERSOEK DIE BUIE-OPPERVLAKTE VAN SILINDERS

Ten einde die buite-oppervlakte van 'n silinder te bepaal, moet jy weet watter soort vlakke 'n silinder het.

Die oppervlakte van die bokant en basis van 'n silinder bestaan uit sirkels. Die geboë oppervlak tussen die bokant en basis van 'n silinder kan oopgerol word om 'n reghoek te vorm.



Dus lyk die net van 'n silinder soos volg:



Buite-oppervlakte van 'n silinder = Oppervlakte van al die vlakke

= Oppervlakte van bokant + Oppervlakte van basis +
Geboë oppervlakte

$$= \pi r^2 + \pi r^2 + (l \times b)$$

$$= 2\pi r^2 + (2\pi r \times h)$$

$$= 2\pi r(r + h)$$

Kan jy verduidelik hoekom die lengte van die reghoek gelyk is aan die omtrek van die bokant of basis van die silinder?

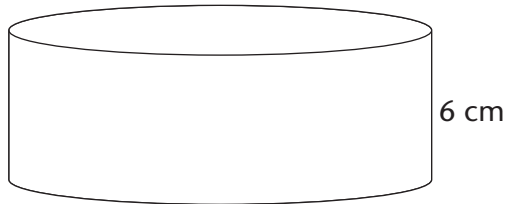
BEREKENING VAN DIE BUIITE-OPPERVLAKTE VAN SILINDERS

Vanuit die formule op die vorige bladsy, kan jy sien dat ons slegs die radius (r) en hoogte (h) van 'n silinder nodig het om sy buite-oppervlakte te bereken.

1. Bereken die buite-oppervlakte van elk van die volgende voorwerpe. Gebruik $\pi = 3,14$ en rond jou antwoorde af tot die naaste twee desimale plekke.

A.

$r = 6 \text{ cm}$

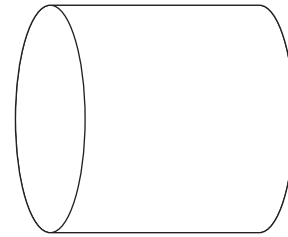


.....

B.

8 m

$r = 4 \text{ m}$



.....

2. Bereken die buite-oppervlakte van 'n silinder waarvan die hoogte 60 cm en die omtrek van sy basis $25,12 \text{ cm}$ is.

.....

3. Bereken die buite-oppervlakte van 'n silinder waarvan die hoogte 5 m en die omtrek van sy basis $12,56 \text{ m}$ is.

.....

4. Die buitekant van 'n silindriese struktuur by 'n fabriek moet geverf word. Die radius is $3,5 \text{ m}$ en die hoogte is 8 m . Hoeveel liter verf moet aangekoop word as $1 \text{ liter verf } 10 \text{ m}^2$ sal bedek? (Die onderkant van die struktuur word nie geverf nie.)

.....

5.2 Volume

Die **volume** van enige voorwerp is die hoeveelheid ruimte wat dit beslaan. Ons meet volume gewoonlik in kubieke eenhede, soos mm^3 , cm^3 en m^3 .

Om tussen kubieke eenhede om te skakel, onthou:

$$1 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

FORMULES VIR VOLUME VAN PRISMAS

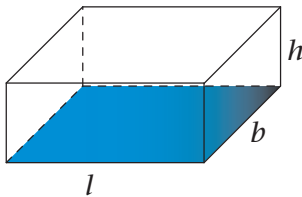
Die algemene formule vir die volume van 'n prisma is:

Volume van 'n prisma = Oppervlak van basis $\times$ hoogte.

In die geval van 'n driehoekige prisma moet die hoogte van die driehoekige basis (h_b) nie verwar word met die hoogte van die prisma (h_p) nie.

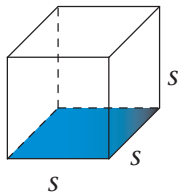
Dus, die formules om die volumes van die volgende prismas te bereken is:

Reghoekige prisma



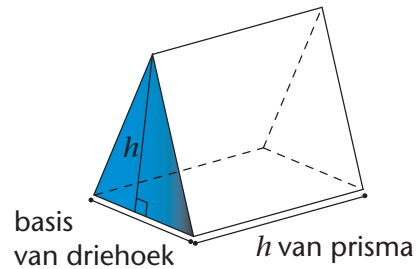
$$V = (l \times b) \times h$$

Kubus



$$V = (s \times s) \times s \\ = s^3$$

Driehoekige prisma

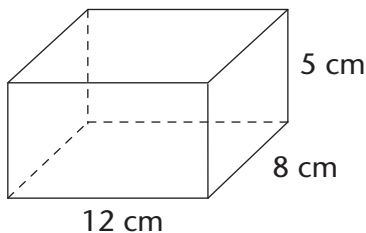


$$V = \left(\frac{1}{2} \text{ basis} \times h_b\right) \times h_p$$

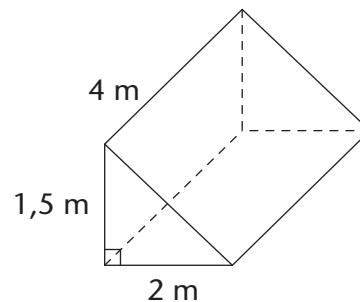
BEREKENING VAN DIE VOLUME VAN PRISMAS

1. Bereken die volume van die volgende prismas.

A.



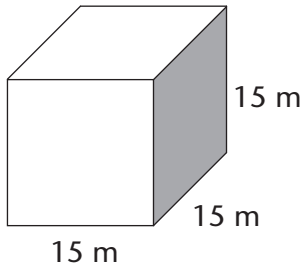
B.



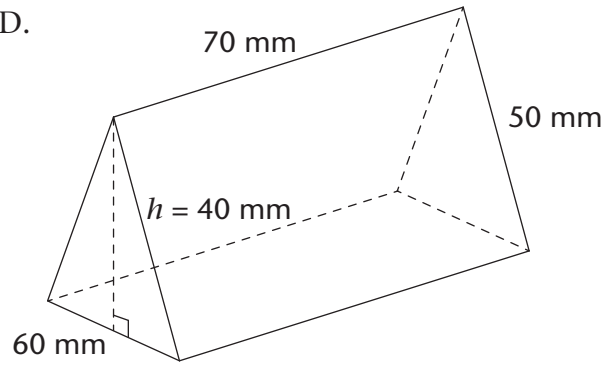
.....

.....

C.



D.



.....

.....

2. (a) Die basis van 'n reghoekige prisma is 32 m^2 en sy hoogte is 12 m. Wat is sy volume?

.....

- (b) Die volume van 'n kubus is 216 m^3 . Wat is die lengte van een van die rande?

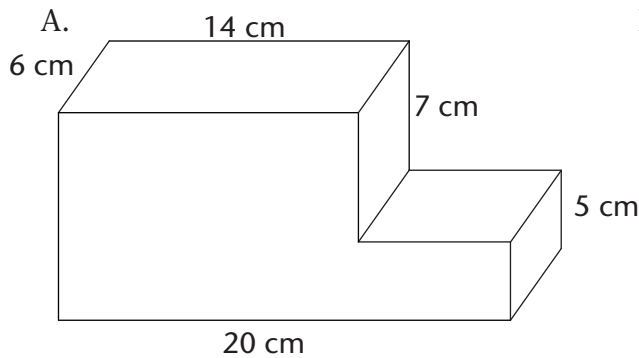
.....

.....

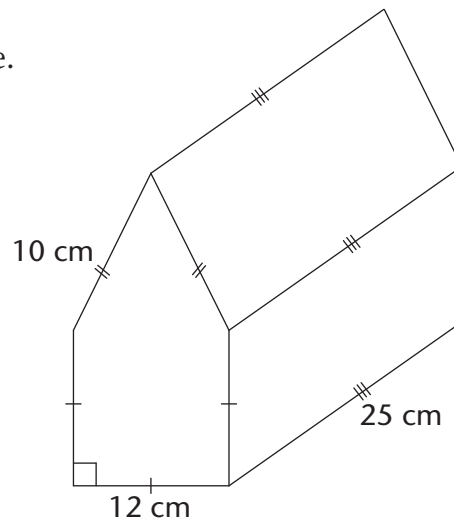
.....

3. Bereken die volume van die volgende voorwerpe.

A.



B.



.....

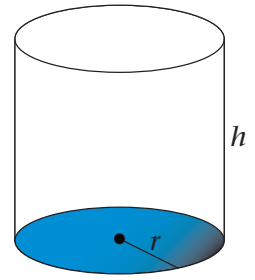
.....

.....

VOLUME VAN SILINDERS

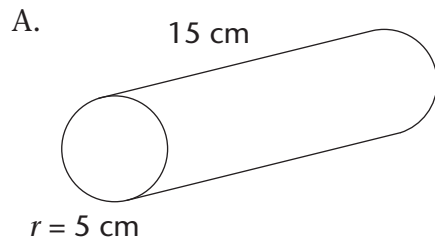
Die volume van 'n silinder is ook gelyk aan die oppervlakte van sy basis vermenigvuldig met die hoogte. Die basis van 'n silinder is sirkelvormig, dus:

$$\begin{aligned}\text{Volume van 'n silinder} &= \text{Oppervlakte van basis} \times h \\ &= \pi r^2 \times h\end{aligned}$$

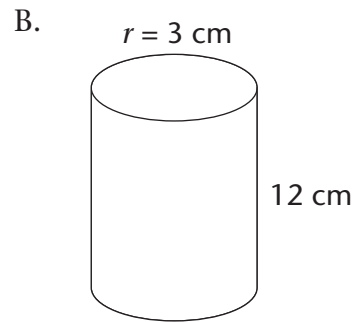


Opp van sirkel = πr^2

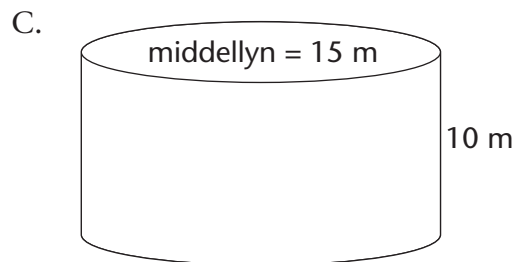
1. Bereken die volume van die volgende silinders. Gebruik $\pi = 3,14$ en rond alle antwoorde af tot twee desimale plekke.



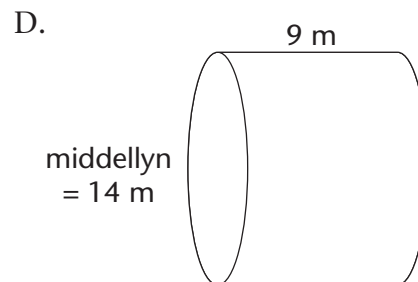
.....



.....



.....



.....

2. Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, bereken die volume van die silinders met die volgende afmetings. Gebruik $\pi = \frac{22}{7}$.

(a) $r = 14 \text{ cm}$, $h = 20 \text{ cm}$

(b) $r = 7 \text{ cm}$, $h = 35 \text{ cm}$

.....

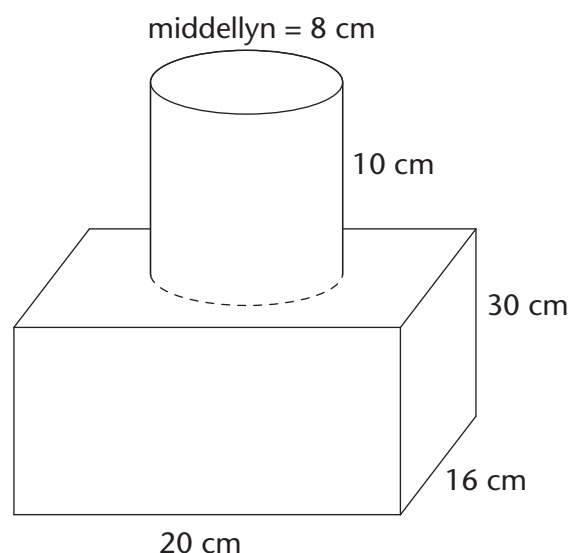
(c) middellyn = 28 cm , $h = 50 \text{ cm}$

(d) middellyn = 7 cm , $h = 10 \text{ cm}$

.....

3. Bereken die volume van die volgende voorwerp. Gebruik 'n sakrekenaar en rond alle antwoord af tot twee desimale plekke.

.....



.....

5.3 Kapasiteit

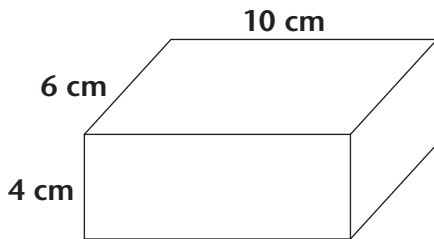
Onthou dat die **kapasiteit** van 'n voorwerp is die hoeveelheid ruimte *binne*-in die voorwerp. Dink aan kapasiteit van 'n voorwerp as die hoeveelheid vloeistof wat die voorwerp kan hou.

Die **volume** van 'n voorwerp is die hoeveelheid ruimte wat die voorwerp self in beslag neem.

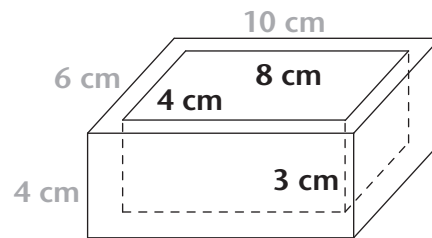
Die volume van 'n soliede houtblok is $10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 240 \text{ cm}^3$.

Dieselfde houtblok word uitgehol sodat die binneste afmetings $8 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ is. (Die wande is 1 cm dik.) Die hoeveelheid spasie binne-in die houer moet bereken word deur die *binneste* afmetings te gebruik. Dus is die kapasiteit van die houer $8 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 96 \text{ cm}^3$.

A. Soliede houtblok met buitenste afmetings



B. Uitgeholde houtblok met binneste afmetings



1. Gee, in ml, die volume water wat die houer B hier bo sal vul.

.....

Onthou:
 $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$
 $1 \text{ m}^3 = 1 \text{ kl}$

2. Indien die wande en onderkant van houer B hier bo 0,5 cm dik is, wat sal die kapasiteit dan wees? Gee die antwoord in ml.

.....

.....

3. Die binne-afmetings van 'n swembad is $9 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 2 \text{ m}$. Wat is die kapasiteit van die swembad in kl?

.....

.....

.....

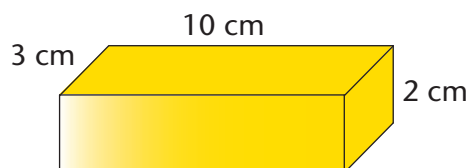
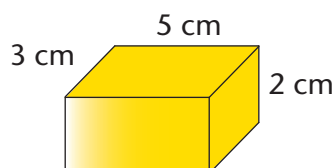
5.4 Die uitwerking van verdubbeling van afmetings op volume

VERDUBBELING VAN DIE AFMETINGS VAN 'N PRISMA

Die afmetings van die eerste prisma hier onder is $5\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 2\text{ cm}$. Die ander diagramme toon die prisma met een of meer van sy afmetings verdubbel.

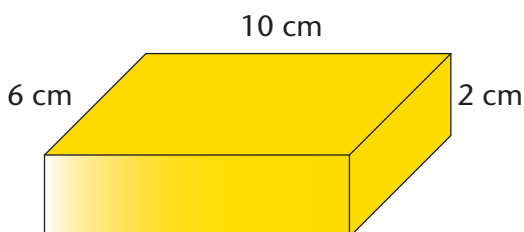
1. Bereken die volume van elke prisma.

Een afmeting verdubbel

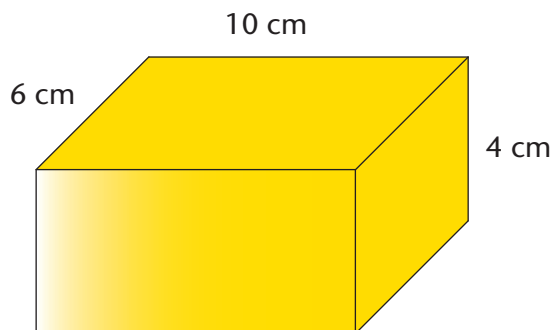


.....	
.....	
.....	

Twee afmetings verdubbel



Drie afmetings verdubbel



.....	
.....	
.....	

2. Voltooi die volgende:

- Wanneer een afmeting van 'n prisma verdubbel, die volume.
- Wanneer twee afmetings van 'n prisma verdubbel, word die volume keer groter.
- Wanneer al drie afmetings van 'n prisma verdubbel, word die volume keer groter.

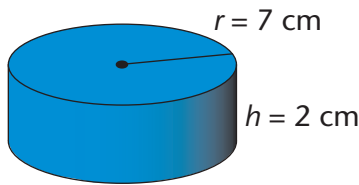
3. Die volume van 'n prisma is 80 cm^3 . Wat is sy volume as:

- (a) sy lengte verdubbel?
- (b) sy lengte en breedte verdubbel?
- (c) sy lengte, breedte en hoogte verdubbel?

VERDUBBEL DIE AFMETINGS VAN 'N SILINDER

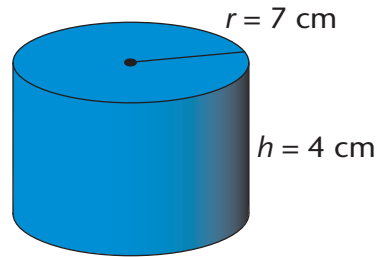
Die eerste silinder hier onder het 'n radius van 7 cm en 'n hoogte van 2 cm. Die ander diagramme toon die silinder met een of meer van sy afmetings verdubbel.

1. Bereken die volume van elke silinder.



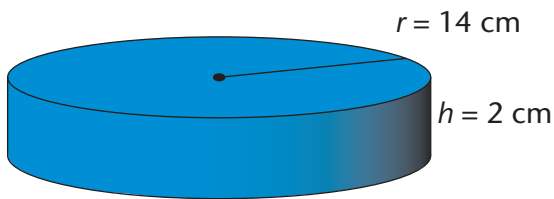
.....

Slegs die hoogte verdubbel



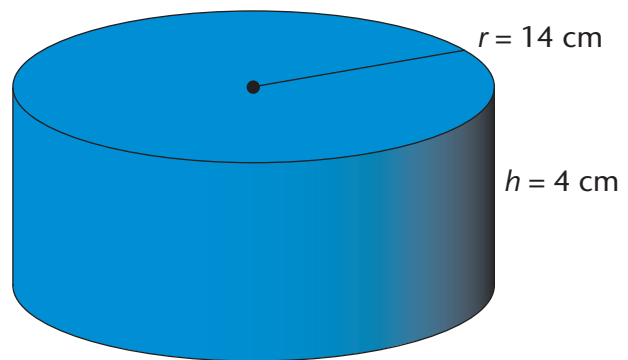
.....

Slegs radius verdubbel



.....

Radius en hoogte verdubbel



.....

2. Voltooi die volgende:

- (a) As die hoogte van 'n silinder verdubbel, die volume.
 (b) As die radius van 'n silinder verdubbel, word die volume keer groter.
 (c) As die hoogte en radius van 'n silinder verdubbel, word die volume keer groter.

3. Die volume van 'n silinder is 462 cm^3 . Wat is sy volume as:

- (a) sy hoogte verdubbel?
 (b) sy radius verdubbel?
 (c) sy hoogte en radius verdubbel?

4. (a) Bestudeer die volgende tabelle. Sonder om die formules te gebruik om die volume te bereken, voltooi die laaste kolom van elke tabel. (Wenk: Identifiseer watter afmetings elke keer verdubbel en bereken dan volume dienooreenkomstig.)

Reghoekige prisma			
Lengte (l) in m	Breedte (b) in m	Hoogte (h) in m	Volume (V) in m^3
4	2	1	
4	4	1	
8	2	1	
8	2	2	
8	4	2	

Silinder		
Radius (r) in m	Hoogte (h) in m	Volume (V) in m^3
3,5	4	
7	4	
3,5	8	
7	8	

(b) Verduidelik hoe jy die antwoorde in die tabel uitgewerk het.

.....

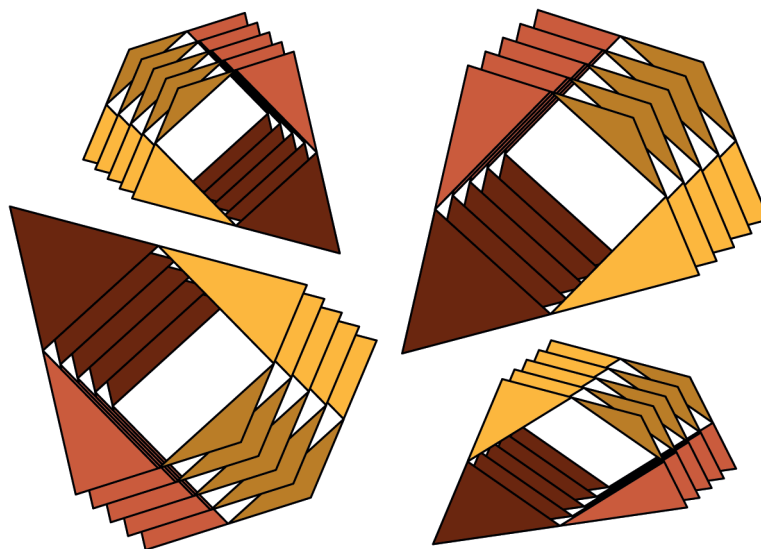
HOOFSTUK 6

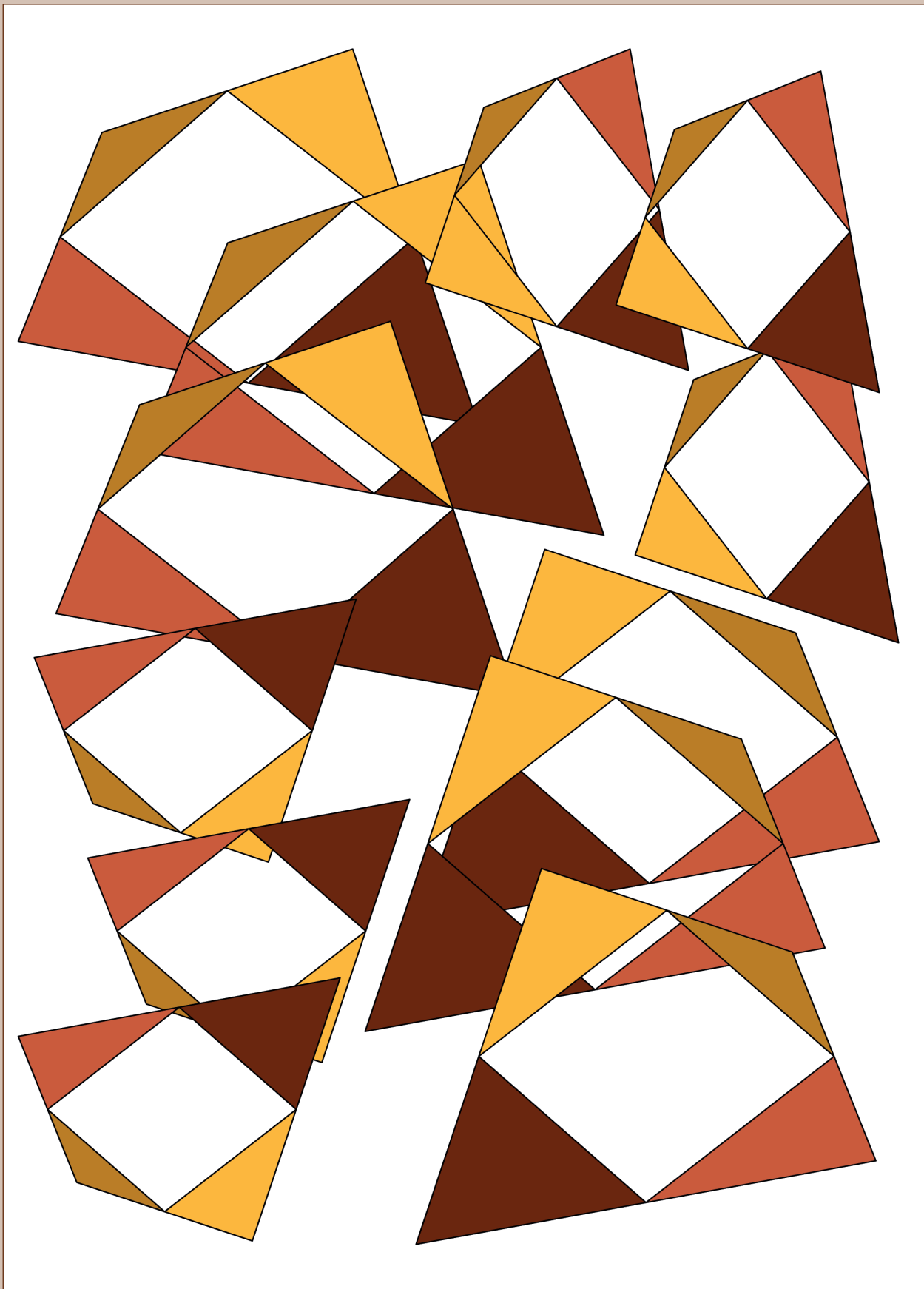
Transformasie meetkunde

In Graad 8 het jy geleer hoe om translasies, refleksies en rotasies op 'n koördinaatvlak te beskryf. In sulke transformasies is die oorspronklike figuur en sy beeld altyd kongruent. In hierdie graad gaan jy in fyner besonderhede die veranderinge in die koördinate van die oorspronklike figuur en hulle beelde in verskillende refleksies en translasies verken.

Jy gaan ook hersiening doen oor hoe 'n figuur vergroot of verklein word as sy sye met dieselfde getal, wat die skaalfaktor genoem word, vermenigvuldig of gedeel word. Verder gaan jy kyk hoe die skaalfaktor die oppervlakte en die omtrek van 'n beeld beïnvloed. In vergrotings en verkleinings is die ooreenstemmende sye van die oorspronklike figuur en sy beeld in proporsie, m.a.w. die figuur is gelykvormig. Jy sal ook vergrotings en verkleinings van figure op die koördinaatvlak doen en die koördinate van die hoekpunte van sulke figure ondersoek.

6.1	Punte op 'n koördinaatstelsel	91
6.2	Refleksie (omklap)	92
6.3	Translasie (skuif)	96
6.4	Vergroting (uitsetting) en verkleining (inkrimping)	100





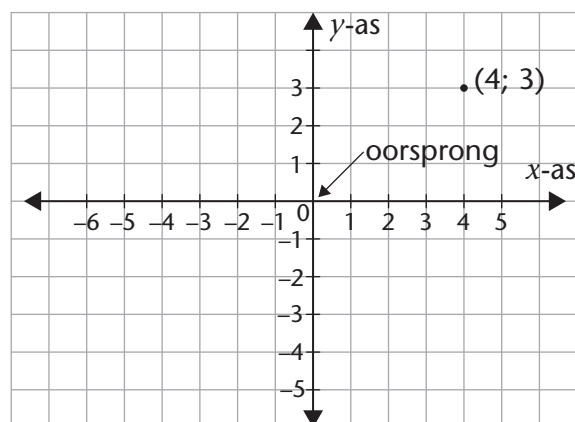
6 Transformasie meetkunde

6.1 Punte op 'n koördinaatstelsel

'n Reghoekige koördinaatstelsel word ook 'n **Cartesiese koördinaatvlak** genoem. Dit bestaan uit 'n horisontale x -as en 'n vertikale y -as.

Die interseksie van die asse word die **oorsprong** genoem en verteenwoordig die punt $(0; 0)$.

Enige punt kan op 'n koördinaatstelsel voorgestel word deur 'n x -waarde en 'n y -waarde te gebruik. Hierdie getalle word **koördinate** genoem en beskryf die posisie van die punt met betrekking tot die twee asse.



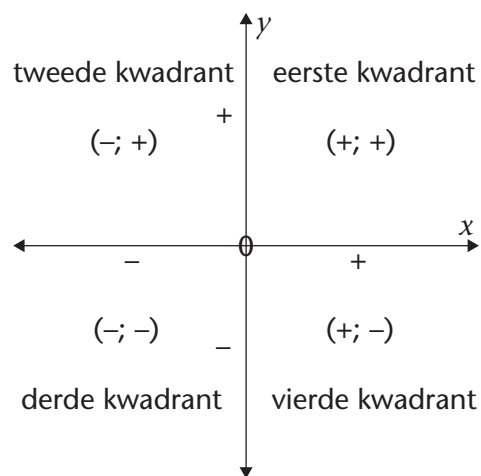
Die koördinate word in 'n spesifieke volgorde geskryf:

Die horisontale afstand vanaf die oorsprong (x -koördinaat) word eerste geskryf.

Die vertikale afstand vanaf die oorsprong (y -koördinaat) word tweede geskryf.

Hierdie getalle, wat 'n **geordende getallepaar** genoem word, word deur 'n kommapunt (;) geskei en in hakies geskryf. Hier is 'n voorbeeld van 'n geordende getallepaar: $(4; 3)$ (sien die koördinaatstelsel hier bo).

Die x -as en die y -as verdeel die koördinaatstelsel in vier kwadrate. Die diagram regs wys hoe die kwadrate genummer word en ook of die x - en y -koördinate in elke kwadrant negatief of positief is.



1. In watter kwadrant sal die volgende punte gestip word?

- (a) $(-4; 1)$ (b) $(-1; -5)$
(c) $(4; -3)$ (d) $(5; 2)$

2. Stip die punte in vraag 1 op die koördinaatstelsel hier bo.

Wanneer 'n punt geskuif word na 'n ander posisie op die koördinaatstelsel, word die nuwe posisie die beeld van die punt genoem. Die priemstroombool (') word gebruik om 'n beeld aan te dui. Byvoorbeeld, die beeld van A is A' (lees as "A priem"). As A se koördinate $(x; y)$ genoem word, kan A' se koördinate $(x'; y')$ genoem word.

Ons skryf $A \rightarrow A'$ en $(x; y) \rightarrow (x'; y')$ om aan te dui dat A afgebeeld word op A'.

6.2 Refleksie (omklap)

Die **spieëlbeeld** of **refleksie** van 'n punt verskyn aan die anderkant van die **lyn van refleksie** (refleksielyn).

Om "'n punt in die x-as te reflekteer" beteken dat die x-as die lyn van refleksie is.

Die oorspronklike punt en sy refleksie is ewe ver van die refleksielyn en die lyn wat die punt en sy beeld verbind is loodreg op die lyn van refleksie.

Enige lyn op die koördinaatstelsel kan 'n lyn van refleksie wees. Dit sluit die x-as, die y-as en die lyn $y = x$ in.

REFLEKTEER PUNTE IN DIE x-AS, y-AS EN DIE LYN $y = x$

- Die geordende getalpare A(5; 4) en B(-3; -2) word op 'n koördinaatstelsel gestip.
 - Reflekteer punte A en B in die x-as en skryf die koördinate van die beelde neer.
 - Reflekteer punte A en B in die y-as en skryf die koördinate van die beelde neer.
 - Vergelyk die koördinate van die oorspronklike punte met dié van hulle beelde. Wat merk jy op?

.....

.....

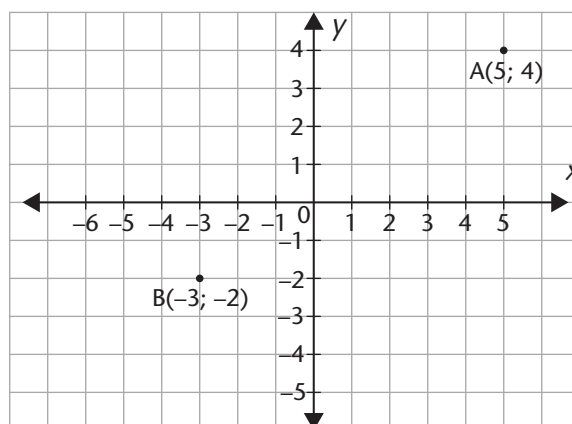
.....

.....

.....

.....

.....



2. Skryf die koördinate van die beelde van die volgende gereflekteerde punte neer.

Punt	Refleksie in die x -as	Refleksie in die y -as
$(-131; 24)$		
$(-459; -795)$		
$(x; y)$		

3. Die punte $J(-1; 5)$, $K(-2; -4)$ en $L(1; -2)$ word op die koördinaatstelsel gestip. K' is die refleksie van punt K in die lyn $y = x$. Dit beteken dat die lyn $y = x$ die refleksielyn is.

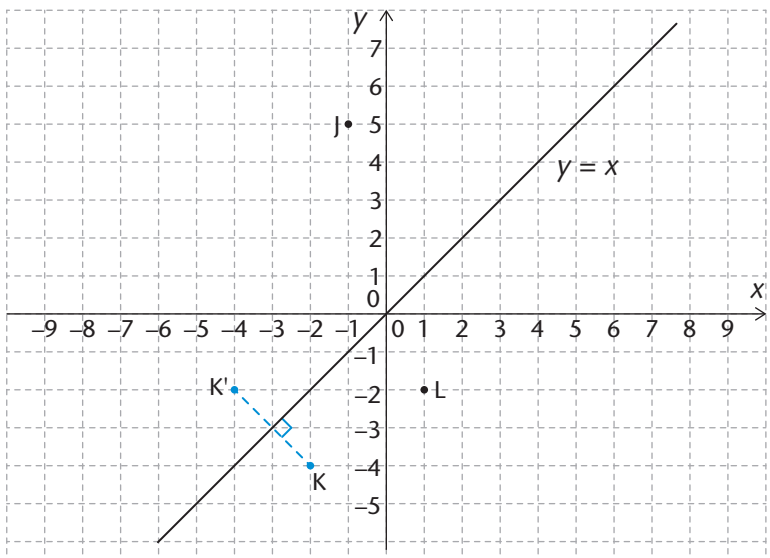
- (a) Reflekteer J en L in die lyn $y = x$.
 (b) Skryf die koördinate van die beelde van die punte neer.

.....

- (c) Wat merk jy op van die koördinate van die beelde van die punte in (b) hier bo?

.....

- (d) Gebruik jou waarnemings in (c) hier bo om die tabel te voltooi.



Punt	Koördinate van die beeld van die punt soos gereflekteer in $y = x$
$(-1\ 001; -402)$	
$(459; -795)$	
$(-342; 31)$	
$(21; 67)$	
$(x; y)$	

Die volgende behoort uit die vorige aktiwiteit duidelik te wees:

- Vir 'n refleksie in die y -as, verander die x -koördinaat se teken en die y -koördinaat bly dieselfde: $(x; y) \rightarrow (-x; y)$ of $x' = -x$ en $y' = y$,
byvoorbeeld: $(-3; 4) \rightarrow (3; 4)$
- Vir 'n refleksie in die x -as, verander die y -koördinaat se teken en die x -koördinaat bly dieselfde: $(x; y) \rightarrow (x; -y)$ of $x' = x$ en $y' = -y$,
byvoorbeeld: $(-3; 4) \rightarrow (-3; -4)$
- Vir 'n refleksie in die lyn $y = x$, ruil die waardes van die x - en y -koördinate om:
 $(x; y) \rightarrow (y; x)$ of $x' = y$ en $y' = x$,
byvoorbeeld: $(-3; 4) \rightarrow (4; -3)$.

4. Onderzoek die effek van 'n refleksie in die lyn $y = -x$ op die koördinate van 'n punt.

.....
.....

5. A is die punt $(5; -2)$. Gee die koördinate van die refleksies van A as die punt gereflekteer word in:

(a) die y -as

(b) die lyn $y = -x$

.....

(c) die lyn $y = x$

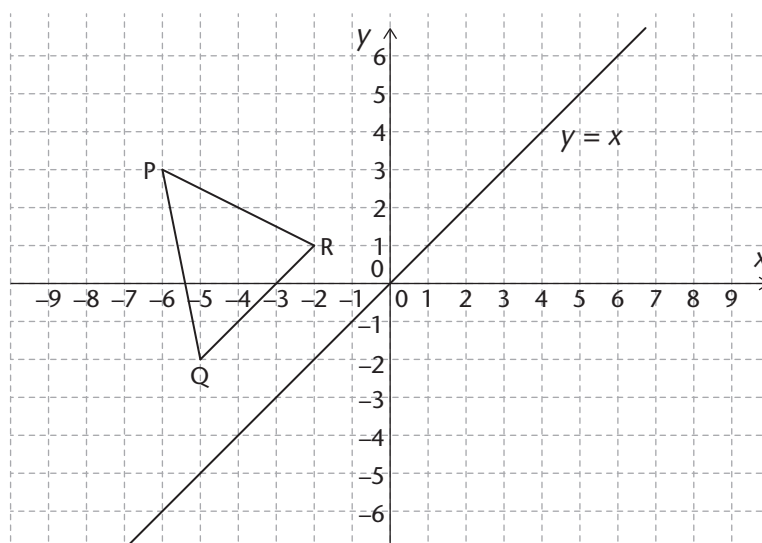
(d) die x -as

.....

REFLEKSIE VAN MEETKUNDIGE FIGURE

Dieselfde beginsels as hier bo is van toepassing as meetkundige figure gereflekteer word.

1. (a) Reflekteer $\triangle PQR$ in die x -as, in die y -as en in die lyn $y = x$ op die koördinaatstelsel (reflekteer eers die hoekpunte en verbind die gereflekteerde punte dan).



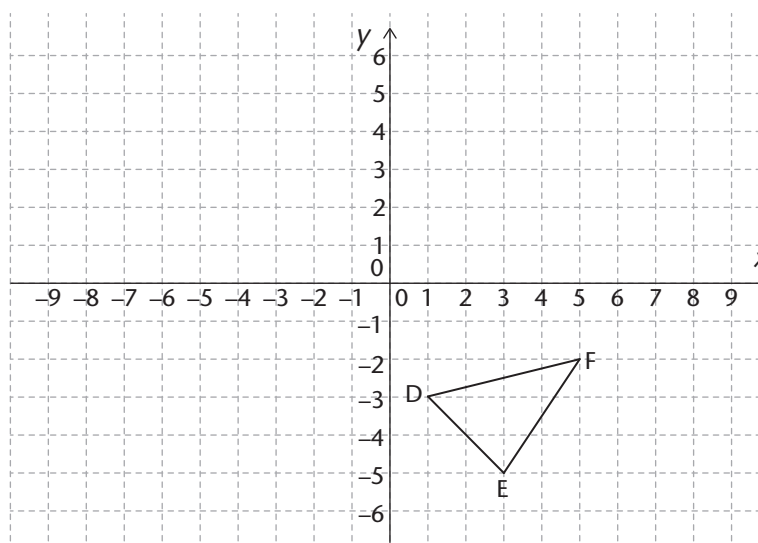
- (b) Kyk na jou voltooide refleksies in vraag 1(a) en skryf die koördinate van die beeldpunte in die tabel:

Hoekpunte van driehoek	Refleksie in die x -as	Refleksie in die y -as	Refleksie in die lyn $y = x$
P(-6; 3)			
Q(-5; -2)			
R(-2; 1)			

- (c) Wat merk jy op van $\triangle PQR$, $\triangle P'Q'R'$, $\triangle P''Q''R''$ en $\triangle P'''Q'''R'''$?

.....

2. Reflekteer $\triangle DEF$ in die x -as, in die y -as en in die lyn $y = x$.



3. 'n Vierhoek het die volgende hoekpunte: A(1; 4), B(-6; 1), C(-2; -1) en D(7; 2). Sonder om werklik die refleksies uit te voer, skryf die koördinate van die hoekpunte van die beeld neer as die vierhoek:

- (a) gereflekteer word in die x -as

.....

- (b) gereflekteer word in die y -as

.....

- (c) gereflekteer word in die lyn $y = x$

.....

4. Sê in elke geval in watter lyn die punt gereflekteer is:

- (a) $(-4; 5) \rightarrow (-4; -5)$
- (b) $(2; -3) \rightarrow (-2; -3)$
- (c) $(-13; -3) \rightarrow (-3; -13)$
- (d) $(1; 16) \rightarrow (16; 1)$
- (e) $(12; -8) \rightarrow (-12; -8)$
- (f) $(-7; -5) \rightarrow (-5; -7)$
- (g) $(2; -3) \rightarrow (-2; -3)$

6.3 Translasie (skuif)

Onthou: 'n Translasie van 'n punt of meetkundige figuur op 'n koördinaatstelsel beteken dat die punt in 'n vertikale rigting, 'n horisontale rigting, of in beide vertikale en horisontale rigtings beweeg of skuif.

SKUIF PUNTE HORIZONTALAAL OF VERTIKAAL OP 'N KOÖRDINAATSTELSEL

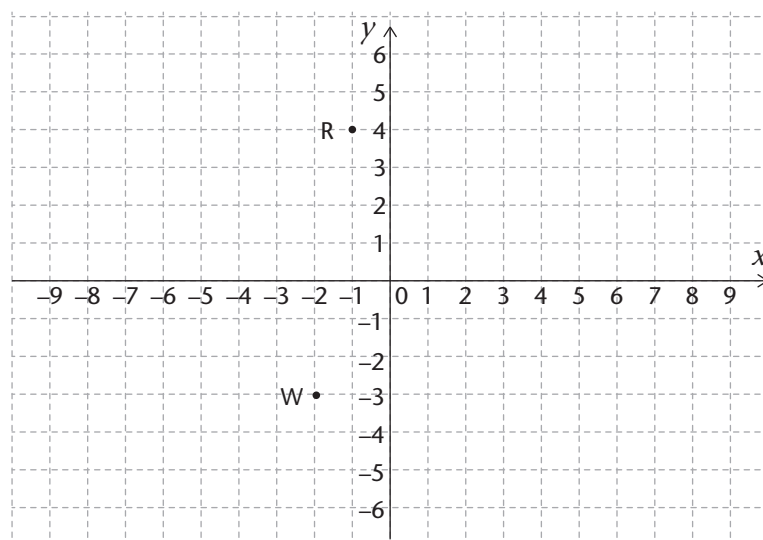
1. Punte R en W is op 'n koördinaatstelsel gestip.

(a) Stip die beeld van punt R na die volgende skuiwe:

- 5 eenhede regs
- 5 eenhede links
- 2 eenhede opwaarts
- 2 eenhede afwaarts

(b) Stip die beeld van punt W na 'n skuif van:

- 4 eenhede regs
- 4 eenhede links
- 3 eenhede opwaarts
- 3 eenhede afwaarts



- (c) Kyk na jou voltooide translasië in (a) en (b) op die vorige bladsy. Voltooi nou die tabel deur die koördinate van die oorspronklike punte en hul beelde na elke translasië neer te skryf.

Koördinate van oorspronklike punte	R(-1; 4)	W(-2; -3)
Koördinate van beeld na 'n skuif na regs		
Koördinate van beeld na 'n skuif na links		
Koördinate van beeld na 'n skuif opwaarts		
Koördinate van beeld na 'n skuif afwaarts		

- (d) Kyk na die voltooide tabel in (c). Kies die regte antwoorde hier onder om elke stelling waar te maak:
- 'n Translasie na **regs of links** verander die (x -waarde/ y -waarde) en die (x -waarde/ y -waarde) bly dieselfde.
 - 'n Translasie **opwaarts of afwaarts** verander die (x -waarde/ y -waarde) en die (x -waarde/ y -waarde) bly dieselfde.
 - By 'n translasië na **regs** word die getal eenhede van die skuif by die x -waarde (bygetel/afgetrek).
 - By 'n translasië na **links** word die getal eenhede van die skuif by die x -waarde (bygetel/afgetrek).
 - By 'n translasië **opwaarts**, word die getal eenhede van die skuif by die y -waarde (bygetel/afgetrek).
 - By 'n translasië **afwaarts**, word die getal eenhede van die skuif by die y -waarde (bygetel/afgetrek).

2. Skryf die koördinate van elke beeld neer na die volgende translasië:

Punt	3 eenhede regs	4 eenhede links	2 eenhede opwaarts	5 eenhede afwaarts
(3; 5)				
(-13; 42)				
(-59; -95)				
(x ; y)				

3. Skryf die koördinate van elke beeld neer na die volgende translasies:

Punt	4 eenhede regs en 3 eenhede opwaarts	2 eenhede links en 1 eenheid op	1 eenheid regs en 5 eenhede afwaarts	6 eenhede links en 2 eenhede afwaarts
(4; 2)				
(-32; 21)				
(-68; -57)				
($x; y$)				

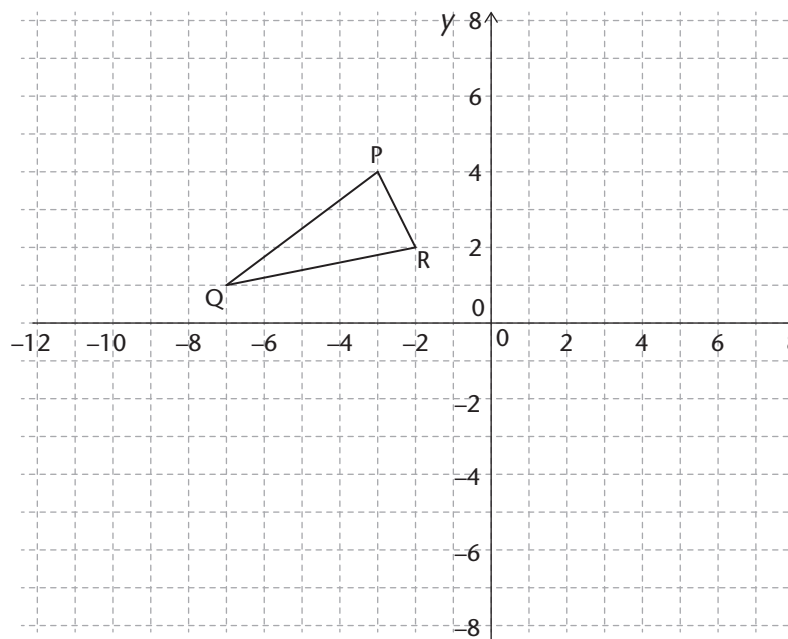
Jy kon die volgende uit die vorige aktiwiteit raakgesien het:

- Vir 'n horisontale translasië deur die afstand p , neem die x -koördinaat met die afstand p toe as die skuif na regs is, en neem met die afstand p af as die skuif na links is. Ons skryf $x' = x + p$, met $p > 0$ vir 'n skuif na regs en $p < 0$ vir 'n skuif na links. Die y -koördinaat bly dieselfde, so $(x; y) \rightarrow (x + p; y)$.
- Vir 'n vertikale translasië deur die afstand q , neem die y -koördinaat toe met die afstand q as die skuif opwaarts is, en neem af met die afstand q as die skuif afwaarts is. Ons skryf $y' = y + q$, met $q > 0$ vir 'n vertikaal opwaartse translasië en $q < 0$ vir 'n vertikaal afwaartse translasië. Die x -koördinaat bly dieselfde, so $(x; y) \rightarrow (x; y + q)$.

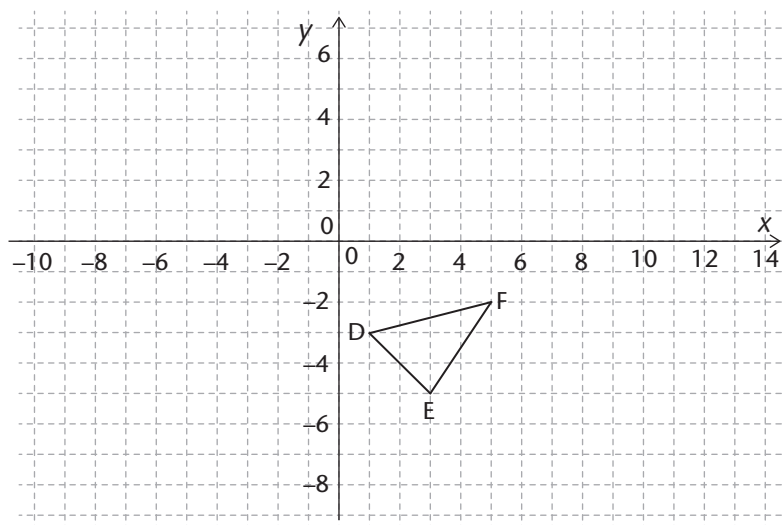
TRANSLASIE VAN MEETKUNDIGE FIGURE OP 'N KOÖRDINAATSTELSEL

- Skuif $\triangle PQR$ 5 eenhede na regs en 3 eenhede af.
- Skuif $\triangle PQR$ 2 eenhede na links en 3 eenhede op.
- Is al die driehoeke kongruent?

.....



2. (a) Skuif $\triangle DEF$ 4 eenhede links en 2 eenhede af.
- (b) Skuif $\triangle DEF$ 3 eenhede regs en 4 eenhede op.
- (c) Is al die driehoeke kongruent?



3. Die hoeke van 'n reghoek het die volgende koördinate: $K(-5; 2)$, $L(-4; -2)$, $M(1; -3)$ en $N(4; 3)$. Maak die volgende skuiwe en skryf die koördinate van die beeld van die vierhoek neer.

- (a) 7 eenhede regs en 2 eenhede opwaarts
.....
- (b) 5 eenhede regs en 2 eenhede afwaarts
.....
- (c) 4 eenhede regs en 3 eenhede afwaarts
.....
- (d) 2 eenhede links en 7 eenhede opwaarts
.....

4. Beskryf die translasies as die koördinate van die oorspronklike punt en die beeld die volgende is:

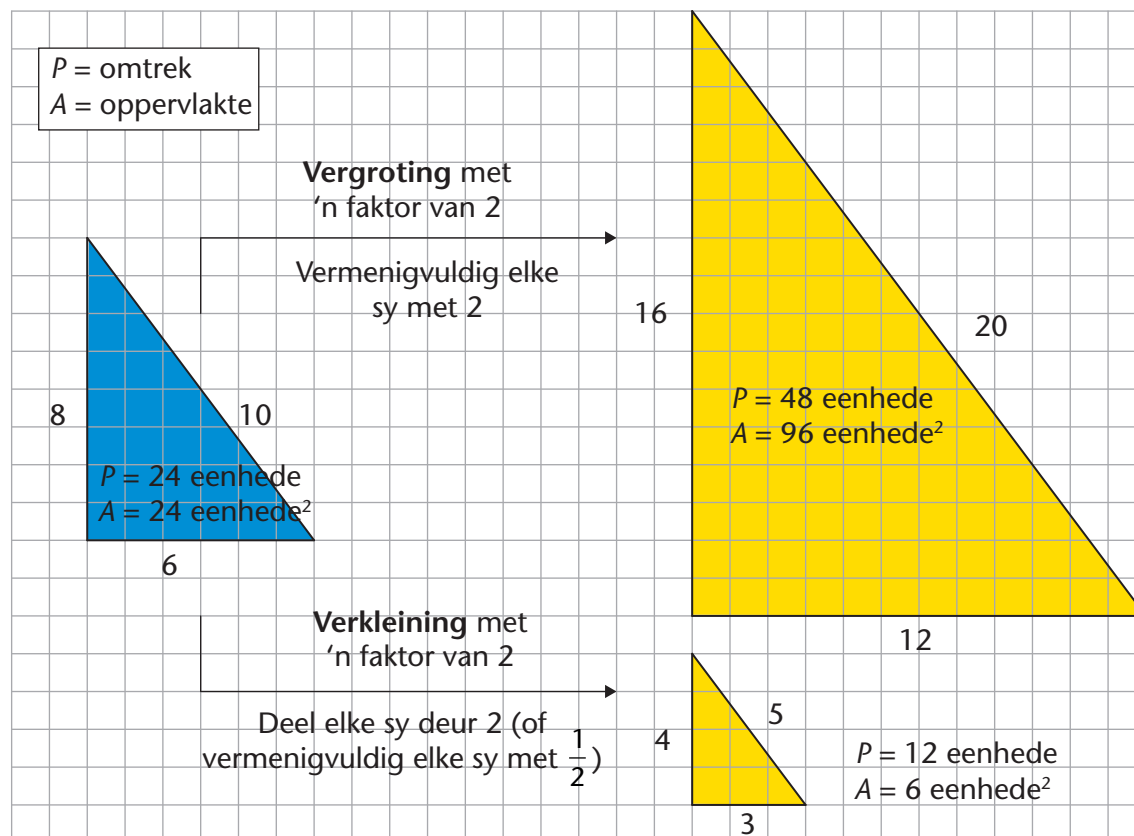
- (a) $(-2; -3) \rightarrow (-2; -5)$
- (b) $(4; -7) \rightarrow (-6; 0)$
- (c) $(3; 11) \rightarrow (16; 20)$
- (d) $(-1; -2) \rightarrow (5; -4)$
- (e) $(8; -11) \rightarrow (-2; -3)$

6.4 Vergroting (uitsetting) en verkleining (inkrimping)

WAT IS VERGROTINGS EN VERKLEININGS?

Jy sal die volgende uit die graad 8 werk onthou.

- 'n Beeld is 'n vergroting of 'n verkleining van die oorspronklike figuur slegs as al die ooreenstemmende sye tussen die twee figure **eweredig** is. Dit beteken dat *al die sye* van die oorspronklike figuur deur dieselfde getal (die **skaalfaktor**) vermenigvuldig is om die beeld te skep.
- Skaalfaktor = $\frac{\text{sylengte van beeld}}{\text{lengte van ooreenstemmende sy van oorspronklike figuur}}$
 - As die skaalfaktor > 1 , is die beeld 'n vergroting.
 - As die skaalfaktor < 1 , is die beeld 'n verkleining.
- Die oorspronklike figuur en sy vergrote en verkleinde beeld is **gelykvormig**.
- Omtrek van beeld = Omtrek van oorspronklike figuur $\times$ skaalfaktor
- Oppervlakte van beeld = Oppervlakte van oorspronklike figuur $\times$ (skaalfaktor)²



Partykeer is die terminologie wat vir vergrotings en verkleinings gebruik word, verwarrend. Maak seker dat jy die volgende voorbeelde verstaan. Raadpleeg die diagram op die vorige bladsy:

“**Vergroot** ’n figuur met ’n skaalfaktor van 2” beteken:

- $\frac{\text{sy lengte van beeld}}{\text{lengte van ooreenstemmende sy van oorspronklike figuur}} = 2$
- Elke sy van die oorspronklike figuur moet met 2 *vermenigvuldig* word.
- Elke sy van die beeld sal 2 keer *langer* as die ooreenstemmende sy van die oorspronklike figuur wees.
- Die omtrek van die beeld sal 2 keer *langer* as die omtrek van die oorspronklike figuur wees.
- Die oppervlakte van die beeld sal 2^2 keer ($2 \times 2 = 4$ keer) *groter* as die oppervlakte van die oorspronklike figuur wees.

“**Verklein** ’n figuur met ’n skaalfaktor van of 2” beteken:

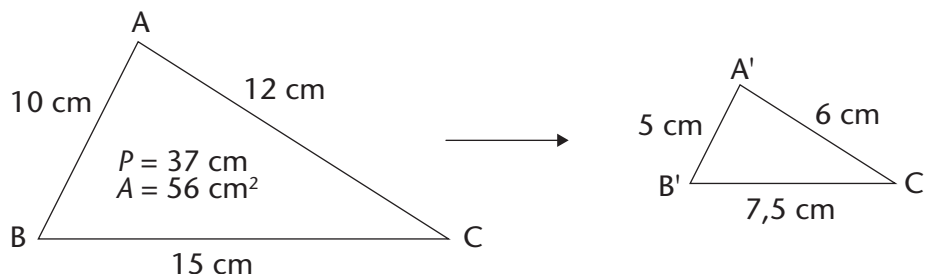
- $\frac{\text{sy lengte van beeld}}{\text{lengte van ooreenstemmende sy van oorspronklike figuur}} = 0,5$
- Elke sy van die oorspronklike figuur moet *vermenigvuldig* word met $\frac{1}{2}$ (of *gedeel* word deur 2).
- Elke sy van die beeld sal 2 keer *korter* as sy ooreenstemmende sy in die oorspronklike figuur wees.
- Die omtrek van die beeld sal 2 keer *korter* as die omtrek van die oorspronklike figuur wees.
- Die oppervlakte van die beeld sal 2^2 keer ($2 \times 2 = 4$ keer) *kleiner* as die oppervlakte van die oorspronklike figuur wees. (Of oppervlakte van beeld = $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ van die oppervlakte van die oorspronklike figuur.)

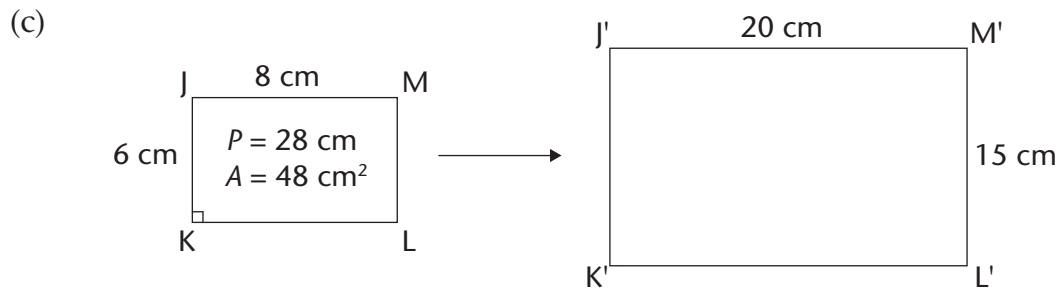
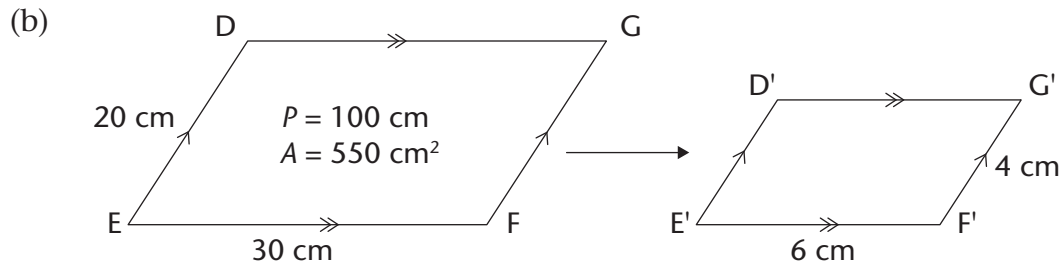
Let op dat die $\frac{1}{2}$ die vermenigvuldigings-inverse van 2 is.

OEFEEN OM MET VERGROTINGS EN VERKLEININGS TE WERK

1. Bereken die skaalfaktor van elke oorspronklike figuur en sy beeld.

(a)





2. Vir elke stel figure in vraag 1, skryf neer hoeveel keer die *omtrek* van elke beeld groter of kleiner as die omtrek van die oorspronklike figuur is. Skryf ook die omtrek van elke beeld neer.

- (a)
- (b)
- (c)

3. Vir elke stel figure in vraag 1, skryf neer hoeveel keer die *oppervlakte* van elke beeld groter of kleiner as die oppervlakte van die oorspronklike figuur is. Skryf ook die oppervlakte van elke beeld neer.

- (a)
- (b)
- (c)

4. Die omtrek van reghoek DEFG = 20 cm. Wat is die omtrek van die reghoek D'E'F'G' as die skaalfaktor 3 is?

5. Die omtrek van vierhoek PQRS = 30 cm en die oppervlakte is 50 cm^2 .

- (a) Bepaal die omtrek van vierhoek P'Q'R'S' as die skaalfaktor $\frac{1}{5}$ is.
- (b) Bepaal die oppervlakte van vierhoek P'Q'R'S' as die skaalfaktor $\frac{1}{5}$ is.

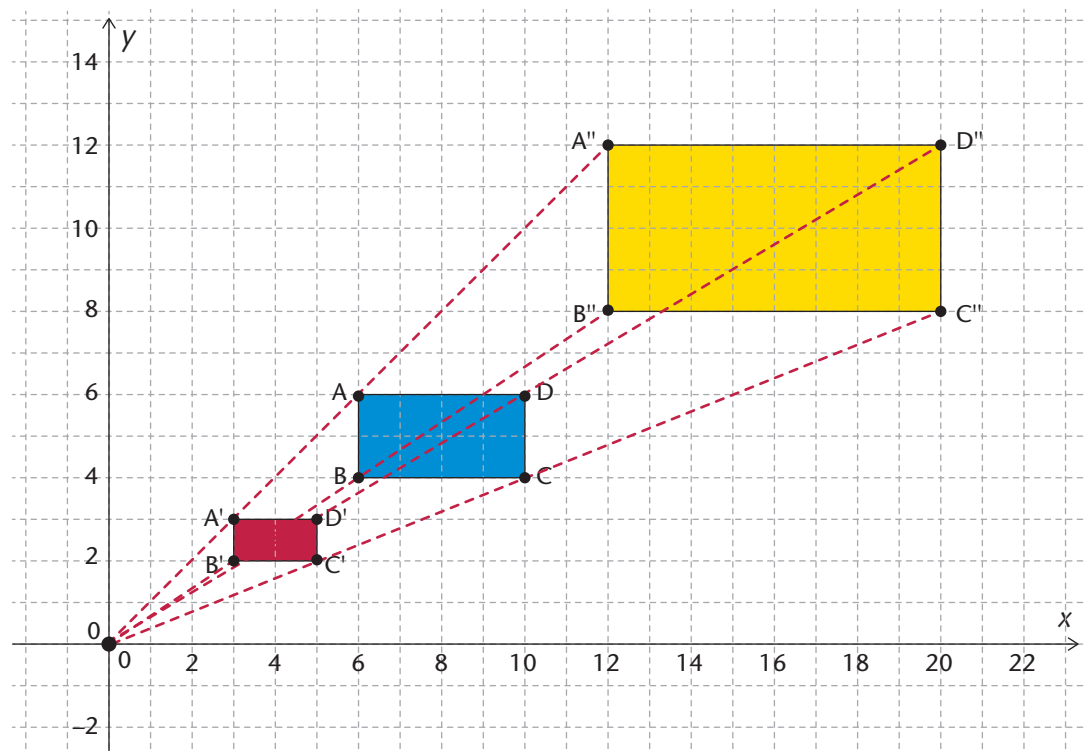
6. Die omtrek van $\triangle DEF = 17 \text{ cm}$ en $\triangle D'E'F' = 25,5 \text{ cm}$.
 (a) Wat is die skaalfaktor van die vergroting?
 (b) Wat is die oppervlakte van $\triangle D'E'F'$ as die oppervlakte van $\triangle DEF = 14 \text{ cm}^2$?
7. Die oppervlakte van $\triangle ABC = 20 \text{ cm}^2$ en dié van $\triangle A'B'C' = 5 \text{ cm}^2$.
 (a) Wat is die skaalfaktor van die verkleining?
 (b) Wat is die omtrek van die beeld as die omtrek van $\triangle ABC = 22 \text{ cm}$?

ONDERSOEK VERGROTINGS EN VERKLEININGS OP 'N KOÖRDINAATSTELSEL

As ons vergrotings en verkleinings op 'n koördinaatstelsel doen, gebruik ons een punt van waar ons die vergroting of verkleining doen. Hierdie punt word die **senter (oorsprong) van vergroting of verkleining** genoem.

Die senter van vergroting of verkleining kan enige punt op die koördinaatstelsel wees. In hierdie graad gaan ons die **oorsprong** as die senter van vergroting of verkleining gebruik.

Reghoek ABCD, reghoek A'B'C'D' en reghoek A''B''C''D'' is op 'n koördinaatstelsel soos hier onder aangedui, geteken.



1. (a) Is reghoek A''B''C''D'' 'n vergroting van reghoek ABCD? Verduidelik jou antwoord.

.....

(b) Is reghoek A'B'C'D' 'n verkleining van reghoek ABCD? Verduidelik jou antwoord.

.....

2. (a) Die oorsprong is die senter van vergroting en verkleining. Teken vier lynstukke om A'', B'', C'' en D'' met die oorsprong te verbind.

(b) Wat merk jy op van hierdie lynstukke?

.....

.....

3. (a) Voltooi die tabel deur 'n lys van die koördinate van die beelde op te stel.

Hoekpunte van ABCD	Hoekpunte van A'B'C'D'	Hoekpunte van A''B''C''D''
A(6; 6)		
B(6; 4)		
C(10; 4)		
D(10; 6)		

(b) Wat merk jy op van die koördinate van die oorspronklike reghoek se hoekpunte en die koördinate van die beelde se hoekpunte?

.....

.....

Die volgende behoort uit die vorige aktiwiteit duidelik te wees:

Die lyn wat die senter van vergroting of verkleining op 'n koördinaatstelsel met die hoekpunte van die oorspronklike figuur verbind, gaan ook deur die ooreenstemmende hoekpunte van die vergrote of verkleinde beeld.

Die koördinate van 'n hoekpunt van die vergrote of verkleinde beeld is gelyk aan die skaalfaktor $\times$ die koördinate van die ooreenstemmende hoekpunt van die oorspronklike figuur.

Byvoorbeeld:

$B(6; 4) \rightarrow B'(3; 2)$: Die koördinate van B' is $\frac{1}{2}$ keer die koördinate van B . Let daarop dat die skaalfaktor $\frac{1}{2}$ is.

$B(6; 4) \rightarrow B''(12; 8)$: Die koördinate van B'' is 2 keer die koördinate van B . Let daarop dat die skaalfaktor 2 is.

Oor die algemeen gebruik ons dus die volgende notasie om die vergroting en verkleining met betrekking tot die oorsprong te beskryf:

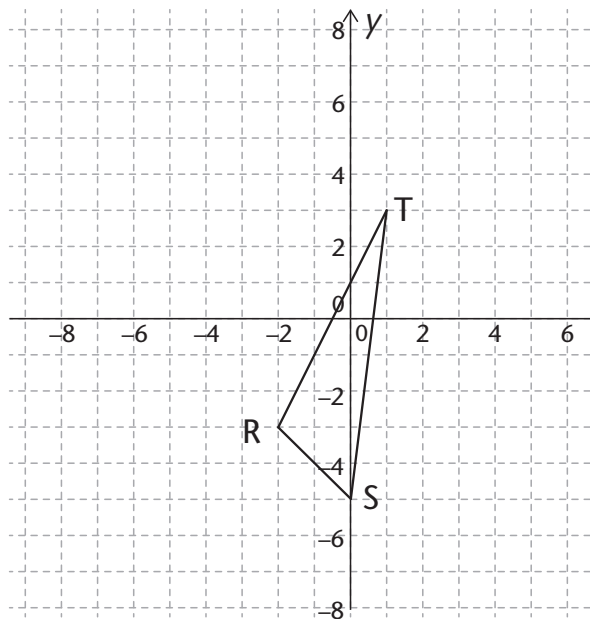
$(x; y) \rightarrow (kx; ky)$ of $(x'; y') = (kx; ky)$ waar k die skaalfaktor is.

As $0 < k < 1$, is die beeld 'n verkleining

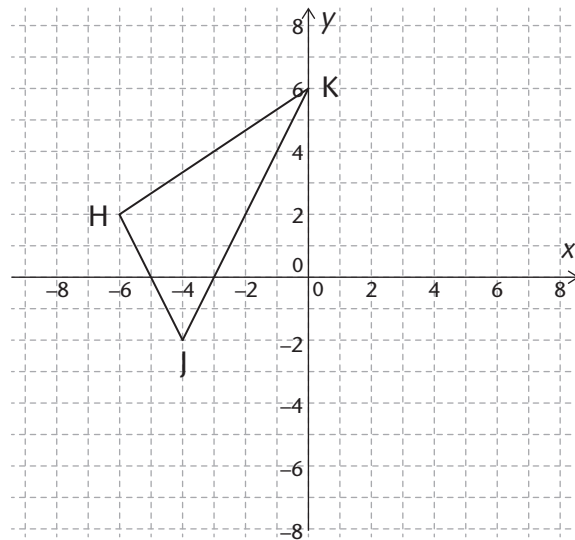
As $k > 1$, is die beeld 'n vergroting.

OEFEN

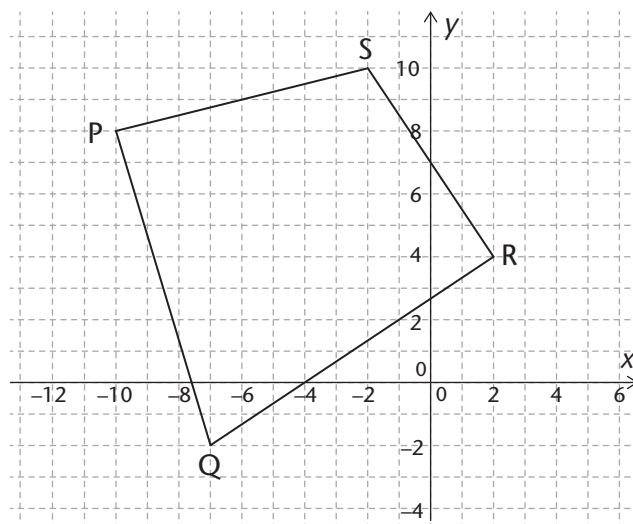
1. Teken die vergrote of verkleinde beelde van die volgende figure volgens die gegewe skaalfaktor. Gebruik telkens die **oorsprong** as die senter van vergroting of verkleining.
 - (a) Skaalfaktor = 2



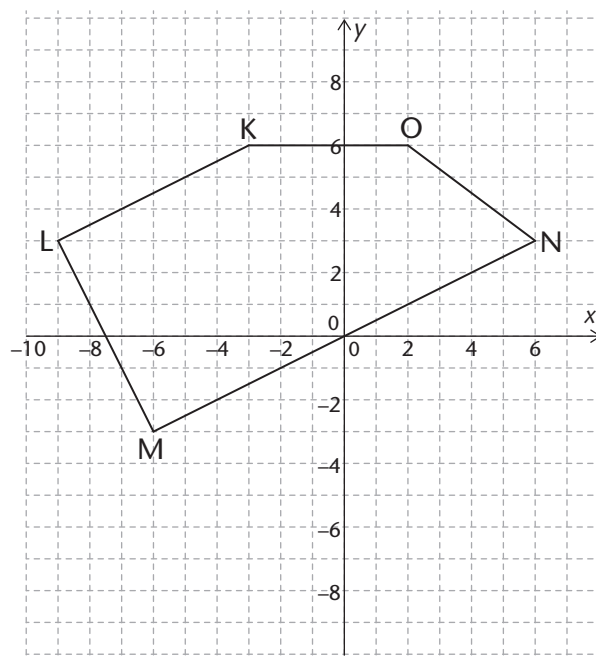
(b) Skaalfaktor = $\frac{1}{2}$



(c) Skaalfaktor = $\frac{1}{2}$



(d) Skaalfaktor = $\frac{1}{3}$



2. 'n Vierhoek het die volgende hoekpunte: A(-2; 4), B(-4; -2), C(4; -3) en D(2; 1). Bepaal die koördinate van die vergrote beeld as die skaalfaktor = 2.

.....

3. 'n Vierhoek het die volgende hoekpunte: P(-4; 0), Q(2,5; 4,5), R(6; -2,25) en S(2; -4). Bepaal die koördinate van die vergrote beeld as die skaalfaktor = 4.

.....

4. 'n Vierhoek het die volgende hoekpunte: D(6; -4), E(4; -6), F(-4; 2) en G(-2; -2). Bepaal die koördinate van die verkleinde beeld as die skaalfaktor = $\frac{1}{2}$.

.....

5. 'n Vierhoek het die volgende hoekpunte: K(8; -2), L(4; -6), M(-8; -4) en N(-6; 10). Bepaal die koördinate van die verkleinde beeld as die skaalfaktor = $\frac{1}{4}$.

.....

6. Beskryf die volgende transformasies:

(a) $A(7; -5) \rightarrow A'(9; 0)$

.....

(b) $A(-4; 6) \rightarrow A'(4; 6)$

.....

(c) $A(-3; -2) \rightarrow A'(-2; -3)$

.....

(d) $A(8; 1) \rightarrow A'(8; -1)$

.....

(e) $A(4; -2) \rightarrow A'(8; -4)$

.....

(f) $A(12; -16) \rightarrow A'(3; -4)$

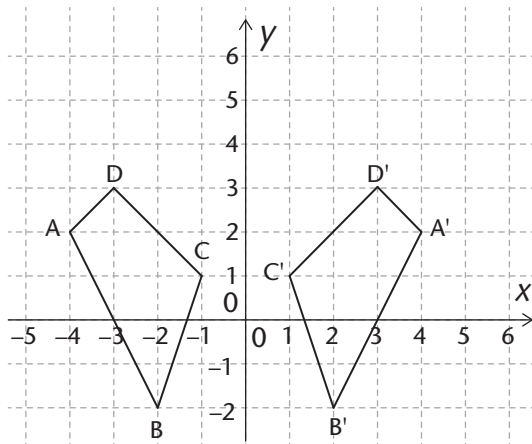
.....

(g) $A(2; -1) \rightarrow A'(-3; -5)$

.....

7. Beskryf elk van die volgende transformasies.

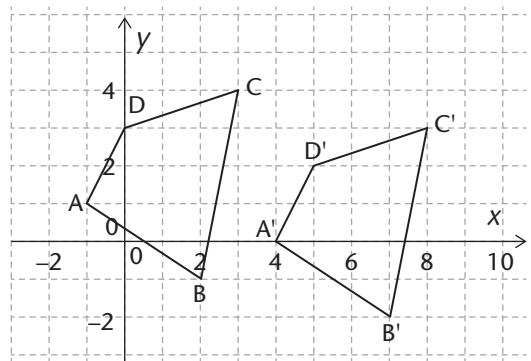
(a)



.....

.....

(b)



.....

.....

HOOFSTUK 7

Meetkunde van 3D-voorwerpe

In hierdie hoofstuk gaan jy die eienskappe van prisma's en piramides, wat jy in die vorige grade ondersoek het, hersien. Dit sluit die gebruik van nete in om modelle van hierdie voorwerpe te konstrueer as 'n verdere manier om jou begrip van poliëders vas te lê. Jy sal ook die eienskappe en definisies van die vyf Platoniese vaste liggame, asook die beskrywing van die getal hoekpunte, vlakke en rande van poliëders volgens Euler se formule hersien.

Jy sal vir die eerste keer die eienskappe van silinders en sferes ondersoek. Alhoewel jy teen hierdie tyd hierdie 3D-voorwerpe gehoor te herken, sal jy van hulle eienskappe in meer besonderhede ondersoek, en leer hoe om 'n net en 'n model van 'n silinder te konstrueer.

7.1	Klassifiseer 3D-voorwerpe.....	111
7.2	Nette en modelle van prisma's en piramides	113
7.3	Platoniese vaste liggame	115
7.4	Euler se formule	119
7.5	Silinders	121
7.6	Sfere	124

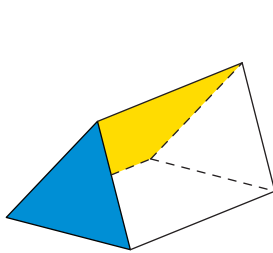


7 Wiskunde van 3D-voorwerpe

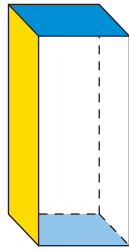
7.1 Klassifiseer 3D-voorwerpe

Jy het reeds geleer dat (3D) voorwerpe in verskillende groepe groepeer kan word 3D-voorwerpe waarvan die vlakke deur veelhoeke gevorm is, word **poliëders genoem**. Prisma's en piramides is voorbeelde van poliëders.

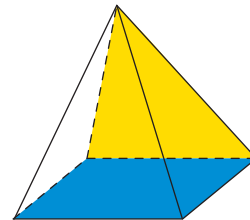
'n Poliëder is 'n 3D-voorwerp wat net uit plat vlakke bestaan.



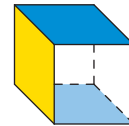
Driehoekige prisma



Reghoekige prisma

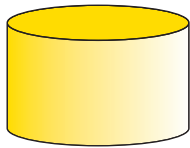


Reghoekige piramide

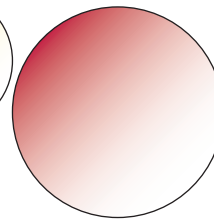
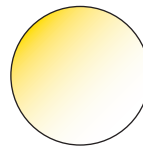
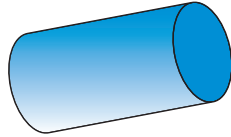


Kubus

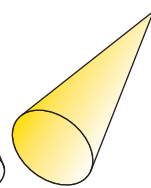
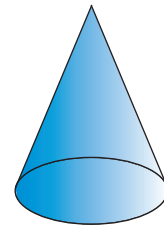
Voorbeelde van 3D-voorwerpe wat ten minste een geboë vlak het, is silinders, sferes en kegels.



Silinders

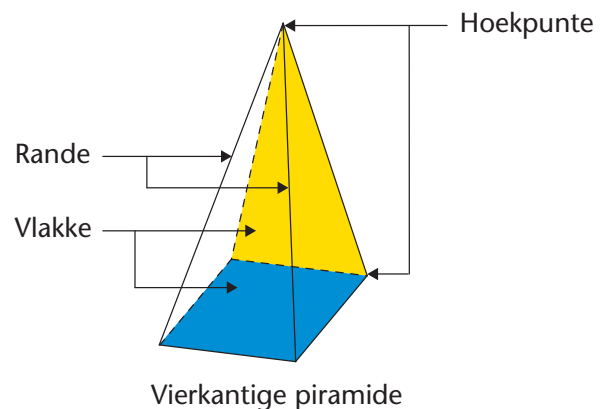


Sfere



Kegels

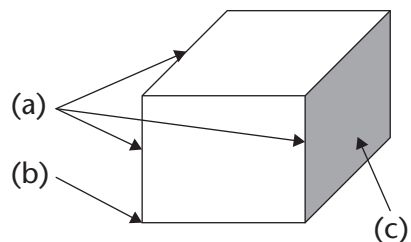
As ons die eienskappe van 'n 3D-voorwerp bestudeer, ondersoek ons die vorms van die vlakke, die getal vlakke, die getal hoekpunte en die getal rande. By voorbeeld, die piramide hier langs het 1 vierkantige vlak en 4 driehoekige vlakke, 5 hoekpunte en 8 rande.



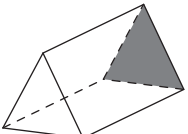
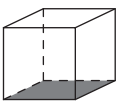
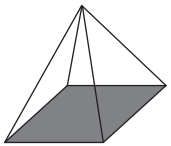
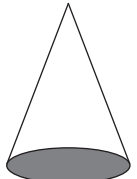
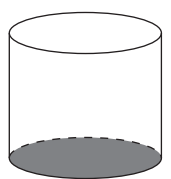
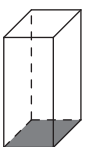
KLASSIFISEER EN BESKRYF 3D-VOORWERPE

1. Benoem (a) tot (c) op die prisma.

- (a)
- (b)
- (c)



2. Voltooi die tabel.

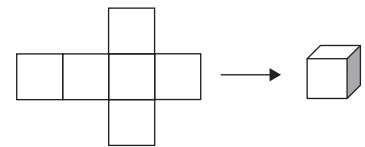
	3D-voorwerp	Naam van die voorwerp	Getal vlakke en vorm van vlakke	Getal hoekpunte
(a)				6
(b)				
(c)				8
(d)				5
(e)				
(f)				
(g)				

3. Sê of die stellings hier onder waar of onwaar is.

- (a) 'n Silinder is 'n poliëder.
- (b) 'n Driehoekige piramide het 4 driehoekige vlakke.
- (c) 'n Kubus is ook 'n hekshaëder.
- (d) 'n Driehoekige piramide het 6 hoekpunte.
- (e) 'n Piramide is 'n 3D-voorwerp.

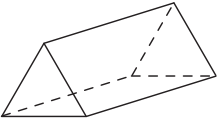
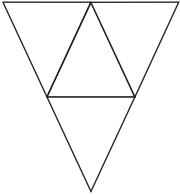
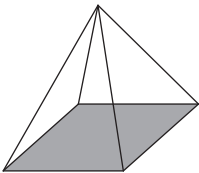
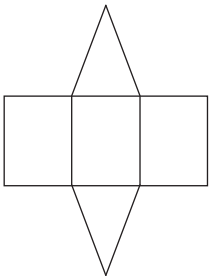
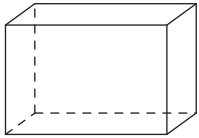
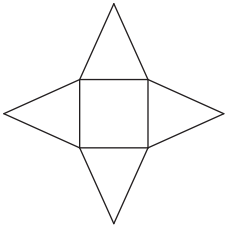
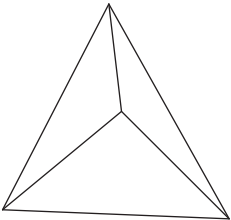
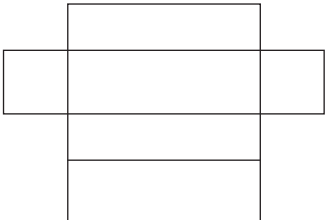
7.2 Nette en modelle van prisma's en piramides

'n Net (ontvouting) is 'n plat patroon wat gebruik kan word om 'n 3D-voorwerp voor te stel. Die net kan gevou word om 'n model van die 3D-voorwerp te maak.



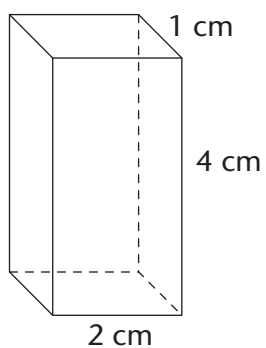
Net van 'n kubus

1. Benoem elke voorwerp hier onder en pas dit by sy ooreenstemmende net.

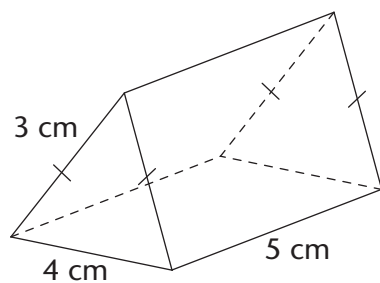
(a)			
(b)			
(c)			
(d)			

2. Konstrueer akkurate nette vir elkeen van die volgende 3D-voorwerpe.

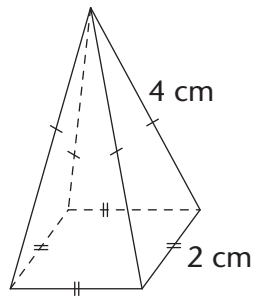
(a)



(b)



(c)



3. Konstrueer modelle van die voorwerpe in vraag 2, maar verdubbel al die afmetings.

7.3 Platoniese vaste liggame

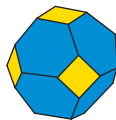
'n **Platoniese vaste liggaam** is 'n 3D-voorwerp met identiese vlakke, en al die vlakke is identiese reëlmatige veelhoeke. Dit beteken dat al die vlakke dieselfde vorm en grootte het. Boonop is al die hoekpunte identies.

1. Watter van die volgende voorwerpe is Platoniese vaste liggame?

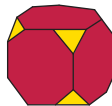
A.



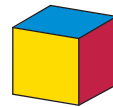
B.



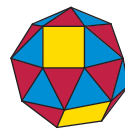
C.



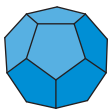
D.



E.



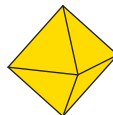
F.



G.



H.



I.



J.



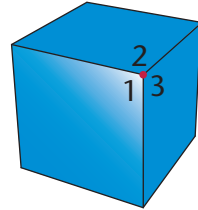
.....

2. Hoeveel Platoniese vaste liggame is daar in vraag 1?

SLEGS VYF PLATONIESE VASTE LIGGAME?

Jy kan jou kennis oor hoeke gebruik om te bewys dat die vyf Platoniese vaste liggame die enigste 3D-voorwerpe is wat van identiese reëlmatige veelhoeke gemaak kan word. Hou die volgende feite in gedagte:

- 'n 3D-voorwerp het *ten minste* drie vlakke wat by elke hoekpunt ontmoet.
- Die som van die hoeke wat by 'n hoekpunt ontmoet moet minder as 360° wees. As dit gelyk is aan 360° , sal dit 'n plat vlak vorm. As dit groter is as 360° , sal die vlakke oorvleuel.
- 'n Platoniese vaste liggaam bestaan uit slegs een tipe reëlmatige veelhoek.



Watter 3D-voorwerpe kan jy van gelyksydige driehoeke maak?

Ons redeneer so:

Grootte van elke binnehoek = $180^\circ \div 3 = 60^\circ$

$\therefore$ 3 driehoeke = $3 \times 60^\circ = 180^\circ$ [$< 360^\circ$]

4 driehoeke = $4 \times 60^\circ = 240^\circ$ [$< 360^\circ$]

5 driehoeke = $5 \times 60^\circ = 300^\circ$ [$< 360^\circ$]

6 driehoeke = $6 \times 60^\circ = 360^\circ$

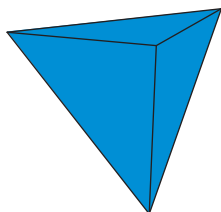
Meer as 5 driehoeke sal gelyk wees aan of groter as 360° en sal 'n plat vlak vorm of oorvleuel.

Dit beteken dat ons drie 3D-voorwerpe van gelyksydige driehoeke kan maak:

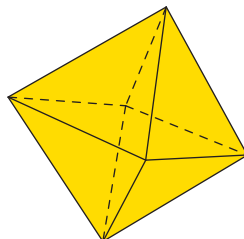
As daar 3 driehoeke by elke hoekpunt is, sal dit 'n **tetraëder vorm**.

As daar 4 driehoeke by elke hoekpunt is, sal dit 'n **oktaëder vorm**.

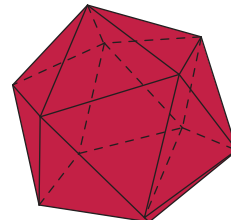
As daar 5 driehoeke by elke hoekpunt is, sal dit 'n **ikosaëder vorm**.



Tetraëder



Oktaëder



Ikosaëder

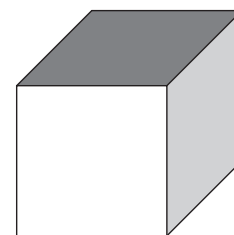
Watter 3D-voorwerpe kan jy van vierkante maak?

Voltooi die stellings: grootte van elke binnehoek

$\therefore$ 3 vierkante = $3 \times$

4 vierkante = $4 \times$

Ons kan dus slegs een 3D-voorwerp van vierkante maak. Hierdie 3D-voorwerp word 'n **heksaëder (of kubus) genoem**.



Heksaëder (kubus)

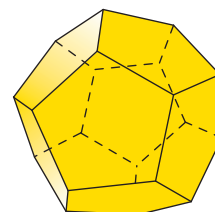
Watter 3D-voorwerpe kan jy van reëlmatige vyfhoëke maak?

Voltooi die stellings:

Grootte van elke binnehoek

$\therefore$ 3 vyfhoëke =

4 vyfhoëke =



Dodekaëder

Ons kan dus slegs een 3D-voorwerp van reëlmatige vyfhoëke maak. Hierdie 3D-voorwerp word 'n **dodekaëder of twaalfvlak genoem**.

Watter 3D-voorwerpe kan jy van reëlmatige seshoëke maak?

Voltooi die stellings:

Grootte van elke binnehoek

$\therefore$ 3 seshoëke =

Drie seshoëke sal reeds 'n plat vlak vorm. Daarom is dit onmoontlik om 'n 3D-voorwerp van reëlmatige seshoëke te maak.

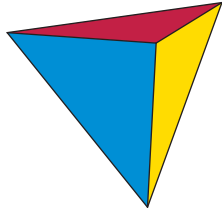
Daarby is die binnehoëke van veelhoëke met meer as 6 sye groter as die van 'n seshoek. Dit is dus nie moontlik om 3D-voorwerpe van enige ander reëlmatige veelhoëke te maak nie.

Die vyf Platoniese vaste liggame (tetraëder, oktaëder, ikosaëder, heksaëder (kubus) en dodekaëder is dus die enigste vaste liggame wat uit identiese reëlmatige veelhoëke gevorm kan word. Elkeen van hierdie vaste liggame is genoem na die getal vlakke waaruit dit bestaan.

EIENSKAPPE VAN DIE PLATONIESE VASTE LIGGAME

Voltooi die inligting oor elk van die volgende Platoniese vaste liggame.

1.



Naam:

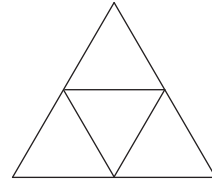
.....

Vorm van vlakke:

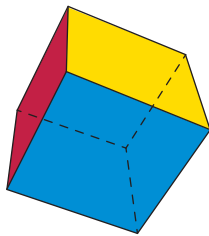
Getal vlakke:

Getal rande:

Getal hoekpunte:



2.



Naam:

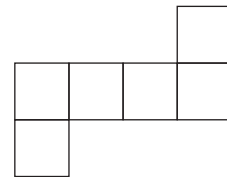
.....

Vorm van vlakke:

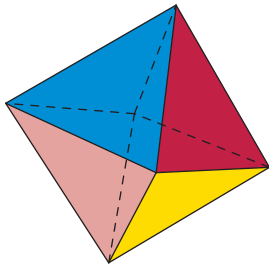
Getal vlakke:

Getal rande:

Getal hoekpunte:



3.



Naam:

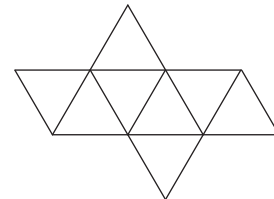
.....

Vorm van vlakke:

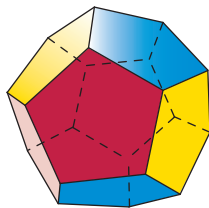
Getal vlakke:

Getal rande:

Getal hoekpunte:



4.



Naam:

.....

Vorm van vlakke:

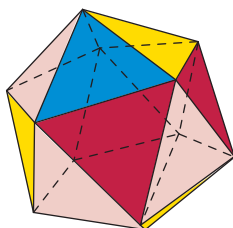
Getal vlakke:

Getal rande:

Getal hoekpunte:



5.



Naam:

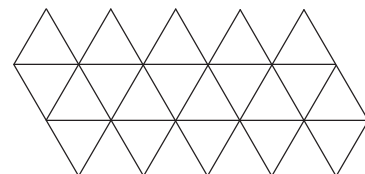
.....

Vorm van vlakke:

Getal vlakke:

Getal rande:

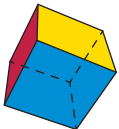
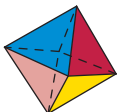
Getal hoekpunte:



7.4 Euler se formule

EULER SE FORMULE EN PLATONIESE VASTE LIGGAME

1. Jy het in Graad 8 van Euler se formule geleer. Voltooi die volgende tabel om te ondersoek of Euler se formule op Platoniese vaste liggame van toepassing is.

	Naam	Vorm van vlakke	Getal vlakke (V)	Getal hoekpunte (H)	Getal rande (R)	$V + H - R$
						
						
						
						
						

2. Voltooi Euler se formule vir poliëders:

$H + \dots$

3. Pas Euler se formule toe by elk van die volgende:

(a) 'n Poliëder het 25 vlakke en 13 hoekpunte. Hoeveel rande sal dit hê?

.....

(b) 'n Poliëder het 11 hoekpunte en 23 rande. Hoeveel vlakke sal dit hê?

.....

(c) 'n Poliëder het 8 vlakke en 12 rande. Hoeveel hoekpunte sal dit hê?

.....

EULER SE FORMULE EN ANDER POLIËDERS

1. Is elk van die volgende stellings waar of onwaar?

- (a) 'n Poliëder met 10 hoekpunte en 15 rande moet 7 vlakke hê.
- (b) 'n Poliëder sal altyd meer rande as vlakke of hoekpunte hê.
- (c) 'n Poliëder met 5 vlakke moet 6 rande hê.
- (d) 'n Piramide sal altyd dieselfde getal vlakke en hoekpunte hê.

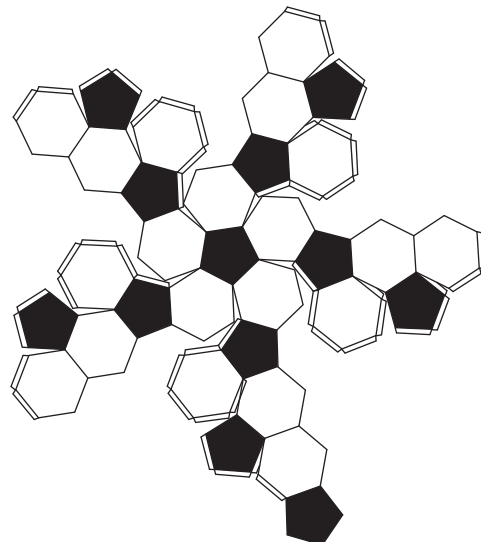
2. Voltooi die volgende tabel.

	Getal vlakke (V)	Getal hoekpunte (H)	Getal rande (R)	Naam van poliëder	Vorm van vlakke
(a)	6		12		
(b)		7			
(c)	4	4			
(d)	5	6	9		

3. 'n Sokkerbal bestaan uit vyfhoeke en seshoeke.

- (a) Uit hoeveel vyfhoeke bestaan dit?
- (b) Uit hoeveel seshoeke bestaan dit?
- (c) Hoeveel rande het dit?
- (d) Hoeveel hoekpunte het dit?
- (e) Is Euler se formule ook op sokkerballe van toepassing?

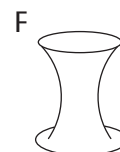
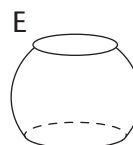
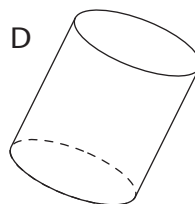
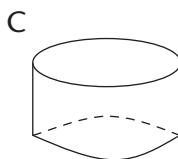
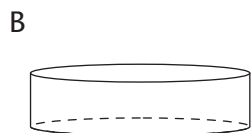
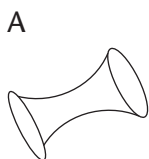
.....



7.5 Silinders

EIENSKAPPE VAN SILINDERS

1. Watter van die volgende 3D-voorwerpe is silinders?



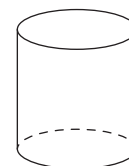
2. Merk die stelling of stellings wat slegs waar is vir silinders en nie vir die ander voorwerpe in vraag 1 nie:

- ☐ Dit is 'n 3D-voorwerp.
- ☐ Dit het 'n geboë vlak.
- ☐ Dit het twee sirkelvormige basisse wat ewewydig aan mekaar lê.
- ☐ Dit het twee plat sirkelvormige basisse en het 'n geboë vlak.
- ☐ Die radius van die geboë vlak is dieselfde van bo tot onder tussen die basisse.
- ☐ Dit het twee sirkelvormige basisse teenoor mekaar, verbind deur 'n geboë vlak waarvan die radius dieselfde bly van bo tot onder.



3. Kyk na die silinder hier langsaan en voltooi die volgende:

- (a) Getal en vorm van vlakke:
- (b) Getal hoekpunte:
- (c) Getal rande:



NETTE VAN SILINDERS

Jy het in hoofstuk 5 van die net van 'n silinder geleer. As jy die geboë vlak van 'n silinder vertikaal sny en dit plat maak, sal dit die vorm van 'n reghoek hê.



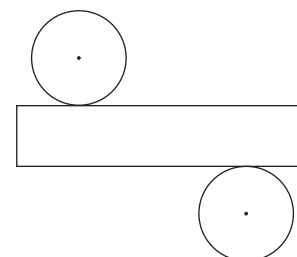
1. Verduidelik hoekom die lengte van die reghoekige vlak gelyk is aan die omtrek van die basis.

.....

.....

.....

.....



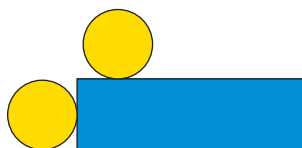
2. Watter van die volgende kan nete van 'n silinder wees?

A.



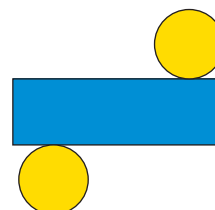
.....

B.



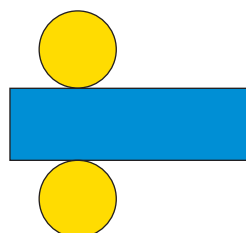
.....

C.



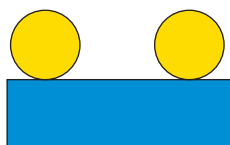
.....

D.



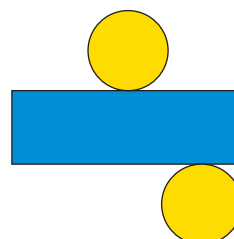
.....

E.



.....

F.



.....

3. Gebruik $\pi = \frac{22}{7}$ in elk van die volgende vrae en rond jou antwoord af tot twee desimale plekke om die bewerking te doen.

(a) As die radius van 'n silinder 3 cm is, wat is die lengte van een van die sye van die reghoekige vlak van die silinder?

.....

(b) As die radius van 'n silinder 5 cm is, wat is die lengte van een van die sye van die reghoekige vlak van die silinder?

.....

(c) As die middellyn van 'n silinder 8 cm is, wat is die lengte van een van die sye van die reghoekige vlak van die silinder?

.....

(d) As die middellyn van 'n silinder 9 cm is, wat is die lengte van een van die sye van die reghoekige vlak van die silinder?

.....

4. Gebruik 'n liniaal en 'n passer om die volgende nette so akkuraat as moontlik te konstrueer. Toon die afmetings op elke net aan.

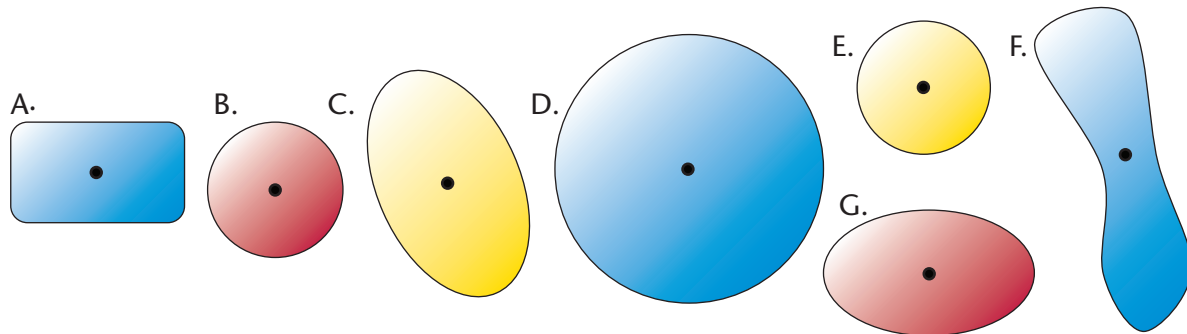
(a) Net van 'n silinder met 'n radius van 1 cm en 'n hoogte van 4 cm.

(b) Net van 'n silinder met 'n radius van 1,5 cm en 'n hoogte van 3 cm.

5. Konstrueer modelle van die silinders in vraag 5, maar verdubbel die afmetings.

7.6 Sfeer

1. Watter van die volgende 3D-voorwerpe is sfere?



.....

2. Merk die eienskap of eienskappe wat *slegs* vir sfere waar is en nie vir die ander voorwerpe wat in vraag 1 voorkom nie.

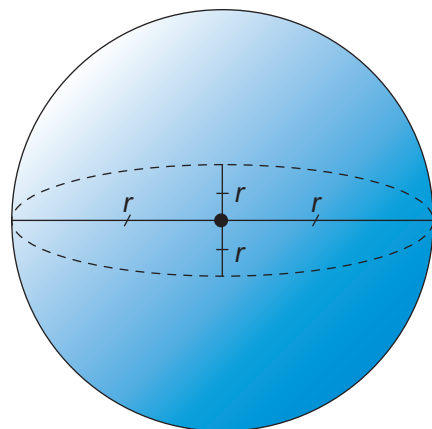
- ☐ Dit is 'n 3D-voorwerp.
- ☐ Dit het 'n geboë vlak.
- ☐ Dit het geen basisse nie.
- ☐ Dit het geen hoekpunte nie.
- ☐ Dit het geen rande nie.
- ☐ Die afstand vanaf sy middelpunt tot by enige punt op sy oppervlak is altyd gelyk.

3. Voltooi die volgende inligting in verband met 'n sfeer:

- (a) Getal en vorm van vlakke:
- (b) Getal hoekpunte:
- (c) Getal rande:

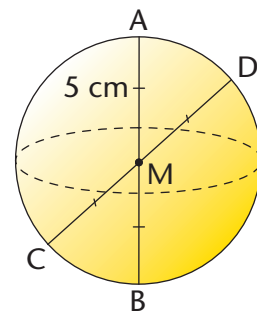
Uit jou ondersoek van sfere in die aktiwiteit hier bo, behoort jy die volgende te kon wys word:

'n **Sfeer** is 'n ronde 3D-voorwerp met slegs een geboë vlak en die afstand vanaf sy middelpunt tot by enige punt op sy oppervlak is altyd dieselfde. Dit het geen hoekpunte of rande nie.



4. Beantwoord die vrae oor die lengtes van die sfeer hier langsaan:

- (a) die radius:
- (b) die middellyn:
- (c) MD:
- (d) CD:



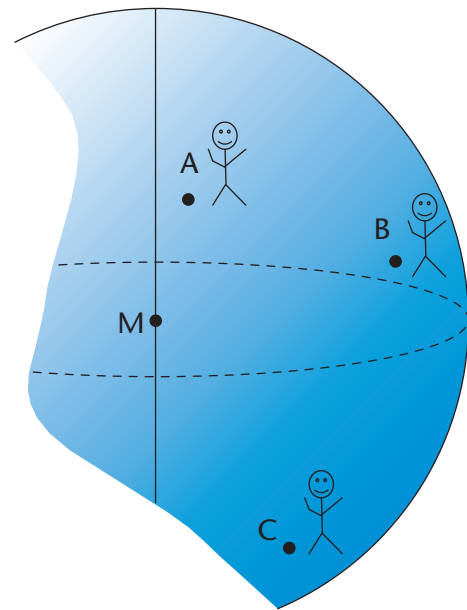
5. Die skets hier langsaan wys 'n gedeelte van 'n sfeer met 'n middellyn van 100 km. Veronderstel dat jy by punt M is, in die middelpunt binne in die sfeer. Die mense A, B en C is almal op verskillende plekke op die oppervlak van die sfeer.

(a) Wie van die mense A, B of C is naaste aan jou?

.....

(b) Hoe ver is C van jou af?

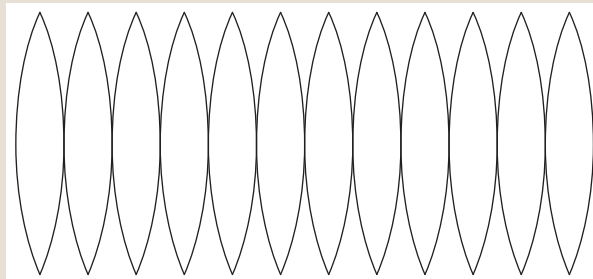
.....



NET VAN 'N SFEER

Dit is onmoontlik om 'n perfekte sfeer (bal) uit 'n plat vel papier te maak. Papier kan 'n kurwe in een rigting maak, maar dit kan nie 'n kurwe in twee rigtings gelyktydig maak nie. Dus sal alle sfere wat van papier of karton gemaak is benaderings wees. Hierdie is die beste net wat ons van 'n sfeer kan maak.

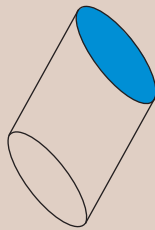
Kan jy jou eie papiermodel van 'n sfeer maak?



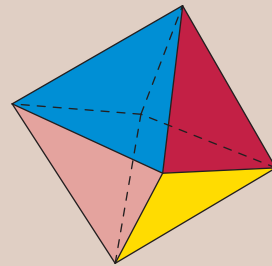
WERKBLAD

1. Graad 9 leerders moet elkeen 'n 3D-voorwerp voorstel en aan die klas leidrade gee oor die poliëder wat hulle voorstel. Benoem hulle voorwerpe:
 - (a) Amy: Ek het 6 vlakke en hulle het almal dieselfde grootte.
 - (b) John: Ek het 6 vlakke en 12 rande. Ek is nie 'n kubus nie.
 - (c) Onke: Ek het 3 vlakke. Ek het ook twee rande.
 - (d) Tessa: Ek het 8 rande en 5 hoekpunte.
 - (e) Mandlakazi: Ek het 6 rande en 4 hoekpunte
 - (f) Chiquita: Ek het 8 vlakke en ek is 'n Platoniese vaste liggaam.
 - (g) Seni: Ek het geen rande nie.
 - (h) Mpu: My vlakke bestaan slegs uit reëlmatige vyfhoëke.
2. Skryf die gevraagde inligting oor elk van die onderwerpe hier onder neer.

A.



B.



	Voorwerp A	Voorwerp B
Naam		
Getal vlakke		
Vorm/s van vlakke		
Getal rande		
Getal hoekpunte		
Werk Euler se formule?		
Is dit 'n Platoniese soliede?		

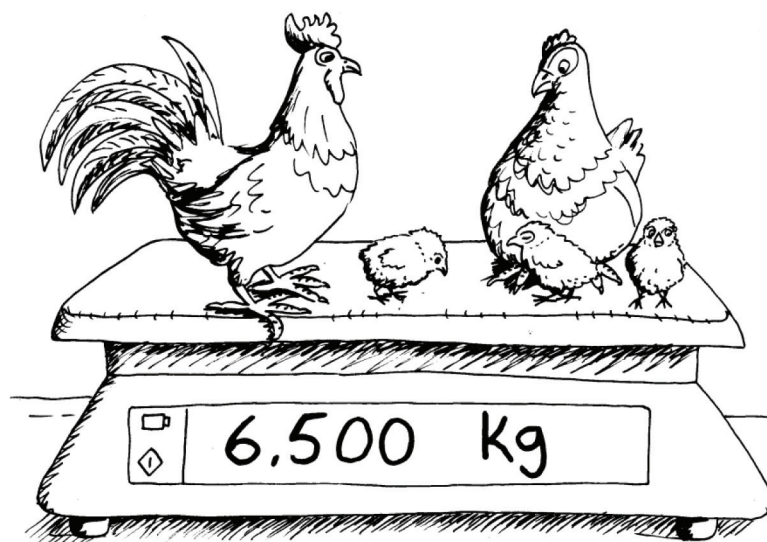
3. (a) Konstrueer die net van 'n silinder op 'n aparte stuk papier: middellyn 7 cm en hoogte 10 cm.
- (b) Vou jou net om 'n model van 'n silinder te maak.

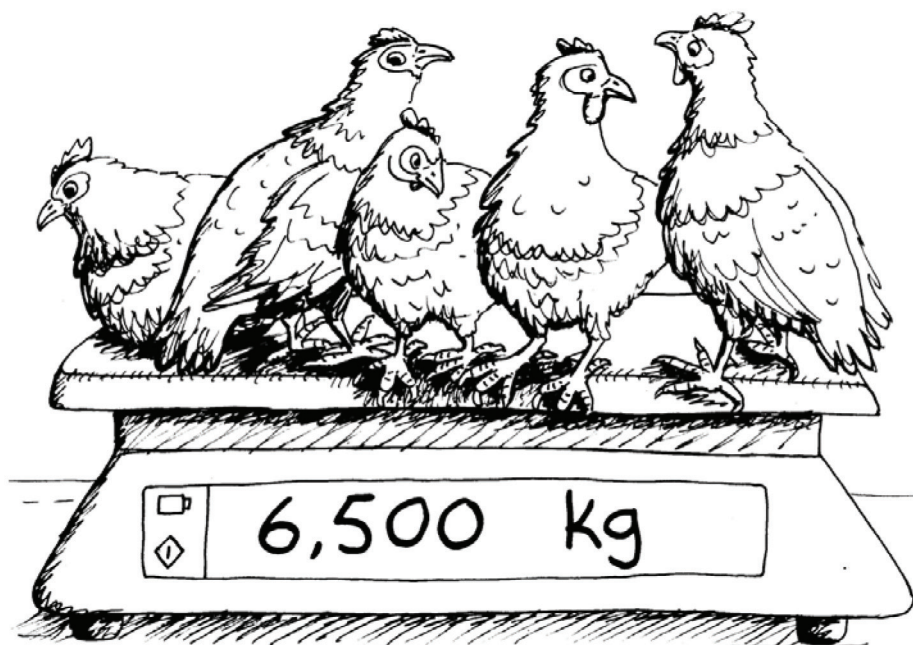
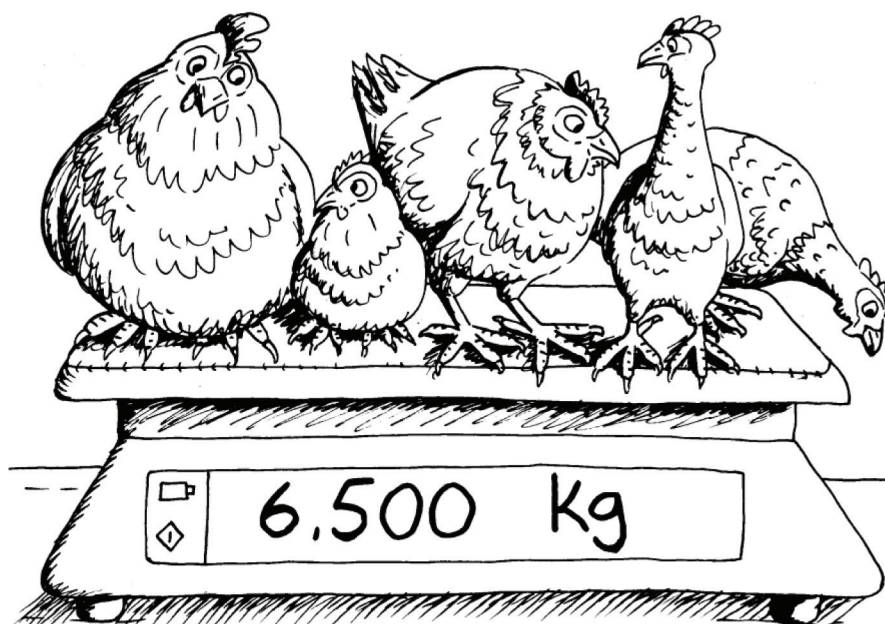
HOOFSTUK 8

Versamel, organiseer en opsomming van data

Jy het reeds geleer hoe om data in te samel, te organiseer en op te som. In graad 9 gaan jy leer watter metodes onder watter omstandighede die beste is en jy moet in staat wees om redes vir jou keuses aan te voer.

8.1	Samel data in	129
8.2	Organiseer data	133
8.3	Som data op	136





8 Versamel, organiseer en opsomming van data

8.1 Samel data in

Vermý vooroordeel by die keuse van 'n steekproef

Die metodes wat ons gebruik om data in te samel moet ons help om seker te maak dat die data betroubaar is. Dit beteken dat dit data is wat ons kan vertrou.

Data kan slegs betroubaar wees as dit op 'n manier ingesamel is wat seker gemaak het dat elke lid van die populasie dieselfde kans gehad het om in die steekproef ingesluit te word.

Dit is nie prakties om aan al die lemoene van 'n boom te proe om uit te vind of sy vrugte soet is nie. Slegs 'n paar lemoene kan getoets word, anders sal die boer te min lemoene hê om te verkoop. Die lemoene wat getoets word, word die **steekproef** genoem, en al die lemoene wat geoes word, word die **populasie** genoem.

In die algemeen kom vooroordeel by 'n steekproef voor as die bepaalde deel van die bevolking waaruit die steekproef geneem is, nie daardie bevolking verteenwoordig nie. Die manier om dit te vermy, is om 'n **ewekansige** steekproef te neem. 'n Steekproef is **ewekansig** as **elke lid van die bevolking 'n gelyke kans het** om gekies te word. 'n Ewekansige steekproef van die lemoenbome beteken dat elkeen van die bome 'n kans behoort te hê om vir die steekproef gekies te word. Elke mens in die land behoort 'n kans te hê om by die ewekansige steekproef in 'n behuisingsopname ingesluit te word.

'n Voorbeeld van 'n sydige steekproef sou wees om slegs 'n opname onder die mense in Limpopo te doen oor hulle mening oor die voorsiening van behuising, as jy wil uitvind hoe die hele land daaroor dink. Vir die opname of steekproef om verteenwoordigend van die hele bevolking van die land te wees, behoort elke persoon in die land 'n gelyke kans te hê om in die opname ingesluit te word.

Data kan ingesamel word deur vraelyste, deur waarneming en deur toegang te verkry tot databasisse.

Hoe om 'n goeie vraelys op te stel

Die vraelys speel ook 'n belangrike rol om te verseker dat die inligting wat jy insamel, betroubaar is. Jy moet probeer om 'n groot getal respondente en akkurate inligting te kry. As te min mense die vraelys voltooi, weet jy nie of die inligting wat jy kry, die ware situasie uitbeeld nie. Steekproeftegnieke en reëls wat deur statistici ontwikkel is, bepaal die getalle wat jy nodig sal hê.

Daar is 'n paar belangrike dinge om na op te let as jy 'n vraelys saamstel. Twee van die belangrikste dinge is dat vrae **duidelik en akkuraat** sal wees en dat mense die vraelys redelik **maklik** sal vind **om te voltooi**.

1. Hou die lengte van die vraelys en die tyd wat dit sal neem om te voltooi in gedagte. Die deelnemers sal eerder gewillig wees om 'n kort vraelys, wat minder tyd neem, te voltooi. Vermoed inligting wat nie nodig is nie.
2. Skryf 'n keuse van vrae neer wat jy dink die inligting wat jy wil hê, sal verskaf.
3. Gaan die bewoording van elke vraag na.
4. Orden die items in 'n logiese volgorde. Dit mag sin maak om die maklikste vrae eerste te vra, maar in sommige gevalle behoort die meer algemene vrae eerste gestel te word, gevolg deur die meer spesifieke vrae teen die einde van die vraelys.
5. Toets nou jou vraelys op 'n maat. Vra die volgende vrae:
 - Is hierdie vraag nodig? Watter inligting sal deur die antwoord verkry word?
 - Hoe maklik sal die respondent die vraag kan beantwoord? Hoe lank sal dit duur om die vraag te beantwoord?
 - Word daar vrae gevra wat sensitiewe antwoorde sal uitlok? Sal mense bereid wees om die vraag te beantwoord? Sal die respondent die vraag eerlik beantwoord?
 - Kan die vraag vinnig beantwoord word?
6. Besluit hoe antwoorde gegee moet word. Twee verskillende soorte antwoorde is **ope antwoorde** en **geslote antwoorde** wat hier onder beskryf word.

In 'n **ope vraag** antwoord die respondent in sy of haar eie woorde. 'n Mens kan belangrike inligting aflei wanneer iemand vrylik kan skryf waarvan hulle hou. 'n Nadeel is dat jy nie die inligting mag kry wat jy wou hê nie en dat dit baie lank mag duur om te antwoord.

In 'n **geslote vraag** moet die respondente uit die opsies kies wat jy vir hulle gegee het. Hulle maak 'n merkie in die gegewe blokkie wat hulle mening die beste weergee. Hierdie opsies kan in kategorieë ingedeel word. So kan ouderdom byvoorbeeld soos volg ingedeel word:

Onder 10 ☐ Van 10 tot 14 ☐ Van 15 tot 19 ☐ 20 en ouer ☐

DINK NA OOR DIE INSAMELING VAN DATA EN STEL 'N VRAELYS OP

1. Wat sal die mees gepaste metode wees om data in die volgende gevalle in te samel? Gee redes vir jou keuse.
 - (a) Die getal leerders wat kos skool toe bring. Wat is die inhoud van die kospakkies?
.....
.....
.....
 - (b) Of die kassiere by 'n supermarkgroep gelukkig is met hulle werksvoorwaardes.
.....
.....
.....
 - (c) Of die kliënte van 'n kliniek tevrede is met die professionele optrede van die mediese personeel.
.....
.....
.....
.....
 - (d) Die soort aktiwiteite wat voorskoolse kinders in hulle vrye tyd verkies.
.....
.....
.....
 - (e) Die getal graad 9-leerders in die Gauteng-Noord Distrik.
.....
.....
2. Jy doen marknavorsing vir 'n nuwe kitskoswinkel naby die skool. Die eienaars van die winkel wil weet van watter soort kos en musiek hulle teikenmark hou. Die teikenmark is hoërskoolleerders. Stel 'n vraelys op om hierdie inligting in te samel.

8.2 Organiseer data

Daar is 'n verskil tussen **data** en **inligting**. Data is ongeorganiseerde feite. Eers wanneer data georganiseer en ontleed is sodat mense besluite kan neem, kan dit inligting genoem word. Data kan op verskillende maniere georganiseer word. Party van die metodes word hier onder beskryf.

Data kan in 'n **telstreprietabel** georganiseer word. Die voorbeeld hier onder wys die getalle leerders in 'n klas wat aan verskillende sportsoorte deelneem.

Sportsoort	Telstrepies
Rugby	### ### ### ### ###
Atletiek	### ///
Netbal	### ### ### ### /
Skaak	### /

Dieselfde data kan ook in 'n **frekwensietabel** georganiseer word:

Sportsoort	Frekwensie
Rugby	25
Atletiek	8
Netbal	21
Skaak	6

Numeriese stelle data met baie items word dikwels in ewe groot **klasintervalle** gegroepeer en dan in 'n frekwensietabel vir die verskillende klasintervalle voorgestel. Dit is baie nuttig, omdat dit dan maklik is om te sien hoe die data versprei is.

Hier is 'n voorbeeld van gegroepeerde data wat die lengtes van al die leerders in 'n skool wys. **Om 'n frekwensietabel vir numeriese data te maak, moet die data eers van die kleinste na die grootste gerangskik word.**

Lengte in m	Getal leerders (Frekwensie)
< 1,20 m	13
1,20 m – 1,30 m	28
1,30 m – 1,40 m	57
1,40 m – 1,50 m	164
1,50 m – 1,60 m	274
1,60 m – 1,70 m	198
1,70 m – 1,80 m	73
> 1,80 m	13

'n Waarde gelyk aan die laagste grens van 'n **klasinterval** word in daardie interval getel. Byvoorbeeld, 'n lengte van 1,60 m word in die interval 1,60 – 1,70 getel en nie in die interval 1,50 – 1,60 m nie. 1,599 m is minder as 1,60 m, dus val dit in die interval 1,50 – 1,60 m.

'n **Stingel-en-blaarvoorstelling** is 'n nuttige manier om numeriese data te organiseer. 'n Mens kan ook dadelik die “vorm” van die data sien. Hier is 'n voorbeeld van 'n stingel-en-blaarvoorstelling.

Sleutel: 35 | 4 beteken 354

34	0 4
35	4 8 8
36	0 1 6 8
37	1 3 5 8 8 8 9
38	2 4 9
39	0 3 4 4 5 6 9
40	0 3 7
41	1

Die stingel-en-blaarvoorstelling hier bo verteenwoordig die volgende data van die massas, in gram, van die hoenders van 'n steekproef 6-week oue kuikens op 'n hoenderplaas.

399	378	382	360	396	389	344	411	378	394
394	354	375	378	400	371	379	358	366	403
358	395	390	340	393	384	361	407	373	368

Om 'n stingel-en-blaarvoorstelling te maak, help dit om eers die data van die kleinste na die grootste te rangskik, soos hier vir bostaande data gedoen is.

340	344	354	358	358	360	361	366	368	371
373	375	378	378	378	379	382	384	389	390
393	394	394	395	396	399	400	403	407	411

Dieselfde stel word hier onder getoon op twee effens verskillende maniere.

			379		399		
			378		396		
			378		395		
		368	378		394		
	358	366	375	389	394	407	
344	358	361	373	384	393	403	
340	354	360	371	382	390	400	411

In hierdie voorstelling is die wydte van elke klasinterval 10, soos in die tak-en-voorstelling hier bo.

		384		
		382	399	
		379	396	
	368	378	395	
	366	378	394	
	361	378	394	411
354	360	375	393	407
344	358	373	390	403
340	358	371	389	400

In hierdie voorstelling is die wydte van elke klasinterval 15.

WERK MET GEGROEPEERDE DATA

1. 'n Organisasie, Motor Reddingsdiens, het gedurende Maart 2014 daaglik die volgende getal oproepe van motoriste vir padhulpdiens ontvang.

28 122 217 130 120 86 80 90 120 140
 70 40 145 187 113 90 68 174 194 170
 100 75 104 97 75 123 100 82 109 120
 81

Stel 'n telstrepie- en frekwensietabel op met intervalle met wydte 40 vir hierdie stel data.

2. As geoloë in die veld uitgaan, maak hulle seker dat hulle meetinstrumente saamneem. Hulle het ook “ingeboude meetinstrumente”, soos byvoorbeeld hul handspanne, by hulle. 'n Handspan is die afstand van die punt van die duim tot by die punt van die pinkie van 'n gestrekte hand. Meet jou handspan op 'n liniaal! Hierdie gegroepeerde frekwensietabel wys die handspanne van graad 9 leerders, in cm.

Handspan van graad 9 leerders in cm	Frekwensie
15–18	7
18–21	9
21–24	10
24 en groter	4

- (a) Hoeveel handspanne is gemeet?

.....

- (b) Hoeveel leerder-handspanne is minder as 21 cm wyd?

.....

- (c) Hoeveel handspanne is wyer as 18 cm?

.....

(d) In watter interval sal jy 'n handspar van 18 cm plaas?

.....

8.3 Som data op

Die gemiddelde, mediaan en modus is enkel getalle wat meer inligting aangaande 'n stel data verskaf, sonder om 'n lys van al die datawaardes te gee.

Die **modus** is die waarde wat die meeste voorkom. Om die modus te bepaal, soek ons die getal of kategorie wat die meeste in die datastel voorkom. Party datastelle het meer as een modus, terwyl ander geen modus kan hê nie.

Die **mediaan** is die getal wat 'n stel waardes in 'n boonste helfte en onderste helfte skei. Om die mediaan te kry, moet die datawaardes eers van klein na groot of van groot na klein gerangskik word. As die stel data uit 'n ewe getal datawaardes bestaan, is die mediaan gelyk aan die som van die twee middelste waardes gedeel deur 2.

Die **gemiddelde** van 'n stel numeriese data is die som van die waardes gedeel deur die getal waardes in die datastel.

Gemiddelde = die som van die waardes $\div$ die getal waardes.

Die **omvang** is die getal wat ons vertel hoe verspreid die datawaardes is. Dit is die verskil tussen die grootste en kleinste waardes.

Die gemiddelde, mediaan en modus werk nie ewe goed vir alle stelde data nie. Dit hang af van die soort data, en ook of die data eweredig versprei is of nie.

ORGANISEER, SOM OP EN VERGELYK DATA

1. 'n Navorser ontleed statistiek van mense wat gebuk gaan onder drie verskillende tipes van die griepvirus: A, B en C. Die ouderdomme van die mense is:
Tipe A: 60, 80, 75, 87, 88, 49, 94, 84, 59, 86, 82, 62, 79, 89 en 78.
Tipe B: 27, 39, 43, 29, 36, 70, 56, 25, 54, 36, 66, 45, 33, 46, 14 en 41.
Tipe C: 33, 48, 64, 15, 31, 20, 70, 21, 18, 49, 21, 19, 57, 23, 29 en 20.

Vir elke groep:

- Teken 'n tak-en-blaarvoorstelling.
- Bereken die omvang, gemiddelde en mediaan van die ouderdomme.
- Kyk na die vorm van die tak-en-blaarvoorstelling sowel as die opsommende statistiek. Beskryf die verspreiding van die data in elke geval en vergelyk die drie verskillende groepe.

Doen jou bewerkings en beskrywings hier onder en op die volgende bladsy.

Tipe A:

Tipe B:

Tipe C:

2. Gee die beste opsommende waarde (modus, gemiddelde of mediaan) vir elk van die datastelle vir die situasies hier onder.

Datastel	Beste opsommende waarde
Die skoengroottes van seuns in graad 9.	
'n Eweredige verspreiding van meting, soos die lengtes van leerders in 'n klas.	
'n Stel metingswaardes waarvan 'n paar baie laag en die ander meestal hoog is.	
Die getal broers en susters van elkeen in die klas.	
Die grootte van eiendomme in 'n dorp waar die meeste mense in klein woonstelle of huisies bly en baie min in groot huise woon.	

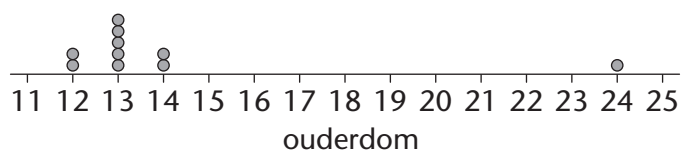
UITERSTE WAARDES EN UITSKIETERS

'n **Uiterste waarde** of **uitskieter** is 'n datawaarde wat abnormaal ver van die ander datawaardes af lê in 'n ewekansige steekproef van die populasie. Soms is daar redes waarom hierdie datawaarde so van die ander verskil. Dit is belangrik dat ons moontlike redes daarvoor soek.

As jy data opsom of ontleed, moet jy besluit of 'n uitskieter sin maak in die konteks waarin jy daarna kyk.

Dit is moontlik dat die uitskieter nie sin maak nie, omdat die meting te ver weg lê en dus onlogies is. Dan moet jy besef dat hierdie datawaarde moontlik foutief kan wees

Byvoorbeeld:



In hierdie geval kan die waarde, 24 jaar, onlogies wees. Dit hang af van die konteks van die opname.

Jy sal in Hoofstuk 10 meer leer van ekstreme waardes en uitskieters.

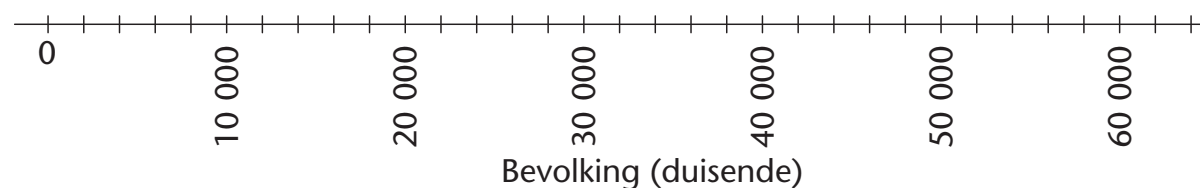
Gebruik hierdie inligting oor veertien lande om die vrae wat daarop volg te beantwoord.

Land	Totale bevolking (in 1 000'e)	Totale nasionale inkomste per persoon (US\$)	Persentasie van inkomste gespandeer op gesondheid
Angola	18 498	4 830	4,6
Botswana	1 950	13 310	10,3
DRK	66 020	280	2,0
Lesotho	2 067	1 970	8,2
Malawi	15 263	810	6,2
Mauritius	1 288	12 580	5,7
Mosambiek	22 894	770	5,7
Namibië	2 171	6 250	5,9
Seychelle	84	19 650	4,0
Suid-Afrika	50 110	9 790	8,5
Swaziland	1 185	5 000	6,3
Tanzanië	43 739	1 260	5,1
Zambië	12 935	1 230	4,8
Zimbabwe	12 523	170	Nie beskikbaar nie

1. Kyk na die totale bevolking van elke land.

(a) Bereken die gemiddelde van die data.

(b) Teken 'n puntstipping op die getallelyn om die data voor te stel.



(c) Bereken die mediaan van die data.

.....

(d) Wat is die omvang van die data?

.....

(e) Watter opsommende statistiek dink jy stel die data die beste voor? Verduidelik.

.....

2. Kyk na die *Totale nasionale inkomste per persoon in US dollars*. Lewer kommentaar op die verspreiding van die data.

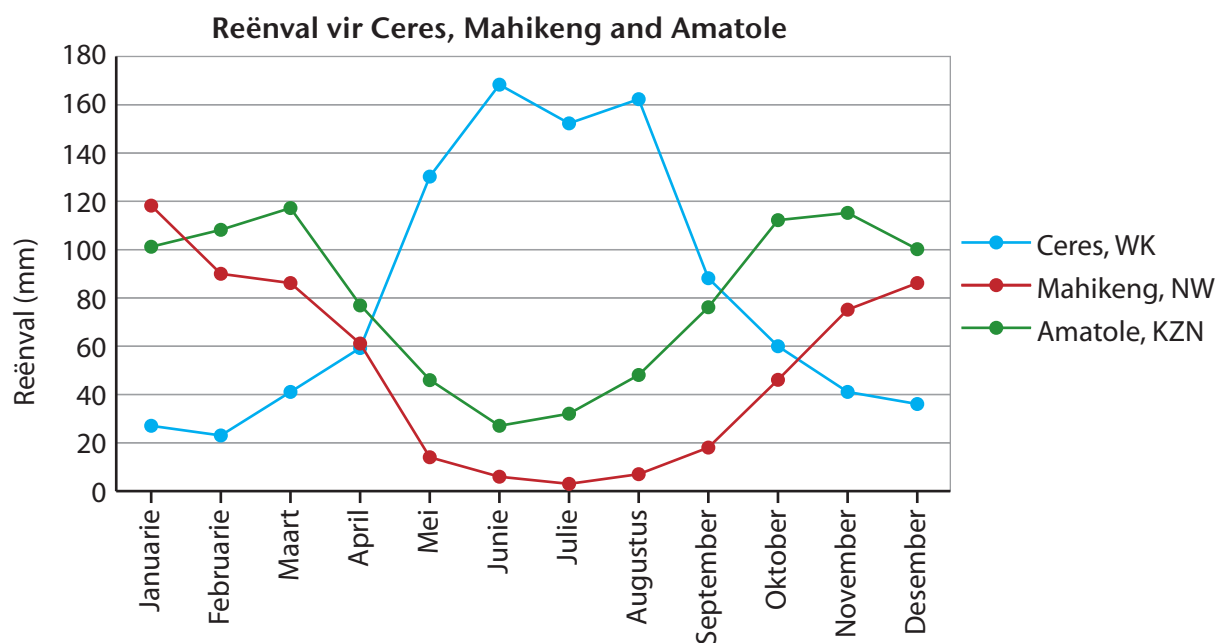
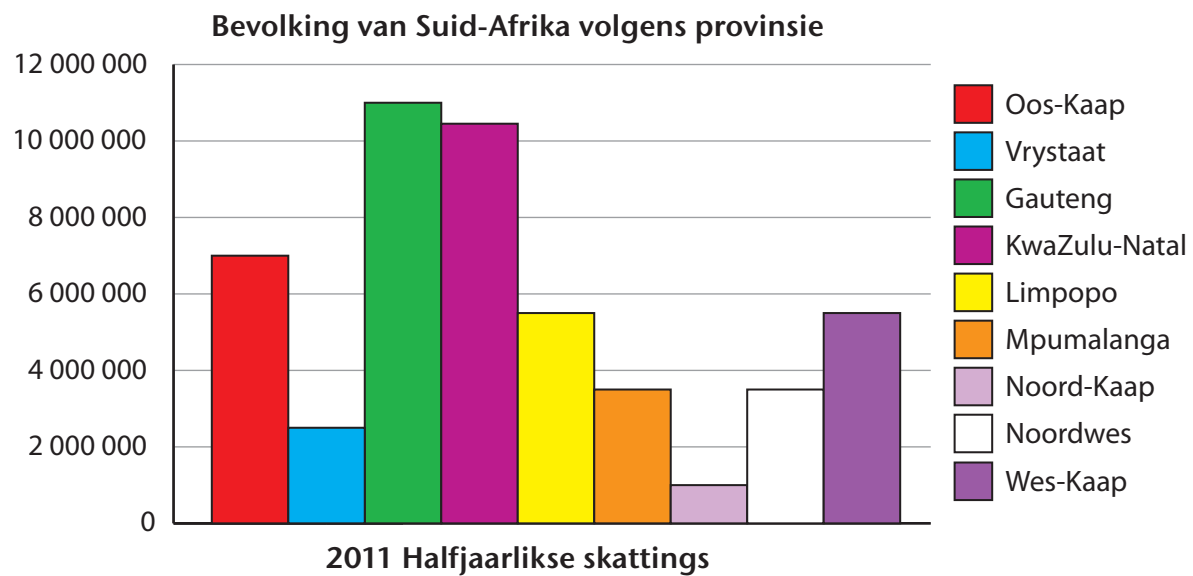
.....

HOOFSTUK 9

Stel data voor

In die vorige hoofstuk het jy gefokus op metodes om data in te samel, te organiseer en op te som. Nou gaan ons kyk hoe om data in staafgrafieke, dubbele staafgrafieke, histogramme, sirkeldiagramme en gebrokelyngrafieke voor te stel. Jy sal oefen om hierdie grafieke te teken. Jy sal ook besluit watter tipe grafiek in 'n spesifieke konteks die situasie die beste voorstel.

9.1	Staafigrafieke en dubbele staafigrafieke.....	143
9.2	Histogramme	146
9.3	Sirkeldiagramme	149
9.4	Gebrokelyngrafieke	151
9.5	Spreadingdiagramme	154



9 Stel data voor

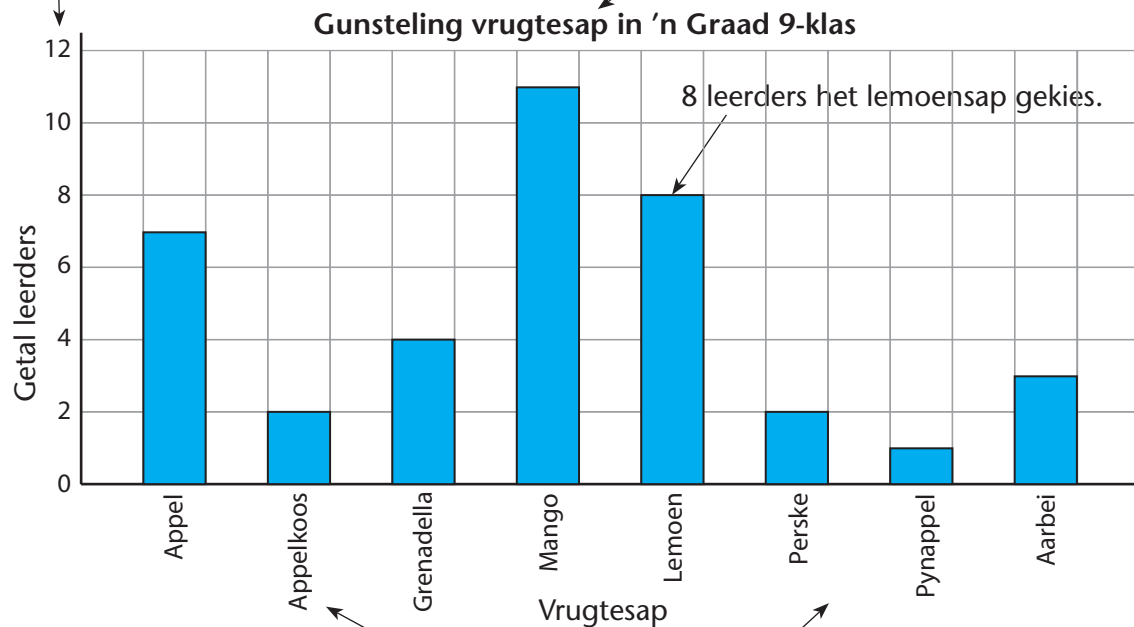
9.1 Staafgrafieke en dubbele staafgrafieke

HERSIEN STAAF- EN DUBBELE STAAFGRAFIEKE

'n Staafgrafiek, ook 'n kolomgrafiek genoem, wys die kategorieë data op die horisontale as en die frekwensie van elke kategorie op die vertikale as. Hier onder is 'n voorbeeld gegee.

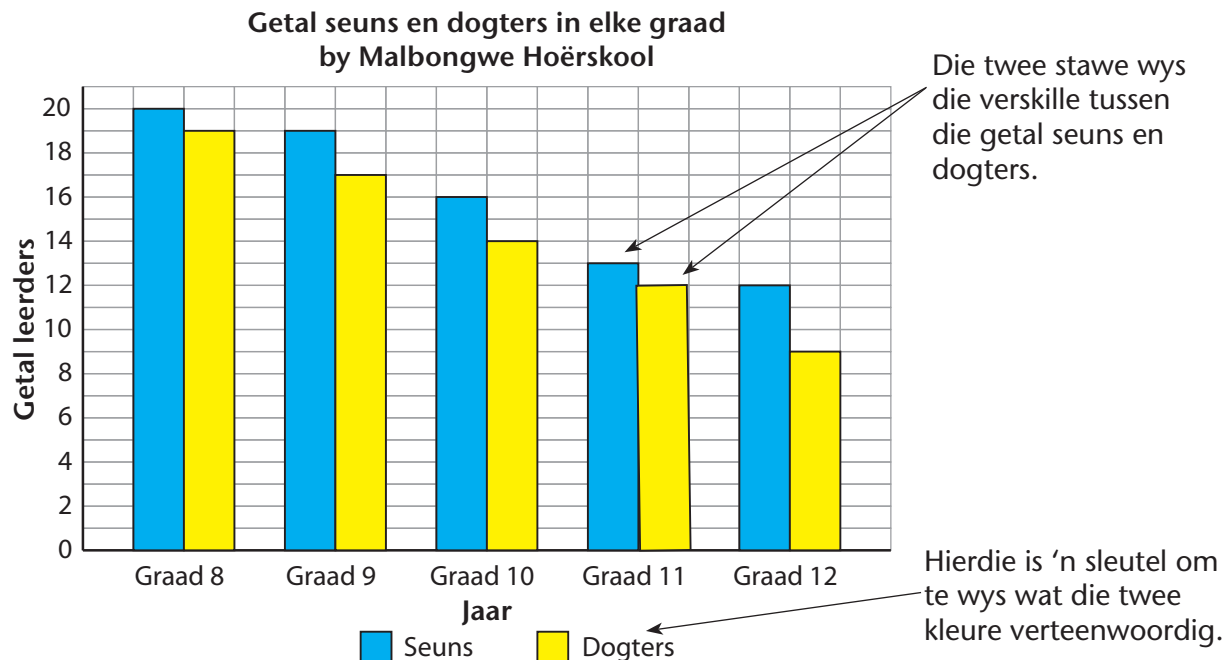
Hierdie wys die frekwensie van elke kategorie.

Grafieke moet 'n titel hê om aan te dui waaroor dit gaan.



Hierdie as gee die kategorieë van die data.

'n **Dubbele staafgrafiek** wys twee stelle data in dieselfde kategorieë op dieselfde assestelsel. Dit is nuttig as ons twee dinge binne elke kategorie moet vergelyk.



TEKEN STAAFGRAFIEKE EN DUBBELE STAAFGRAFIEKE

1. Persone wat uitermate oorgewig is, het dikwels gesondheidsprobleme. Dit is 'n probleem dwarsoor die wêreld. Gesondheidsnavorsers het die toename in swaarlywigheid oor 28 jaar heen in verskillende dele van die wêreld ontleed. Hierdie tabel som 'n gedeelte van die data op.

Persentasie van die bevolking wat uitermate oorgewig is

	1980	2008
Sub-Sahara Afrika	12%	23%
Noord-Afrika en die Midde-Ooste	33%	58%
Latyns-Amerika	30%	57%
Oos-Asië (lae inkomste lande)	13%	25%
Europa	45%	58%
Noord-Amerika (hoë inkomste lande)	43%	70%

- (a) Die tabel som 'n "gedeelte" van die data op. Wat sou ander belangrike data wees? Dink aan soveel dinge as wat jy kan.

.....

.....

.....

.....

- (b) Watter data staan vir jou die meeste uit in die tabel hier bo? Gee jou persoonlike mening.

.....

.....

.....

- (c) Stip 'n dubbele staafgrafiek om die data vir die gebiede en vir die twee jaartalle te vergelyk. Gebruik die assestelsel op die volgende bladsy. Onthou om 'n sleutel vir die grafiek te verskaf.



- (d) Kyk mooi na die vergelykings wat die grafiek maak. Het jou mening oor die interessantste verskille verander nou dat jy die dubbele staafgrafiek gesien het? Verduidelik.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (e) In party lande word die probleem “Oormatige oorgewig in die aangesig van armoede” genoem. Skryf ’n kort verslag oor die data en jou dubbele staafgrafiek om hierdie argument te staaf.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9.2 Histogramme

HERSIEN HISTOGRAMME

'n Histogram is 'n grafiek van die frekwensies van data in verskillende **klasintervalle**, soos gedemonstreer in die voorbeeld hier onder. Elke klasinterval word gebruik vir die waardes wat tussen sekere grense lê. Die verskillende klasintervalle volg opmekaar en kan nie waardes hê wat oorvleuel nie. Die data kan die resultaat van meting wees of items of gebeure wat getel word.

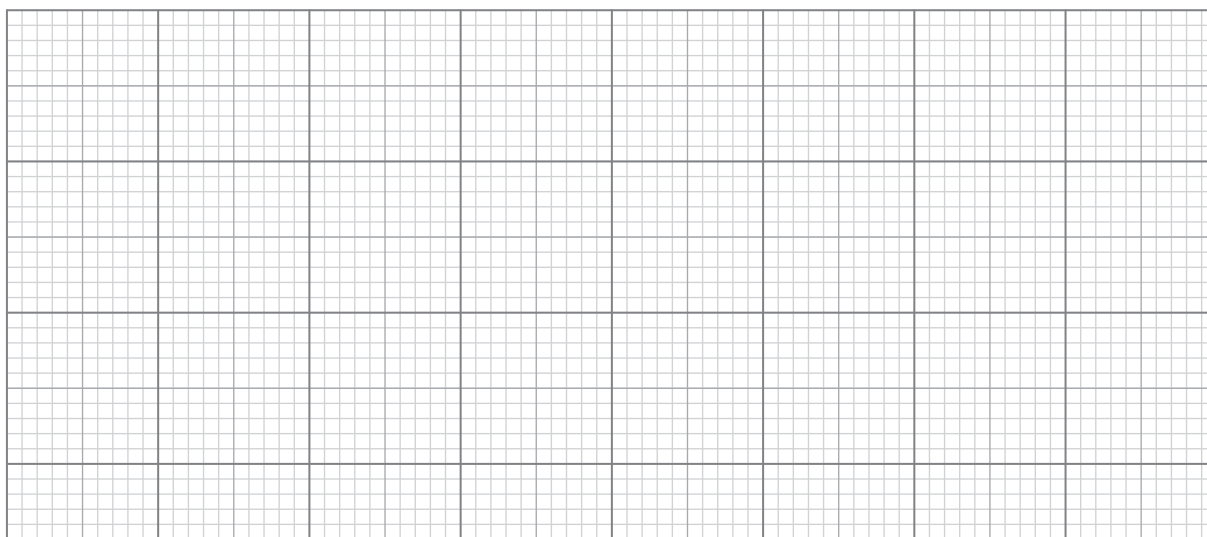
'n Histogram lyk ietwat soos 'n staafgrafiek, maar daar is gewoonlik geen spasies tussen die kolomme nie.

STEL DATASTELLE MET HISTOGRAMME VOOR

1. (a) 'n Vrugteboer wil weet watter van sy bome goeie pruime dra en watter bome vervang moet word.
Hy pluk 100 pruime elk van twee bome af en meet hulle massas.
Die data hier onder gee die massa van pruime van die eerste boom.

Massa van pruime (g)	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69
Frekwensie	6	18	34	30	12

Stel die data voor in 'n histogram op die assestelsel hier onder.



- (b) Teken nou nog 'n histogram om die massa van dieselfde tipe pruime van die ander boom voor te stel.

Massa van pruime(g)	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
Frekwensie	3	14	26	36	21



- (c) Gebruik die twee histogramme om kommentaar te lewer op die produksie van die twee bome.

.....

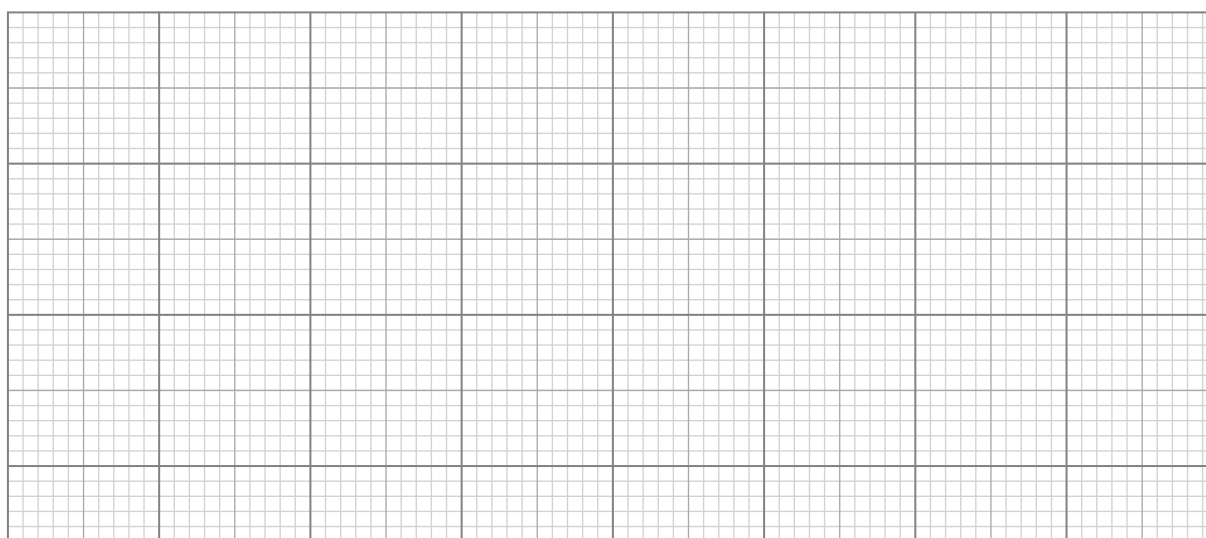
.....

.....

2. (a) Teken 'n histogram om die data in die tabel hier onder voor te stel. Groepeer die data in intervale van 0,5 kg.

Geboortegewig (kg) van 28 babas by 'n kliniek

3,3	1,34	2,88	2,54	1,87	2,06	2,72
1,89	0,85	1,99	2,43	1,66	2,45	1,62
1,91	1,20	2,45	1,38	0,9	2,65	2,88
1,75	2,11	3,2	1,74	0,6	3,1	1,86



- (b) Bereken die gemiddelde en die mediaan van die data.

.....

- (c) Rekords van oor die hele land wys dat die geboortegewig van babas wissel vanaf 2,0 kg tot 4,5 kg, maar die mediaan geboortegewig is 3,18 kg. Gebruik die grafiek, die gemiddelde en die mediaan om 'n kort verslag oor die data van die kliniek te skryf.

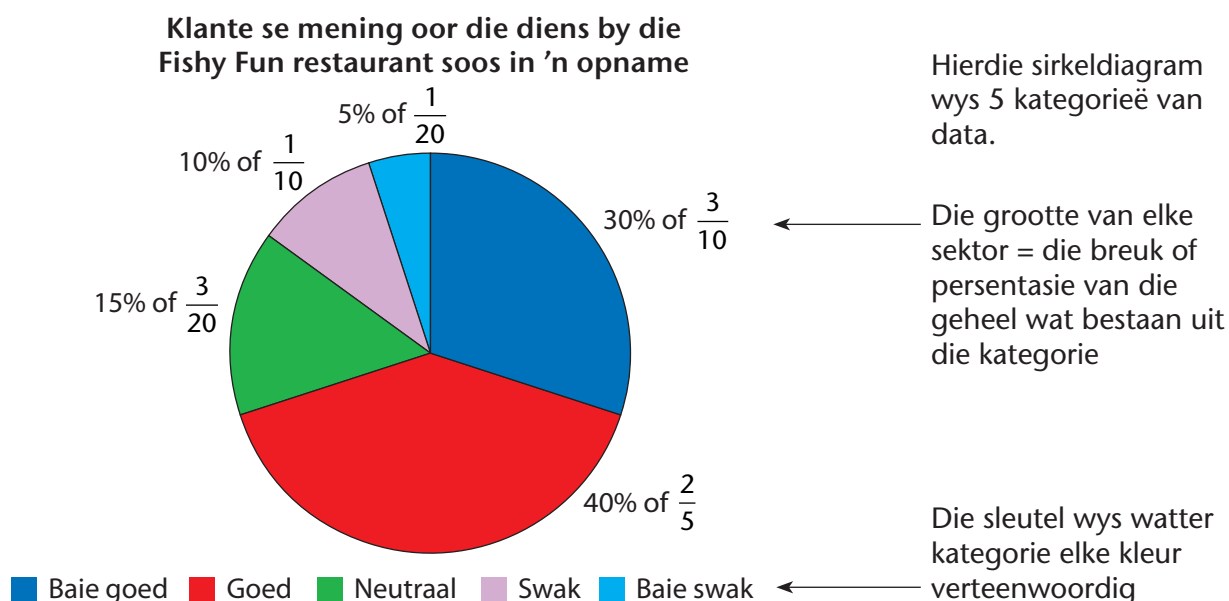
.....

.....

9.3 Sirkeldiagramme

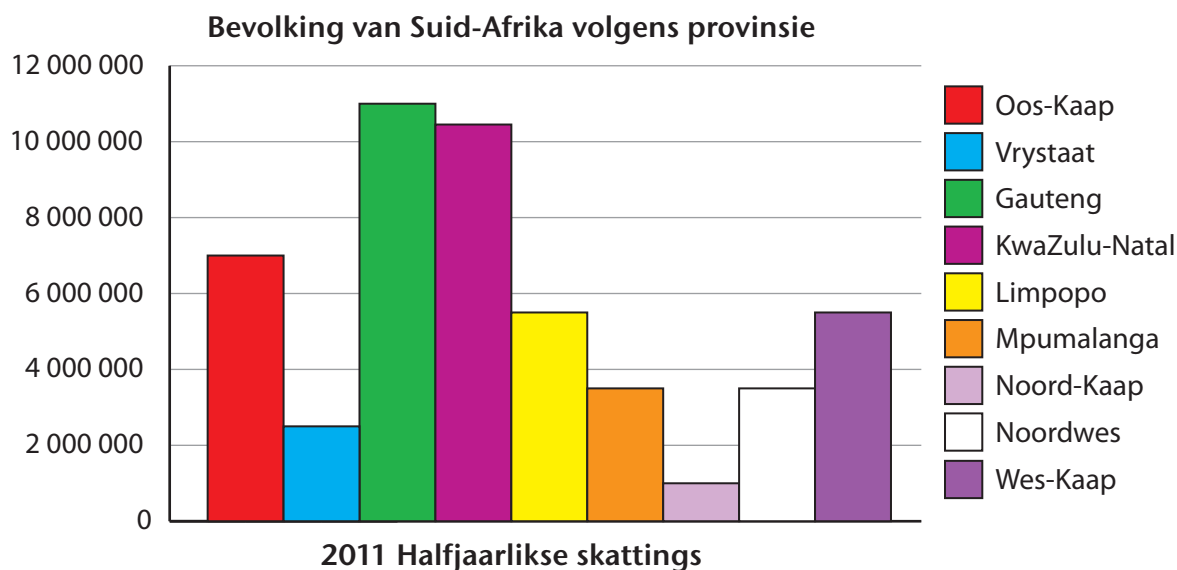
'n **Sirkeldiagram** bestaan uit 'n sirkel wat in sektore (snye) verdeel is. Elke sektor stel een kategorie data voor. Groter kategorieë data beslaan groter snye van die sirkel.

Hier is 'n voorbeeld van 'n sirkeldiagram:



TEKEN SIRKELDIAGRAMME

- Die volgende kolomgrafiek stel die bevolking van Suid-Afrika volgens provinsie voor.



- Skryf die syfers in die grafiek korrek tot die naaste 500 000.

Provinsie	OK	VS	Gau	KZN	Lim	Mpum	NK	NW	WK
Bevolking (× 1 000)									

- Wat is die totaal van die afgeronde getalle?

(c) Bereken watter persentasie van die hele land se bevolking in elke provinsie woon.

Provinsie	OK	VS	Gau	KZN	Lim	Mpum	NK	NW	WK
Persentasie van totaal									

(d) Teken 'n sirkeldiagram om die data in die voltooide tabel voor te stel. (Skat die grootte van elke sny/sektor.)

.....

.....

.....

(e) Skryf 'n kort verslaggie om die verskille tussen die aanbieding van die data in die sirkeldiagram en die kolomgrafiek te verduidelik. Watter metode dink jy stel die data die beste voor?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9.4 Gebrokelyngrafieke

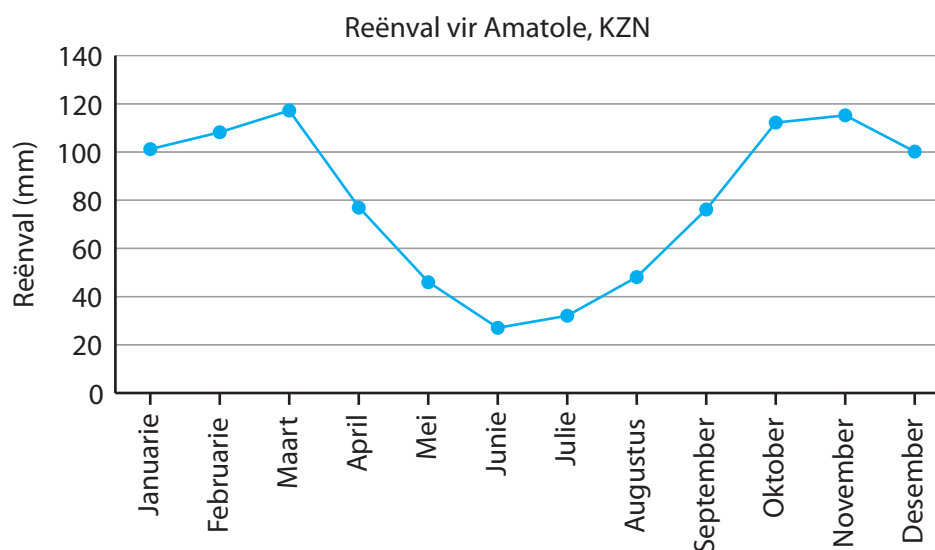
GEBROKELYNGRAFIEKE

Gebrokelyngrafieke word gebruik om data voor te stel wat met verloop van tyd gedurig verander. Byvoorbeeld, die reënval vir die hele maand word deur een datapunt voorgestel, selfs al is die reën oor die maand versprei en dit op sommige dae reën en op ander nie. Hierdie soort grafieke is nuttig om tendense vas te stel en voor te stel.

Hier onder is data wat deur gebrokelyngrafieke voorgestel kan word.

Reënval op drie plekke in Suid-Afrika in 2012			
	Amatole, KZN	Mahikeng, NW	Ceres, WK
	Reënval (mm)	Reënval (mm)	Reënval (mm)
Januarie	101	118	27
Februarie	108	90	23
Maart	117	86	41
April	77	61	60
Mei	46	14	130
Junie	27	6	168
Julie	32	3	152
Augustus	48	7	162
September	76	18	88
Oktober	112	46	60
November	115	75	41
Desember	100	86	36

Hier onder is 'n gebrokelyngrafiek van die data vir die Amatole reënval.



1. Gedurende watter vier maande het Amatole die minste reën gekry?

.....

2. Gedurende watter 6 maande reën dit die meeste in Amatole?

.....

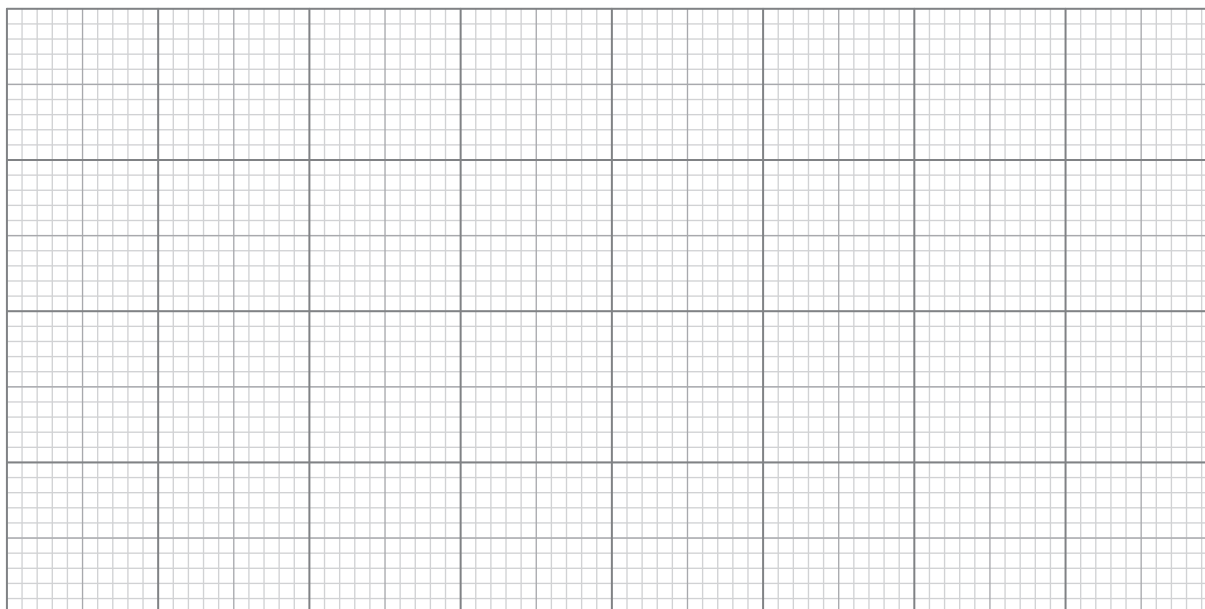
3. Gedurende watter maande sal jy 'n staptog in hierdie omgewing beplan?

.....

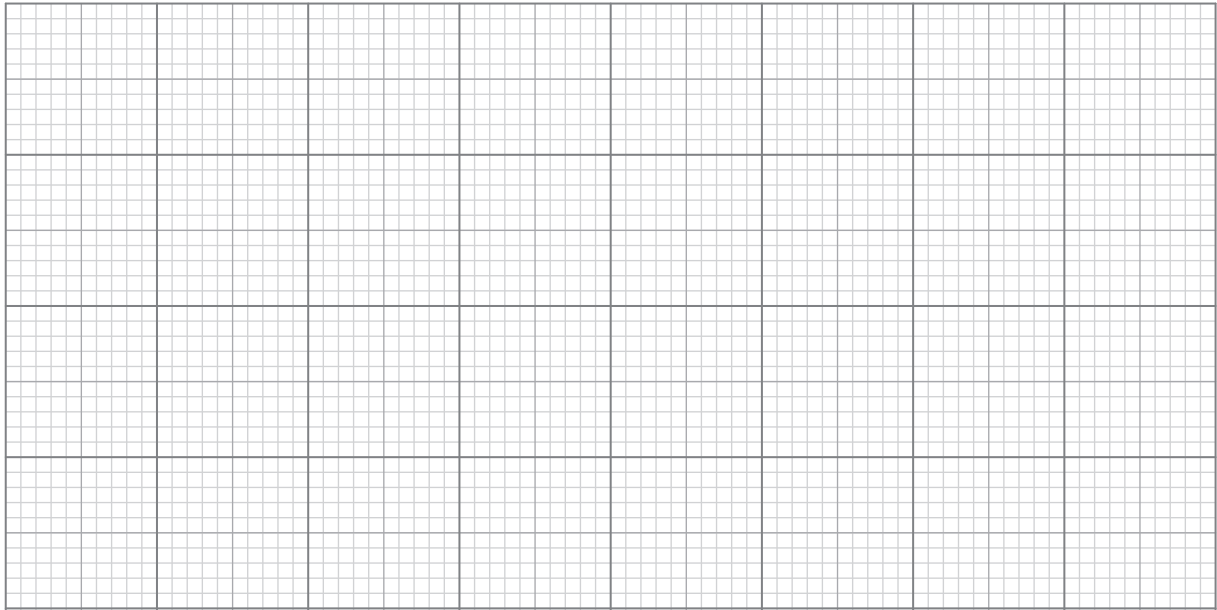
4. Watter ander faktore moet jy in gedagte hou as jy 'n staptog in hierdie omgewing beplan?

.....

5. Teken 'n gebrokelyngrafiek van die Mahikeng reënval data op die rooster hier onder.



6. Teken 'n gebrokelyngrafiek van die Ceres reënval data op die rooster hier onder.



7. Skryf 'n paar reëls oor die verskil tussen Ceres en Mahikeng se reënvalpatrone.

.....

.....

.....

.....

8. Teken 'n gekombineerde gebrokelyngrafiek met die inligting uit al drie gebiede op een grafiek.



9.5 Spreidingsdiagramme

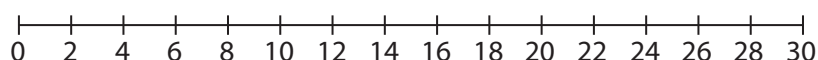
VERSTAAN EN TEKEN SPREIDINGSDIAGRAMME

Spreidingsdiagramme of spreidingstippings wys die verband tussen twee stelle numeriese data. Pare ooreenstemmende getalle word soos koördinate hanteer en as 'n enkele punt gestip. Die punte, wat elk uit twee data-items bestaan, is oor die hele grafiek versprei.

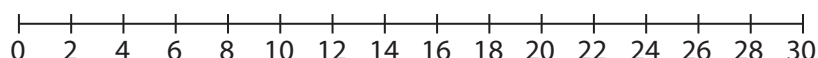
1. Hierdie tabel wys 'n stel data met twee veranderlikes. Kyk mooi na die inligting op die tabel.
2. Maak 'n kol vir elke leerder se punt vir elke vak op die getallelyn hier onder.

Leerders	Wiskunde-punte	Natuurweten-skappunte
Zoë	25	26
Johan	23	25
Palesa	22	25
Susan	21	23
Eric	20	23
Christoph	19	21
Gabriel	17	20
Simon	16	19
Miriam	15	18
Frederik	15	16
Stefan	12	15
Maryna	11	13
Dora	11	12
Samuel	10	12
Lola	10	11
Thineke	9	10
Jan-Chris	8	10
Marais	7	9
Marlene	7	7
Marie	5	7

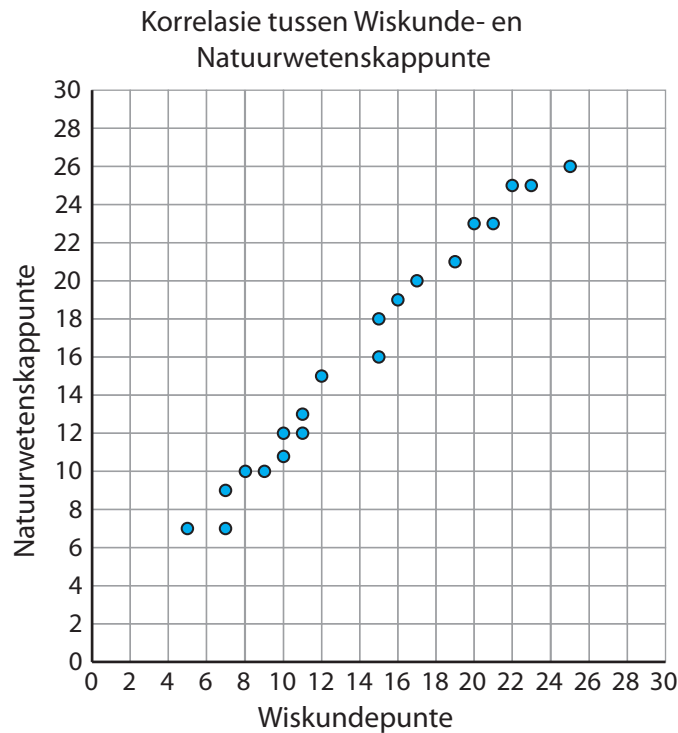
Natuurwetenskappunte



Wiskundepunte



3. Wat sou gebeur as jy altwee stelle punte nie op afsonderlike getallelyne nie, maar op dieselfde grafiek sou aantoon? Die spreidingsdiagram hier onder stel die twee stelle data voor. Elke kol verteenwoordig een leerder.



Die spreidingsdiagram wys die **verband** tussen die natuurwetenskappunt en die wiskundepunt.

4. Soek die kol wat Stefan se punte voorstel. Hy het 12 vir sy wiskundetoets en 15 vir sy natuurwetenskaptoets gekry. Soek 12 op die horisontale as. Volg nou die vertikale lyn boontoe tot jy by 'n blou kol kom. Soek 15 op die vertikale as. Volg die lyn horisontaal totdat jy by dieselfde blou kol kom. Hierdie blou kol stel die twee datapunte voor wat aan Stefan behoort. Trek 'n kringetjie om die datapunt en merk dit S.
5. Soek die datapunte vir Zoë, Palesa, Jan-Chris en Marie. Omkring hulle en merk hulle Z, P, J en M.

In die voorbeeld hier bo stem 'n hoër wiskundepunt ooreen met 'n hoër wetenskappunt. Ons sê daar is 'n **positiewe korrelasie** tussen die wiskundepunte en die wetenskappunte.

6. Kyk na die volgende datastel en die spreidingsdiagram van die data gegee op die volgende bladsy.

Leerders	Wiskundepunte	Kunspunte
Zoë	25	7
Johan	23	7
Palesa	22	9
Susan	21	10
Eric	20	10
Christoph	19	11
Gabriel	17	12
Simon	16	12
Miriam	15	15
Frederik	15	15
Stefan	12	16
Maryna	11	17
Dora	11	19
Samuel	10	20
Lola	10	21
Thineke	9	23
Jan-Chris	8	23
Marais	7	25
Marlene	7	25
Marie	5	26

7. Soek Eric se punte in die tabel. Kyk na sy punte vir Wiskunde en Kuns. Soek die kol wat sy punte voorstel op die spreidingsdiagram. Omkring dit en merk dit E.
8. Soek Samuel se punte op die tabel. Kyk na sy punte vir Wiskunde en Kuns. Soek die kol wat sy punte voorstel op die spreidingsdiagram. Omkring dit en merk dit S.
9. Vergelyk die twee stelle punte vir Eric en Samuel. Wat merk jy op van die punte?

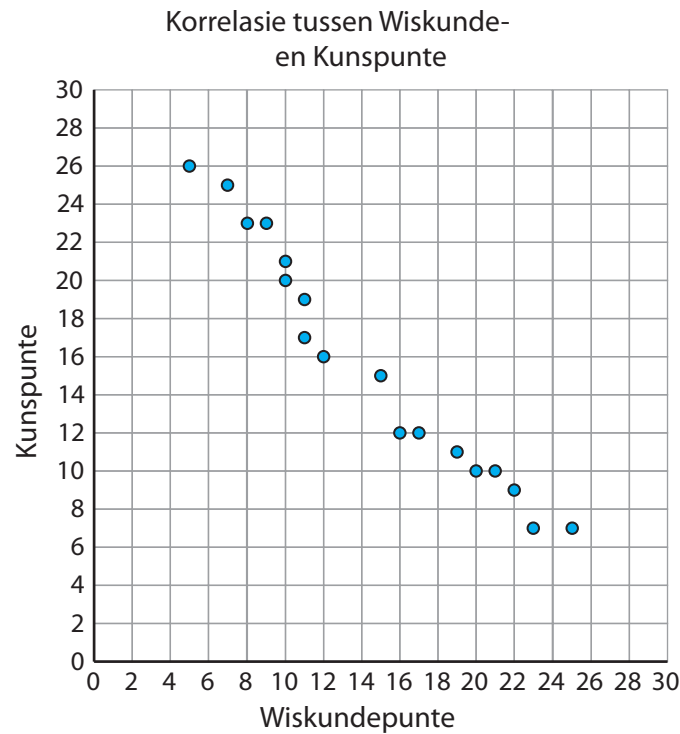
.....

.....

10. Soek die datapunte vir Zoë, Miriam, Frederik en Marie op die spreigrafiek. Omkring die punte en merk hulle Z, M, F en Ma.

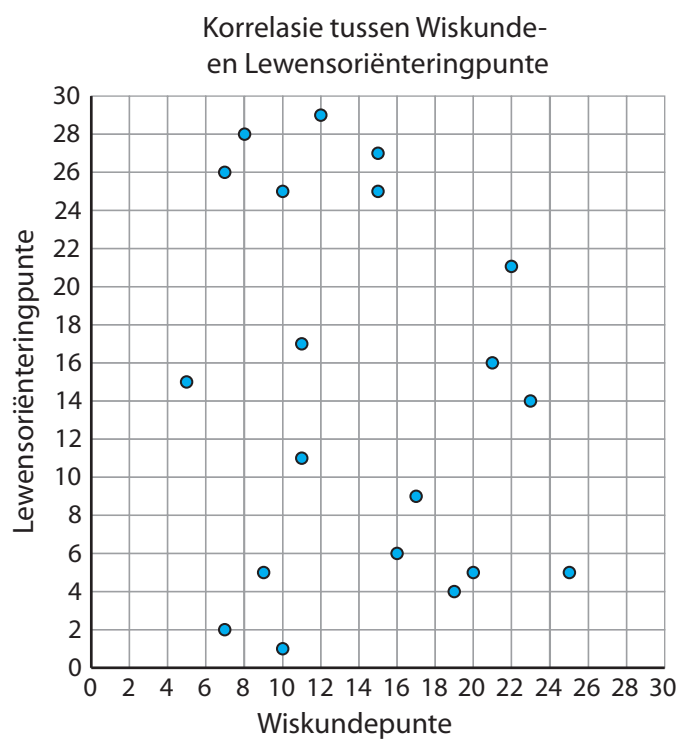
11. Wat merk jy op uit die patroon van punte vir Wiskunde en Kuns in hierdie stel data?

.....



'n **Negatiewe korrelasie** is een waar die vermeerdering in die waarde van een stel data geneig is om verband te hou met die vermindering in die ander stel data. Dit wil voorkom of leerders wat 'n hoë punt vir Wiskunde behaal, 'n lae kunspunt het. Ons sê daar is 'n negatiewe korrelasie tussen die wiskunde- en die kunspunt in hierdie stel data. 'n Korrelasie is 'n beoordeling van hoe sterk twee stelle data met mekaar verband hou. Die twee waardes mag ooreenkom of korreleer, of **geen korrelasie** hê nie.

Hier onder is die spreidingsdiagram vir die wiskunde- en lewensoriënteringpunte van dieselfde groep leerders. Die tabel vir hierdie data word op die volgende bladsy gegee.



12. Kyk na die spreidingsdiagram en die datatabel op die volgende bladsy.
13. Soek die datapunte vir Zoë, Eric, Miriam, Lola, en Marie op die spreidingsdiagram. Omkring die punte en merk hulle Z, E, M, L en Ma.
14. Wat merk jy in hierdie stel data op in die patroon van die punte vir Wiskunde en Lewensoriëntering?

.....

.....

Leerders	Wiskunde	Lewensoriëntering
Zoë	25	5
Johan	23	14
Palesa	22	21
Susan	21	16
Eric	20	5
Christoph	19	4
Gabriel	17	9
Simon	16	6
Miriam	15	25
Frederik	15	27
Stefan	12	29
Maryna	11	17
Dora	11	11
Samuel	10	1
Lola	10	25
Thineke	9	5
Jan-Chris	8	28
Marais	7	26
Marlene	7	2
Marie	5	15

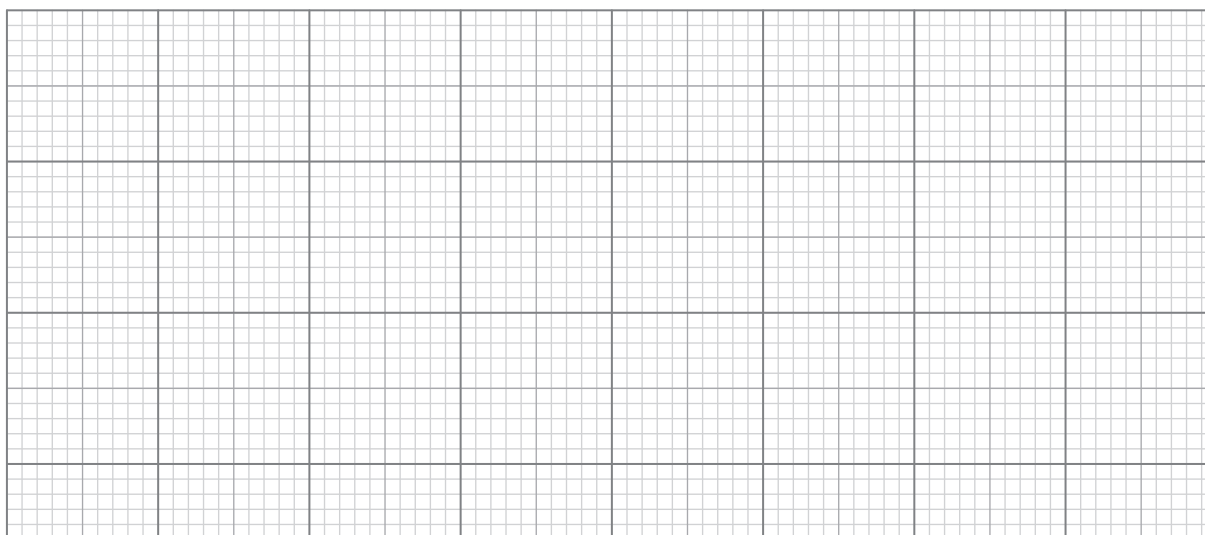
DIE VERBAND TUSSEN ARMSPANWYDTE EN LENGTE

Die idee dat 'n persoon se armspandwydte (die afstand vanaf die punt van die middelvinger van 'n persoon se een hand tot by die punt van die middelvinger van sy ander hand, as die arms horisontaal gestrek is) ooreenkom met die persoon se lengte, is al dikwels ondersoek.

'n Stel data van 13 mense word gegee op die volgende bladsy.

- Maak 'n spreidingsdiagram van die data op die gegewe rooster.
Neem byvoorbeeld Cilla se armspanwydte. Soek 156 op die horisontale as. Volg 'n vertikale lyn boontoe. Vind dan 162 op die vertikale as. Volg 'n horisontale lyn dwars. Maak 'n kolletjie waar die twee punte ontmoet.

Persoon	Armspanwydte	Lengte
Cilla	156	162
Mynhardt	159	162
Tonie	161	160
Ellen	162	170
Karin	170	170
Simon	173	185
Gabriel	177	173
Attie	178	178
Mia	188	188
Nathi	188	182
Manie	188	192
Kobus	196	194



2. Wat is jou mening oor die korrelasie tussen armspanwydte en lengte?

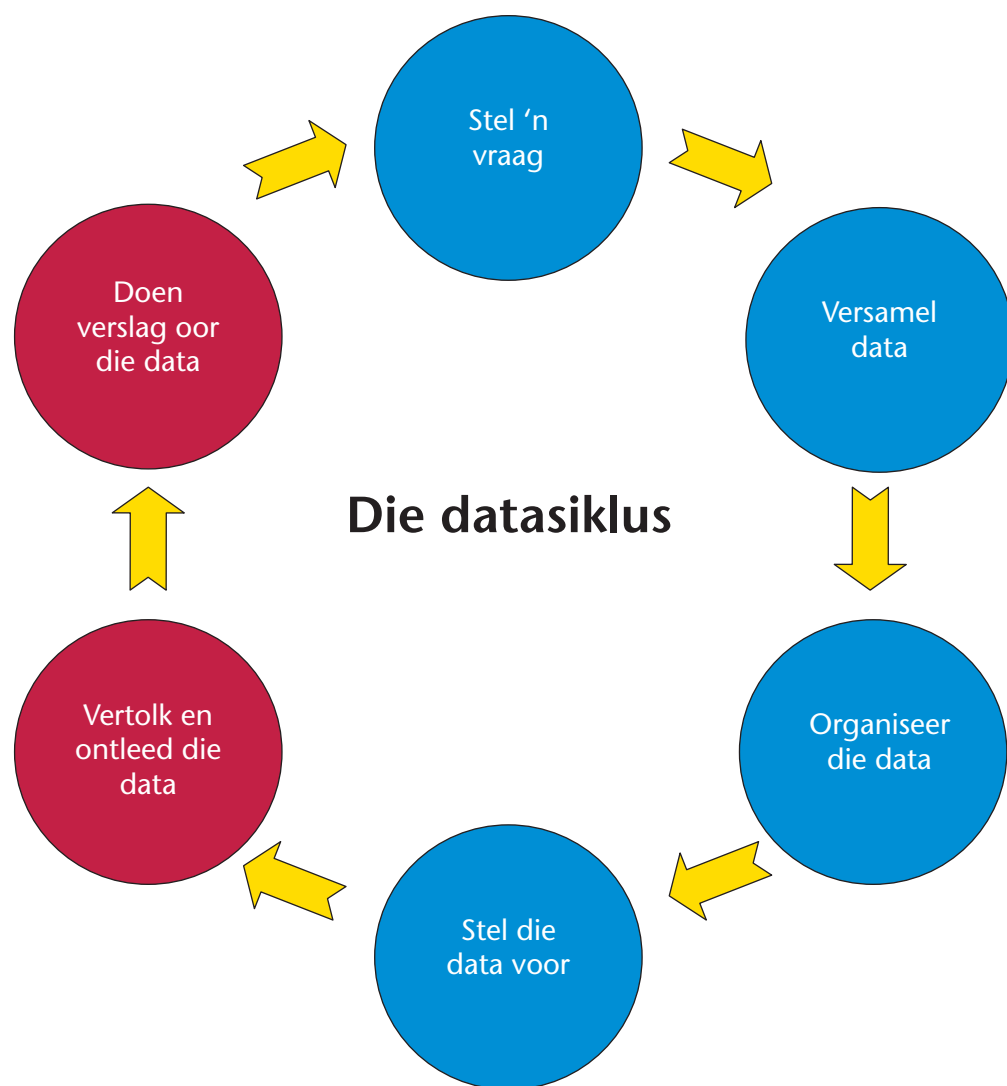
.....

HOOFSTUK 10

Vertolk, ontleed en doen verslag oor data

In hierdie hoofstuk sal jy sekere kritiese data-ontledingsvaardighede ontwikkel en inoefen. Dit beteken dat jy die hele datahanteringsiklus gaan ontleed. Jy sal moet besluit watter voorstelling van die data die beste is in 'n gegewe situasie. In die opsomming van data, is sekere opsommende statistiek meer geskik as ander vir verskillende tipes data. Jy moet ook die maniere herken waarop vooroordeel in data kan insluip. Dit sluit die metodes van die insameling, voorstelling en opsomming van data in.

10.1 Watter grafiek is die beste?	163
10.2 Die uitwerking van opsommende statistiek op die rapportering van data	167
10.3 Misleidende grafieke	168
10.4 Ontleed uiterste waardes en uitskieters.....	172



10 Vertolk, ontleed en doen verslag oor data

10.1 Watter grafiek is die beste?

Jy het geleer dat sekere soorte grafieke spesifieke soorte inligting beter voorstel as ander. Die tipe grafiek wat gebruik word, hang dus af van die inligting wat voorgestel moet word. Hier is 'n opsomming van die voordele van verskillende soorte grafieke:

Tabelle wys meer inligting as grafieke, maar patrone is nie so maklik om raak te sien nie. 'n Mens kry nie 'n visuele indruk van spesifieke tendense nie.

Sirkeldiagramme wys die geheel wat in dele verdeel is. Dit wys die verband tussen die dele en tussen 'n deel en die geheel. Dit wys nie die betrokke hoeveelhede nie.

Staafigrafieke wys die betrokke hoeveelhede maar wys nie die verbande so duidelik soos 'n sirkeldiagram nie. Hulle is nuttig om **kwantitatiewe** data te vertoon. Staafigrafieke stel ons in staat om die hoeveelhede van sekere kategorieë te vergelyk, byvoorbeeld die verkope van verskillende soorte items.

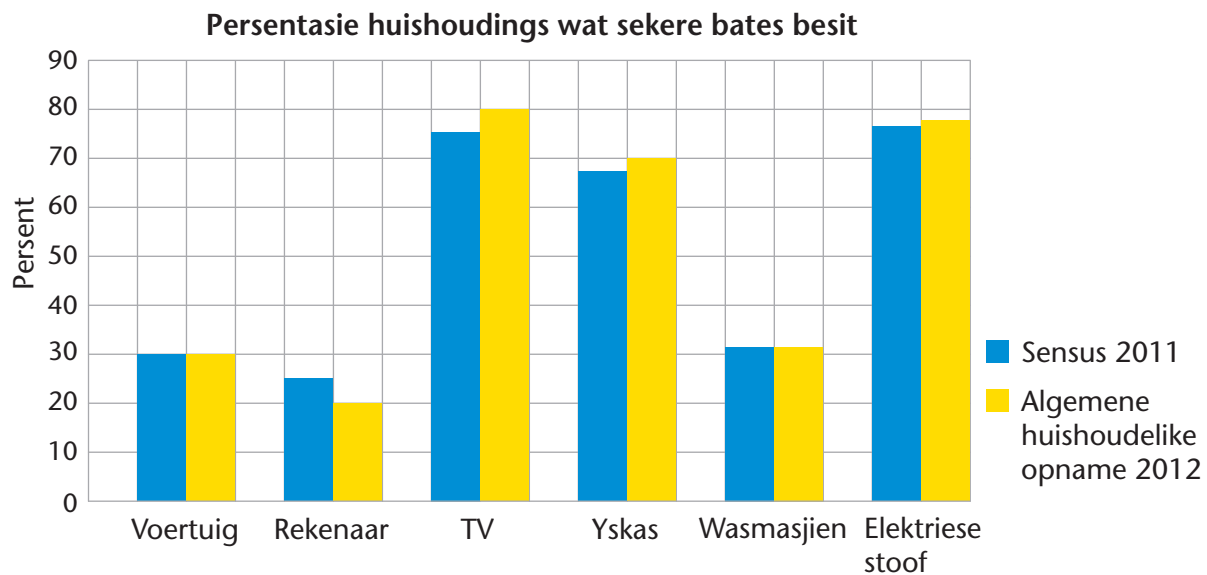
'n **Dubbele staafigrafiek** word gebruik om twee of meer goed in elke kategorie te vergelyk. Byvoorbeeld, ons kan 'n dubbele staafigrafiek gebruik om die verskille tussen mans en vroue te vergelyk.

Histogramme word gebruik om numeriese data wat in gelyke klasintervalle gegroepeer is voor te stel. Histogramme is nuttig om te wys hoe die data versprei is.

Gebrokelyngrafieke dui tendense of veranderinge in hoeveelhede oor tyd aan.

GEBRUIK DIE BESTE VOORSTELLINGSMETODE

- Watter soort grafiek sal die volgende die beste voorstel? Verduidelik jou antwoorde.
 - Om die waarde van die rand teenoor die dollar oor 'n aantal jare aan te dui
.....
 - Om die maandelikse verkoopsyfers van ses verskillende soorte motors in 2014 en 2015 te vergelyk
.....
 - Die verhouding tussen mense van verskillende ouderdomsgroepe in 'n dorp
.....
 - Hoeveelhede van verskillende soorte gewasse geproduseer op 'n plaas
.....
 - Die persentasies van verskillende goedere wat saam die totale verkope uitmaak
.....
 - Die verandering in die tempo van MIV-infeksie met verloop van tyd
.....
- Hierdie grafiek is deur Statistiek Suid-Afrika gepubliseer om die bates van Suid-Afrikaners aan te toon. Die blou staaf verwys na die Sensus 2011 en die geel staaf wys die resultate van die Algemene Huishoudelike Opname van 2012.



Gee redes vir jou antwoorde op die vrae hier onder.

- (a) Is dit nuttig om die verskille tussen die resultate van die 2011 Sensus en die Algemene Huishoudelike Opname van 2012 te wys?

.....

.....

.....

- (b) Is dit nuttig om data oor die bates wat mense besit in te samel?

.....

.....

- (c) Is dit nuttig om te wys dat lae persentasies van mense sekere bates besit?

.....

.....

.....

- (d) Die verskillende gekleurde stawe stel twee verskillende opnames voor. Stel 'n tabel op om die data in tabelvorm te wys. (Lees die persentasies so akkuraat as moontlik vanaf die grafiek en rond die data af tot die naaste heelgetal vir die tabel.)

- (e) Word die data net so effektief in die tabel gewys soos in die dubbele staafigrafiek? Gee jou eie mening.

.....

.....

3. Die volgende tabel wys die werkstatus van 15- tot 64-jariges in Suid-Afrika. Bespreek maniere om die data voor te stel (bv. grafieke). Staaf jou antwoorde.

	Jul–Sep 2012	Apr–Jun 2013	Jul–Sep 2013
	Getal mense (duisende)		
Bevolking 15- tot 64-jariges	33 017	33 352	33 464
Werkmag	18 313	18 444	18 638
In diens	13 645	13 720	14 028
Formele sektor (nie-landbou)	9 663	9 694	10 008
Informele sektor (nie-landbou)	2 197	2 221	2 182
Landbou	661	712	706
Private huishoudings	1 124	1 093	1 132
Werkloos	4 668	4 723	4 609
Nie ekonomies aktief	14 705	14 908	14 826
Ontmoedigde werksoekers	2 170	2 365	2 240
Ander (ekonomies onaktief)	12 535	12 543	12 586
Werkloosheidskoers (%)	25,5	25,6	24,7

- (a) Die persentasies van die mense wat in diens, werkloos of ekonomies onaktief in Julie tot September 2013 was.

.....

- (b) Die verandering in die **koers** van indiensneming oor drie tydperke.

.....

- (c) Die proporsies van mense wat in die formele sektor, die informele sektor, landbou en privaat huishoudings in diens was.

.....

- (d) Die getal mense wat in diens en werkloos is oor die drie tydperke.

.....

.....

10.2 Die uitwerking van opsommende statistiek op die rapportering van data

Inligtingsartikels gebruik dikwels gemiddeldes om inligting weer te gee. Die artikels mag dalk nie die regte benaming vir gemiddelde gebruik soos jy geleer het nie: die **gemiddelde**, **mediaan** en **modus**. In plaas hiervan, mag hulle woorde soos 'die meeste' gebruik. Dis egter belangrik om te weet na watter soort gemiddelde 'n verslag verwys, want dit verskaf verskillende soorte inligting.

- Onthou dat die **gemiddelde** nuttig is om 'n stel metingswaardes te beskryf, maar dit kan ook vir ander stelle numeriese data gebruik word. As die woord 'gemiddelde' nie verder omskryf word nie, is dit gewoonlik presies wat daarmee bedoel word. Dit is egter nie betroubaar as die verspreiding van die data baie wyd is nie.
- Die **mediaan** is die waarde in die middel van 'n geordende datastel. Die helfte van die datawaardes in die stel is laer as die mediaan en die helfte is hoër as die mediaan. Die mediaan word dikwels as gemiddelde gebruik as die datawaardes nie uniform versprei is nie, omdat die gemiddelde deur ekstreme waardes of uitskieters beïnvloed word en die mediaan nie. As huispryse byvoorbeeld baie verskil, sal die mediaan 'n beter beskrywing van die data wees as die gemiddelde. As die mediaan in 'n verslag gebruik word, behoort die skrywer aan te dui dat dit as 'n middelwaarde gebruik word.
- Die **modus** is die getal wat die meeste in 'n datastel voorkom. As ons byvoorbeeld data oor mense se geliefkoosde kleure insamel, sal die data uit 'n lys kleure bestaan en die modus sal die kleur wees wat die meeste voorkom. Die modus kan ook by getalle gebruik word. Nie alle datastelle het 'n modus nie, omdat geeneen van die getalle partykeer meer as een keer voorkom nie.

Voorbeeld

Die standaard manier waarop huispryse in Suid-Afrika en internasionaal gerapporteer word, is die mediaan huisprys, wat deur ekonome in finansiële verslae gebruik word. Die mediaan word as meer bruikbaar as die gemiddelde huisprys beskou, omdat die verkope van 'n paar duur huise die gemiddelde sal opjaag, maar nie die mediaan sal affekteer nie.

As 'n bank 'n verband ter waarde van R100 000 vir agt huise toestaan, en vir twee huise verbande ter waarde van R1 miljoen, sal die gemiddelde R280 000 wees. Dit lyk nie na 'n goeie weergawe van die waarde van huise nie, omdat die hoër waardes die prys skeefgetrek het. Die mediaanprys sal R100 000 wees, wat 'n baie beter aanduiding van die prys is.

Onthou dat die mediaan die middelste punt is. Die helfte van die waardes lê onder die mediaan en die ander helfte lê daar bokant. As die mediaan laer as die gemiddelde is, dui dit daarop dat daar hoër waardes is wat die gemiddelde skeeftrek.

GEBRUIK VERSKILLENDIGE Tipes OPSOMMENDE STATISTIEK

1. Watter soort gemiddelde is in elk van die stellings gebruik?
 - (a) Die gemiddelde familie het 2,6 kinders.
 - (b) Die meeste families het 3 kinders.
 - (c) Die meeste mense verkies rooi motors.
 - (d) Die gemiddelde lengte van vroue is 1,62 m.
 - (e) Meer mense doen na werk inkope as enige ander tyd van die dag.

2. Die gemiddelde maandelikse salaris van al die personeel by maatskappy ABC is R8 000 per maand, maar die mediaansalaris is R5 000.
 - (a) Verduidelik hoekom die twee opsommende statistieke so verskil.
.....
.....
.....
 - (b) Watter gemiddelde gee die beste weergawe van die salarisse van die maatskappy? Gee redes vir jou antwoord.
.....
.....

10.3 Misleidende grafieke

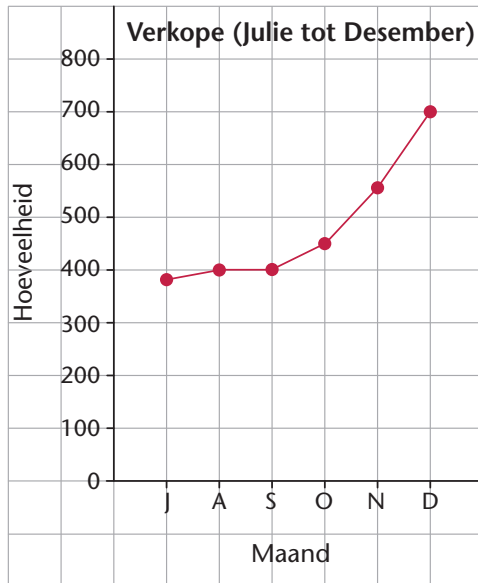
Die media (koerante, tydskrifte, televisie) gebruik dikwels grafieke om inligting voor te stel. Ongelukkig word die inligting dikwels gemanipuleer om 'n spesifieke uitkoms te beklemtoon. Dit mag wees omdat die skrywer sy/haar argument duideliker onder die leser se aandag wil bring.

Verander die skaal van die asse

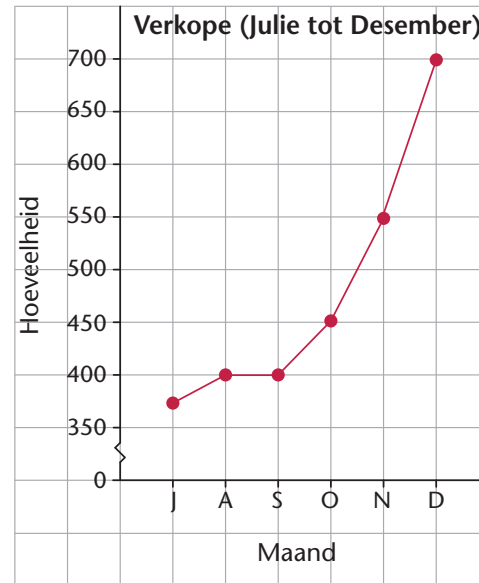
As die skaal van die vertikale as van 'n staaf- of lyngrafiek verander word, lyk die grafiek anders. In die geval van 'n staafgrafiek: hoe groter die afstand tussen die getalle op die vertikale as, hoe duideliker is die verskillende lengtes van die stawe sigbaar. Hoe kleiner die afstand tussen die getalle op die vertikale as is, hoe kleiner vertoon die verskil in die lengtes van die stawe. Dieselfde geld vir 'n lyngrafiek wat óf skerp punte sal hê óf baie platter sal wees, afhangende van hoe die skaal verander word.

Voorbeeld

Die twee gebrokelyngrafieke wys presies dieselfde data van 'n besigheid se verkope oor 'n tydperk van ses maande. Watter grafiek gee die meer akkurate indruk?



Grafiek A



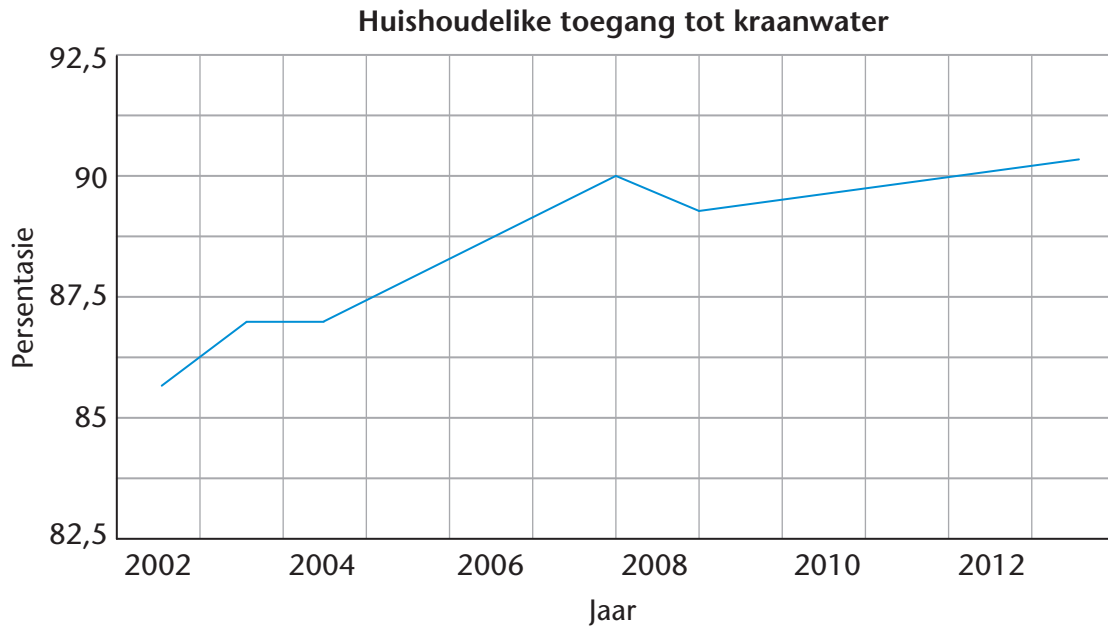
Grafiek B

Grafiek B het 'n ander skaal op die vertikale as. Die vertikale as begin nie by 0 nie. **Twee** blokkies op die vertikale as verteenwoordig 100 items, in plaas van **een** blokkie, soos in Grafiek A. Dit veroorsaak dat dit lyk asof die verkope sterk gestyg het oor 'n periode van ses maande.

Let daarop dat dit nie noodwendig verkeerd is om die skaal op die asse te verander, of nie by 0 te begin nie. Byvoorbeeld, grafieke wat die skommeling op die aandelebeurs vertoon, wys baie selde die oorsprong op die grafiek en makelaars word geleer om die grafieke in daardie vorm te interpreteer. Partykeer het klein veranderinkies in datawaardes 'n belangrike uitwerking en in daardie gevalle mag dit geldig wees om die skaal te verander om aandag daarop te vestig.

ONTLEED GRAFIEKE

- Hierdie grafiek van Statistiek Suid-Afrika wys die verhoging in die persentasie huishoudings wat oor 'n tydperk van tien jaar toegang tot kraanwater gehad het.



- Lewer kommentaar op die skaal wat op die vertikale as gebruik is. Is die grafiek misleidend?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Hoe sou jy die grafiek teken sodat die verskille nog meer opvallend is?

.....

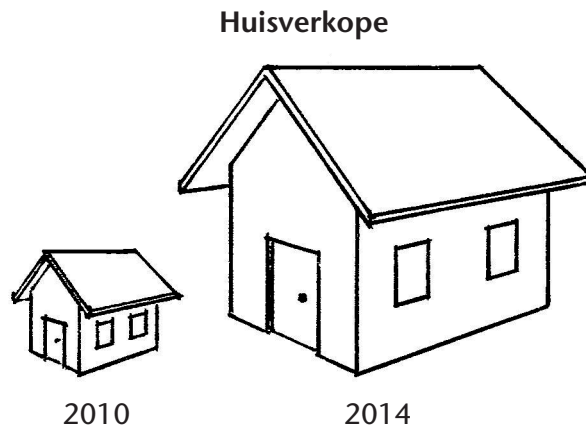
.....

- Hoe sal jy die grafiek teken sodat die verskille minder opvallend sal wees?

.....

.....

2. In hierdie grafiek stel die hoogte van die huise die getal verkope voor.



Dink jy dat hierdie grafiek misleidend is? Gee rede(s) vir jou antwoord.

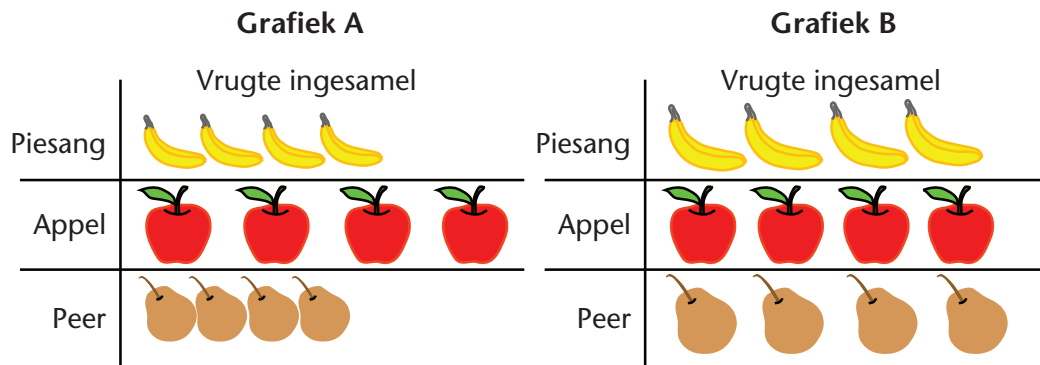
.....

.....

.....

.....

3. Kyk na die twee grafieke hier onder:



Watter grafiek is volgens jou reg geteken? Verduidelik jou antwoord.

.....

.....

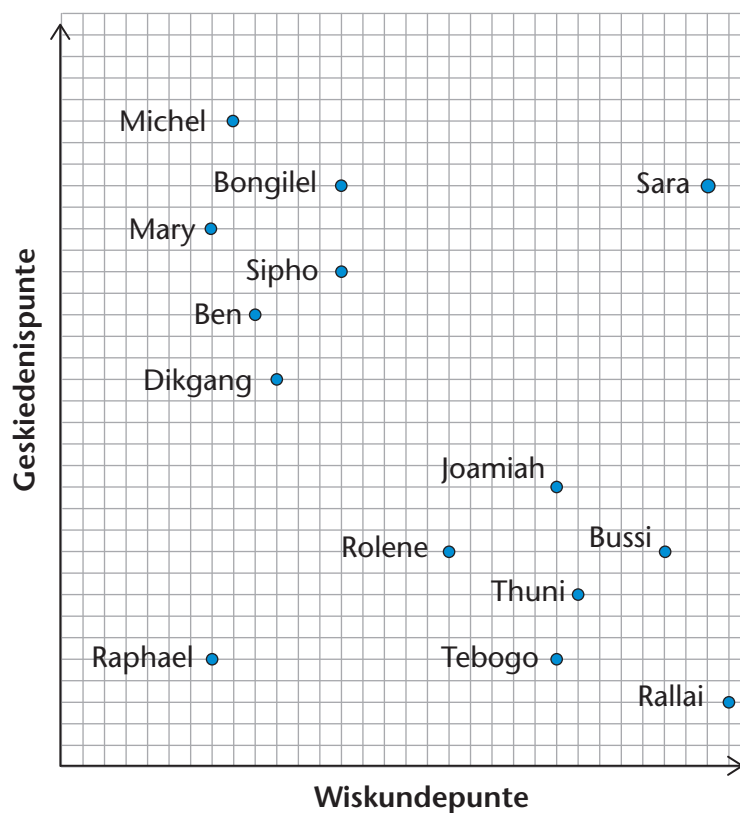
.....

.....

10.4 Ontleed uiterste waardes en uitskieters

'n Datawaarde wat baie anders as al (of meeste van) die ander waardes in 'n stel data is, word 'n **uitskieter** genoem.

Dit is soms moeilik om 'n uitskieter in numeriese data raak te sien. Uitskieters word egter makliker raakgesien as die data op 'n grafiek aangedui word.



- Die bostaande spreidingsdiagram wys hoe 'n groep leerders in Wiskunde en Geskiedenis presteer het. Watter van die punte op die spreidingsdiagram kan as uitskieters beskou word? Gee redes vir jou antwoord.

.....

.....

.....

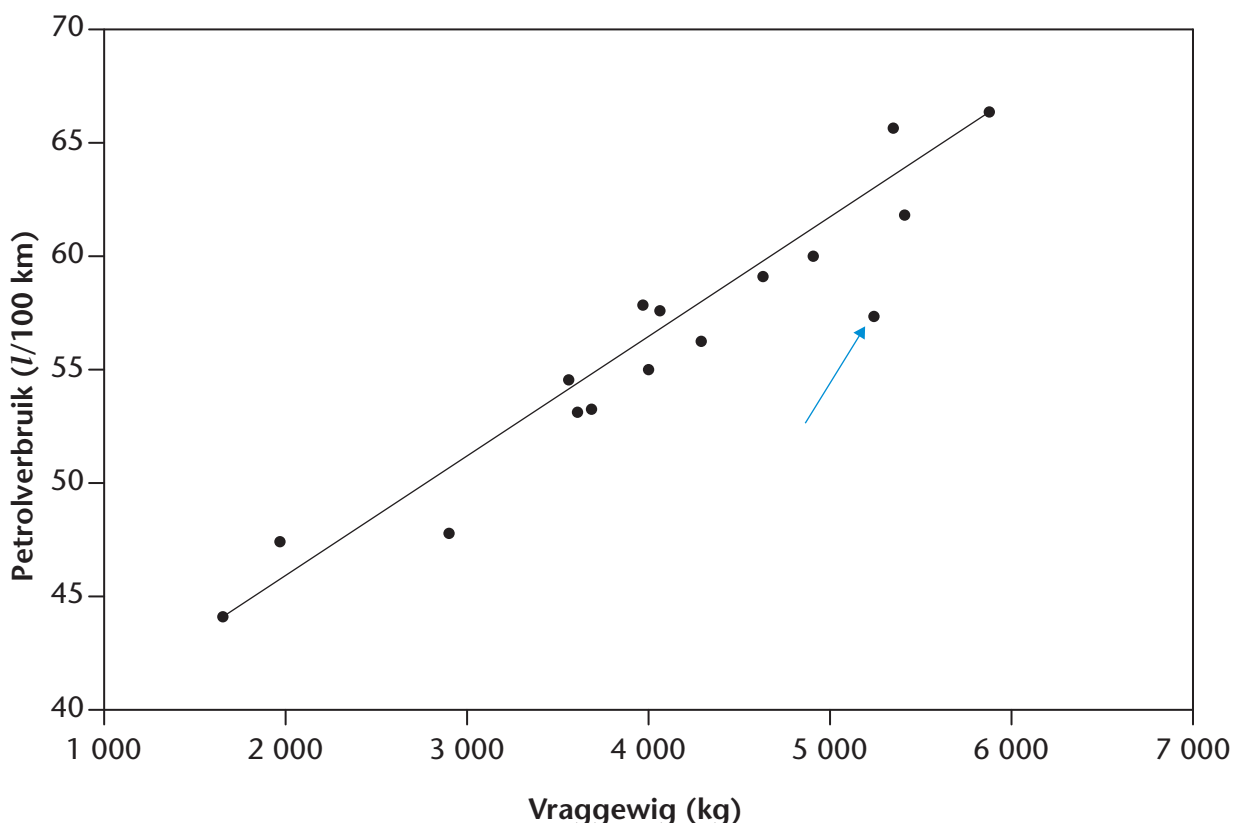
.....

.....

.....

Uitskieters in datastelle kan baie belangrik wees. Ons moet besluit of daar 'n spesifieke rede is vir die betrokke waarde wat so van die ander verskil. Soms gee dit ons belangrike inligting. In sommige gevalle is die data wat vir hierdie punt ingesamel is, verkeerd.

Die spreidingsdiagram hier onder is data wat 'n vervoermaatskappy ingesamel het.



Die maatskappy gebruik net een soort vragmotor. Voor elke vervoeropdrag uitgevoer word, moet die maatskappy die koste van die vervoer spesifiseer. Ten einde die prys te verskaf voordat die taak uitgevoer kan word, moet die maatskappy 'n skatting maak van hoeveel dit hulle gaan kos om die opdrag uit te voer. Een van die hoofuitgawes is die koste van petrol en die belangrikste faktor wat die hoeveelheid petrol beïnvloed, is die afstand wat afgelê moet word. Die vrag se gewig speel ook 'n rol: hoe swaarder die vrag hoe hoër die petrolverbruik (liter/100km).

Die tabel op die volgende bladsy verskaf inligting wat met vorige vervoeropdragte aangeteken is. Die opdragte is van 1 tot 16 genommer en vir elke vervoeropdrag is die waardes van vier veranderlikes gegee: *afstand*, *vraggewig*, *hoeveelheid petrol gebruik* en *petrolverbruik-koers*.

2. (a) Watter van die vier veranderlikes word gewys op die spreidingsdiagram hier bo?

.....

(b) Wat is die waardes van hierdie twee veranderlikes vir die punt wat met die blou pyltjie op die spreidingsgrafiek aangedui word?

.....

Opdrag nommer	Afstand (km)	Vraggewig (kg)	Hoeveelheid petrol (liter)	Petrolverbruik (liter/100km)
1	1 304	5 445	879	67,4
2	1 320	2 954	639	48,4
3	1 151	4 705	698	60,6
4	1 371	4 378	787	57,4
5	325	3 673	176	54,2
6	1 630	5 995	1 113	68,3
7	1 023	5 357	600	58,7
8	620	4 988	382	61,6
9	73	1 992	35	47,9
10	1 071	5 529	680	63,5
11	370	4 140	218	58,9
12	1 423	4 062	843	59,2
13	394	4 068	221	56,1
14	1 536	1 678	682	44,4
15	1 633	3 736	887	54,3
16	435	3 644	241	55,4

3. (a) Kyk na die spreidingsdiagram en die stel data. Wat is die invloed van vraggewig op die petrolverbruik?

.....

- (b) Is opdrag 7 'n uitsondering in hierdie verband? Verduidelik jou antwoord.

.....

.....

4. Verdere ondersoek het getoon dat die bestuurder vir opdragte 2 en 7 dieselfde persoon was en dat hy nie die bestuurder was vir die ander vervoeropdragte nie. Wat kan dit aandui?

.....

.....

VIND UITSKIETERS

Navorsers het data ingesamel oor die bevolkings van sekere Afrika-lande en die Seychelle, die inkomste per persoon en die persentasie inkomste wat op gesondheid spandeer word.

Land	Totale bevolking (in 1 000e)	Totale nasionale inkomste per persoon (VSA\$)	Persentasie inkomste spandeer op gesondheid
Angola	18 498	4 830	4,6
Botswana	1 950	13 310	10,3
DRK	66 020	280	2,0
Lesotho	2 067	1 970	8,2
Malawi	15 263	810	6,2
Mauritius	1 288	12 580	5,7
Mosambiek	22 894	770	5,7
Namibië	2 171	6 250	5,9
Seychelle	84	19 650	4,0
Suid-Afrika	50 110	9 790	8,5
Swaziland	1 185	5 000	6,3
Tanzanië	43 739	1 260	5,1
Zambië	12 935	1 230	4,8

1. Wat is die drie veranderlikes in hierdie tabel?

.....

.....

.....

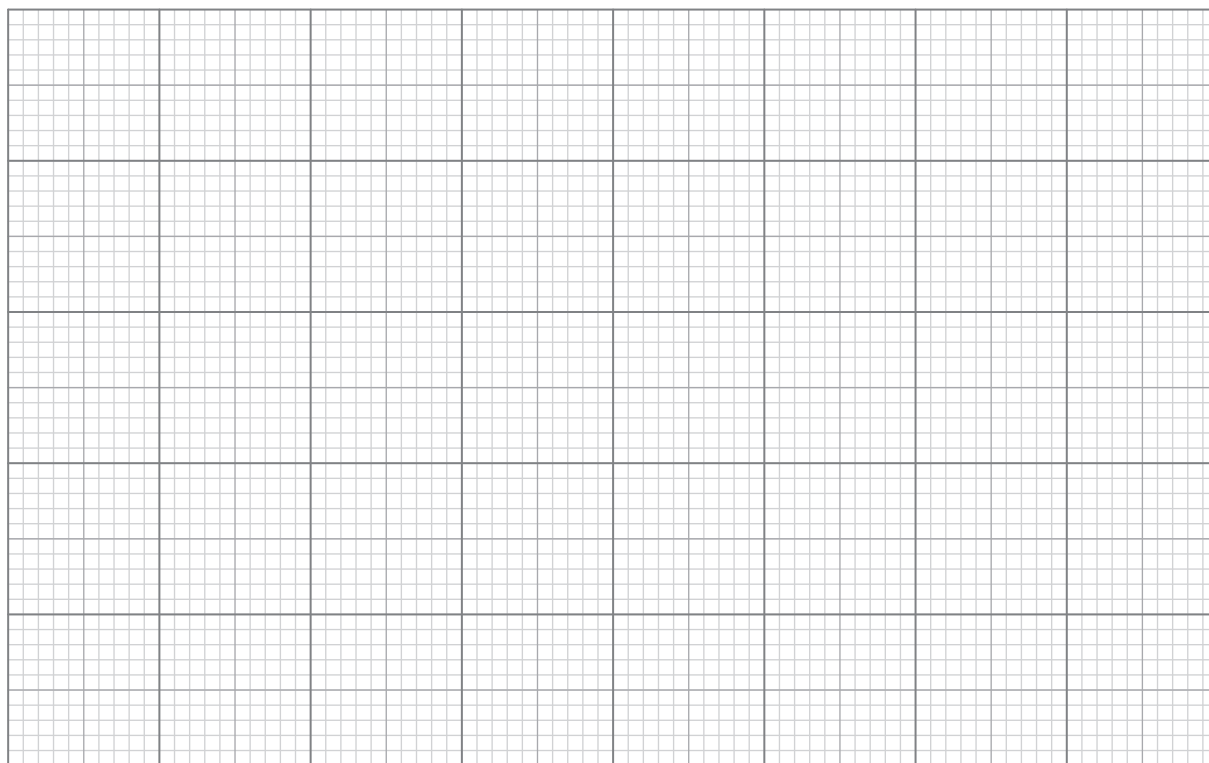
2. Hoekom dink jy is dit in hierdie geval belangrik om liever na inkomste per persoon te kyk as na die totale inkomste?

.....

.....

.....

-
3. Vir elke land, stip die punte vir die nasionale inkomste per persoon en die persentasie inkomste wat op gesondheidsorg spandeer word.



4. Skryf 'n kort verslaggie oor die data in die tabel en wat die spreidingsgrafiek jou van die data wys. Lewer kommentaar op die algemene tendens en die uitskieters.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

HOOFSTUK 11

Waarskynlikheid

In hierdie hoofstuk sal jy meer leer oor die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis en watter inligting waarskynlikhede verskaf oor wat in die toekoms kan gebeur. Jy gaan ook oor saamgestelde gebeurtenisse leer.

11.1 Eenvoudige gebeurtenisse.....	179
11.2 Saamgestelde gebeurtenisse.....	184

1	4	3	4	6	1	4	2	1	4	3	1	1	6	1	3	3	3	6	5	2	1	4	6	6	5
6	5	3	2	4	2	6	6	1	5	4	6	5	3	1	2	2	2	2	4	6	2	6	4	5	3
6	3	6	2	2	5	6	6	2	4	4	1	2	4	2	1	2	1	2	5	4	3	3	6	2	4
6	2	5	2	5	4	4	6	2	3	1	1	6	2	2	5	6	3	2	6	2	3	2	6	1	2
1	4	2	3	4	1	3	1	1	1	3	5	4	2	6	6	1	4	2	2	6	1	3	2	2	5
5	4	1	1	6	4	1	3	3	5	2	2	3	3	1	3	6	4	3	2	1	2	2	4	5	3
5	5	6	3	6	1	5	3	3	2	1	2	3	3	4	1	5	4	2	4	2	5	2	3	6	3
4	3	6	6	6	5	3	3	2	4	3	4	6	6	5	4	5	6	1	6	5	2	1	2	2	5
6	1	4	4	4	6	3	1	5	4	2	4	6	3	2	4	3	6	5	5	4	3	5	2	6	2
2	4	5	6	5	1	4	6	1	5	3	6	4	4	3	2	2	5	5	3	5	1	4	4	4	1
6	1	1	5	2	5	1	5	2	2	6	1	2	3	1	2	4	5	3	1	5	6	4	6	1	4
1	1	5	6	6	1	2	4	1	5	5	6	3	4	1	4	2	3	3	6	2	2	6	3	1	4
4	4	6	5	1	6	5	1	6	5	5	4	5	4	3	2	5	6	5	1	3	3	3	5	2	2
4	3	6	1	1	6	1	6	2	1	4	1	1	4	5	3	3	1	2	1	5	6	6	1	3	1
2	6	3	6	4	1	3	3	2	5	4	2	3	1	3	2	2	2	2	4	3	3	6	3	1	2
3	3	3	6	3	6	3	3	6	4	4	2	5	3	3	1	3	3	3	5	1	2	5	1	2	5
4	1	6	4	2	6	4	5	2	1	3	5	2	1	5	5	4	4	3	4	5	1	6	2	1	5
2	3	6	5	3	2	4	6	1	1	4	6	4	6	4	1	3	2	3	1	2	1	1	1	1	2
1	3	4	1	6	3	6	2	3	4	5	6	5	2	5	4	2	2	5	5	6	5	5	6	5	3
4	3	6	5	4	3	6	6	3	5	6	6	2	3	6	3	5	4	1	1	3	6	1	1	5	5
5	6	6	6	4	2	1	6	2	2	4	4	2	3	1	3	3	5	3	2	1	6	3	5	3	5
6	2	1	3	5	5	3	5	2	6	1	4	4	2	6	2	1	5	1	5	5	5	1	4	4	2
1	2	6	4	2	2	3	6	4	3	2	1	3	5	3	4	4	5	5	5	2	2	2	3	4	3
5	3	1	3	5	2	4	2	5	2	6	6	6	6	2	1	1	3	4	4	2	3	5	4	6	2
5	3	6	2	5	2	4	2	4	5	3	4	6	5	6	5	6	2	1	1	6	3	5	2	6	6
4	6	1	1	6	3	2	5	5	5	3	4	5	1	2	3	4	3	4	5	6	6	2	5	2	4
4	1	6	4	6	3	2	4	2	2	3	1	3	5	2	1	1	6	5	2	2	4	3	1	3	6
3	6	3	4	1	4	2	6	5	6	1	5	2	4	3	2	6	6	1	3	5	5	5	1	2	6
6	2	5	5	6	4	1	2	1	2	3	6	2	1	4	2	2	6	1	3	5	1	4	5	5	2
1	6	5	5	4	6	5	5	5	4	2	3	2	5	5	1	3	2	3	3	6	2	5	2	3	2
5	1	3	5	5	2	6	6	6	1	1	3	5	4	2	3	5	5	6	2	5	5	5	1	5	4
5	5	6	6	5	5	3	3	2	2	2	3	3	2	6	4	1	2	6	3	6	2	6	2	1	6
3	1	1	4	1	3	4	6	6	3	2	6	5	3	2	6	1	3	1	6	4	3	1	4	1	2
2	4	5	2	6	4	4	1	6	6	4	5	1	2	5	2	3	5	1	6	4	6	3	5	1	6
1	6	6	6	6	2	2	2	1	2	2	3	5	5	3	3	5	2	2	5	2	4	1	2	2	4
2	6	4	6	2	6	4	1	5	5	6	4	1	3	3	2	2	5	4	2	2	1	3	4	5	5
6	6	5	2	4	2	2	5	2	6	6	3	2	2	4	1	3	5	4	2	4	3	4	1	2	4
5	4	6	6	1	4	2	5	5	4	6	1	4	5	1	2	1	1	2	6	5	2	1	3	4	4
1	6	6	5	4	4	4	5	1	1	1	1	1	6	1	1	3	1	2	3	3	5	2	4	2	5
6	5	4	6	1	6	3	5	6	2	1	1	6	2	6	1	4	4	3	2	3	1	5	3	5	1
4	6	4	1	1	5	6	2	1	6	3	2	3	5	4	1	4	5	3	2	3	5	1	6	1	1
4	5	1	3	4	3	5	3	5	1	2	2	6	3	4	6	6	6	1	2	6	4	1	6	6	5
3	2	6	5	3	1	5	5	2	6	3	4	5	4	1	6	6	3	5	6	1	1	5	4	2	2
4	6	6	3	2	6	6	5	3	5	5	1	5	3	3	5	2	5	3	5	4	5	2	6	5	5
3	2	5	2	6	2	2	2	1	6	1	6	3	3	4	1	1	5	1	6	4	5	4	2	2	1

11 Waarskynlikheid

11.1 Eenvoudige gebeurtenisse

HERSIENING



geel	groen	pienk	blou	rooi	bruin	grys	swart
------	-------	-------	------	------	-------	------	-------

- (a) Veronderstel die 8 gekleurde knope hier bo is in 'n sak en jy haal een knoop uit die sak sonder om te kyk. Kan jy sê watter kleur jy sal uithaal?
- (b) Veronderstel jy haal herhaaldelik 'n knoop uit die sak, kyk na sy kleur en sit dit weer terug. Kan jy naastenby sê in watter breuk van die proewe dit 'n geel knoop sal wees?

.....

.....

Andries het 'n teorie. Omdat die 8 moontlike uitkomstewe waarskynlik is, meen hy dat as jy 8 proewe in hierdie situasie uitvoer, jy elke kleur een keer behoort uit te haal.

- As Andries se teorie reg is, hoeveel keer sal elke kleur dan uitgehaal word as 40 proewe uitgevoer word?

.....

.....

- Watter breuk van die totale getal proewe sal elke kleur wat uitgehaal word vorm as Andries se teorie reg is?

.....

Elke keer wat jy 'n knoop uit die sak haal sonder om te kyk, voer jy 'n **proef** uit. As jy dit doen, die knoop terugsit en die selfde aksie 8 keer herhaal, het jy 8 proewe uitgevoer.

Die getal kere wat 'n gebeurtenis gedurende 'n reeks proewe plaasvind, word die **fekwensie** van die gebeurtenis genoem.

As die fekvensie van 'n gebeurtenis uitgedruk word as 'n breuk van die totale getal proewe, word dit die **relatiewe fekvensie** genoem.

4. As Andries se teorie reg is, hoeveel keer sal elkeen van die kleure uitgehaal word as 40 proewe uitgevoer word? Skryf jou antwoorde in die tweede ry van die tabel. Skryf die relatiewe frekwensies wat jy voorspel in ry 3 as veertigstes, en in ry 4 as tweehonderdstes.

kleur	geel	groen	pienk	blou	rooi	bruin	grys	swart
frekwensies deur Andries voorspel								
relatiewe frekwensies voorspel, uitgedruk in 40stes								
relatiewe frekwensies voorspel, uitgedruk in 200stes								

Die relatiewe frekwensie wat Andries vir elke kleur voorspel het, word die **waarskynlikheid** vir die uithaal van daardie kleur genoem. As al die uitkomstewekansig is, dan is

$$\text{waarskynlikheid van 'n uitkoms} = \frac{1}{\text{die totale getal ewekansige uitkomstes}}$$

Jy gaan nou Andries se teorie ondersoek.

5. (a) Maak 8 klein kaartjies en skryf die naam van een van die kleure hier bo op elke kaartjie, sodat jy kaartjies sal hê met die agt kleure se name daarop. Voer 8 proewe uit om te kyk of Andries se teorie reg is. Skryf die resultaat (as jou telstrepies 1 en jou frekwensies 1) in die betrokke ry van die tabel hier onder.
- (b) Vra vier klasmaats wat hulle gevind het toe hulle die eksperiment gedoen het. Skryf ook hulle resultate in jou tabel (Maat 1, 2, 3, 4 frekwensies).

Tabel vir die uitslae van die eksperiment

kleur	geel	groen	pienk	blou	rooi	bruin	grys	swart
jou telstrepies (1)								
jou frekwensies (1)								
Maat 1 frekwensies								
Maat 2 frekwensies								
Maat 3 frekwensies								
Maat 4 frekwensies								
Totale frekwensies (5 eksperimente)								

6. (a) Hoeveel proewe is altesaam in die 5 eksperimente uitgevoer?
- (b) Wat is die totaal van die frekwensies vir die verskillende kleure in die laaste ry van jou tabel?
7. Is Andries se teorie reg?

Bettina het 'n ander teorie as Andries. Sy glo dat as 'n mens baie proewe met die 8 knope in die sak doen, elke kleur **ongeveer** 1 agtste van die kere getrek sal word. Met ander woorde, Bettina glo dat die relatiewe frekwensie van elke uitkoms na aan die waarskynlikheid van daardie uitkoms sal wees, alhoewel dit nie noodwendig gelyk daaraan sal wees nie.

8. (a) Jy en jou vier klasmaats het altesaam 40 proewe uitgevoer. Skryf die resultate in die tweede ry van die tabel. Druk ook elke frekwensie uit as 'n breuk van 40 en van 200, met ander woorde as veertigstes en tweehonderdstes.

kleur	geel	groen	pienk	blou	rooi	bruin	grys	swart
werklike frekwensies van jou eksperiment (40 proewe)								
relatiewe frekwensies as 40stes								
relatiewe frekwensies as 200stes								
waarskynlikheid as 200stes								

- (b) Wys jou eksperiment of Bettina se teorie reg is of nie?

.....

Jasper glo **as meer proewe uitgevoer word, sal die relatiewe frekwensies nader aan die waarskynlikhede wees.**

Jy gaan nou 'n ondersoek doen om vas te stel of Jasper se teorie reg is.

ONDERSOEK WAT GEBEUR AS MEER PROEWE UITGEVOER WORD

- Voer 40 proewe uit deur een kaart op 'n slag te trek uit die 8 klein kaartjies, met die name van die kleure daarop geskryf. Skryf jou resultate in die tweede en derde rye van die tabel hier onder.

kleur	geel	groen	pienk	blou	rooi	bruin	grys	swart
telstrepies								
frekwensies								
relatiewe frekwensies as 40stes								
relatiewe frekwensies as 200stes								
waarskynlikheid as 200stes								

- Maak 'n afskrif van die tabel hier bo sonder die rye met telstrepies, die ry met die relatiewe frekwensies as veertigstes en die ry vir die waarskynlikhede op 'n los vel papier. Ruil uit met 'n klasmaat. Skryf die resultate van jou klasmaats in tabel 1 en 2 op die volgende bladsy. Skryf ook jou eie resultate vir vraag 1 in die tabelle.
- Kry die data van nog drie ander klasmaats en skryf dit ook in die tabelle in.
- Tel die frekwensies van die verskillende kleure in die vyf stelle data vir 40 proewe elk bymekaar. Bereken nou die relatiewe frekwensie, uitgedruk as tweehonderdstes.
- Is die omvang van die relatiewe frekwensies vir 200 proewe kleiner as die omvang van die vyf verskillende stelle van 40 proewe elk? Wat beteken dit in die lig van Jasper se teorie?

.....

.....

As slegs 'n klein getal proewe gedoen word, kan die werklike relatiewe frekwensies vir die verskillende uitkomstebaaie verskil van die waarskynlikhede van die uitkomstebaaie.

Wanneer baie proewe uitgevoer word, is die werklike relatiewe frekwensies van die verskillende uitkomstebaaie nogal baie naby aan die waarskynlikhede van die uitkomstebaaie.

Tabel 1: Frekwensies van 5 stelle van 40 proewe elk

kleur	geel	groen	pienk	blou	rooi	bruin	grys	swart
frekwensies van jou eie 40 proewe in vraag 1								
frekwensies van 40 proewe deur klasmaat 1								
frekwensies van 40 proewe deur klasmaat 2								
frekwensies van 40 proewe deur klasmaat 3								
frekwensies van 40 proewe deur klasmaat 4								
totale frekwensies van 200 proewe								
relatiewe frekwensies van 200 proewe as 200stes								

Tabel 2: Relatiewe frekwensies vir elk van die 5 stelle van 40 proewe elk
(uitgedruk as 200stes)

kleur	geel	groen	pienk	blou	rooi	bruin	grys	swart
relatiewe frekwensies vir jou eie 40 proewe								
relatiewe frekwensies van 40 proewe van klasmaat 1								
relatiewe frekwensies van 40 proewe van klasmaat 2								
relatiewe frekwensies van 40 proewe van klasmaat 3								
relatiewe frekwensies van 40 proewe van klasmaat 4								

6. Hoeveel verskillende driesyfergetalle kan van die syfers 3 en 5 gevorm word as geen ander simbool gebruik word nie? Jy mag een, twee of al drie van die simbole in elke getal gebruik en jy mag dieselfde simbool in die getal herhaal.

.....

11.2 Saamgestelde gebeurtenisse

OPSKIET VAN 'N MUNTSTUK EN OM GEBOORTE TE GEE

- Simon skiet 'n muntstuk op wat land met kruiskant bo. Hy skiet die munt weer op.
 - Wat is die moontlike uitkomst?
 - Wat is die waarskynlikheid van elk van die moontlike uitkomst?
 - Wat is die moontlike uitkomst as Simon die munt 'n derde keer opskiet?
 - Wat is die waarskynlikheid van elk van die moontlike uitkomst by 'n derde opskiet?

Wat gebeur as 'n muntstuk vir die tweede keer opgeskiet word het niks te doen met wat gebeur het toe dit die eerste keer opgeskiet is nie.

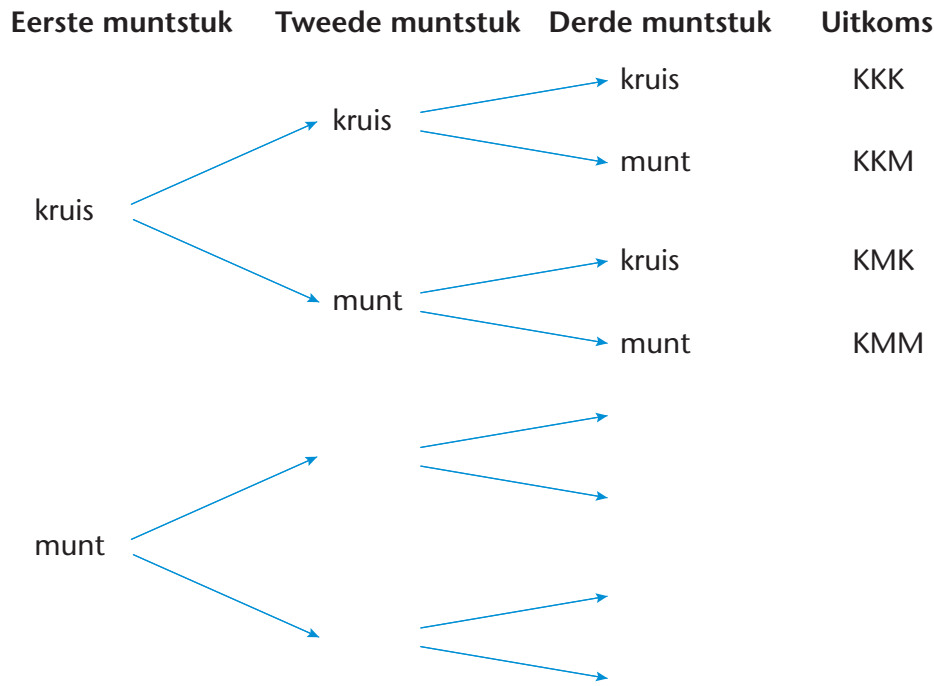
Die eerste en tweede opskiete word **onafhanklike gebeurtenisse** genoem: wat tydens die eerste opskiet gebeur het, kan nie dit wat met die tweede opskiet gebeur, beïnvloed nie.

- Wat is die waarskynlikheid van elke uitkoms as 'n gebeurtenis vier verskillende ewekansige uitkomst het?
 - Beteken dit dat as die gebeurtenis vier keer herhaal word, elk van die vier uitkomst een keer sal voorkom?
 - Beteken jou antwoord in (a) dat, as die gebeurtenis 100 keer herhaal word, elk van die vier uitkomst 25 keer sal voorkom?
- Wat is die moontlike uitkomst as twee munte opgeskiet word? Gebruik die **tweerigtingtabel** hier onder om hierdie vraag te beantwoord. Een moontlike uitkoms is reeds gegee.

	Kruis	Munt
Kruis		K M
Munt		

- Dink jy hierdie vier uitkomst is ewekansig?
- Wat is die waarskynlikheid van elk van die vier uitkomst?
- Wat is die waarskynlikheid om een kruis en een munt te kry?

4. Kom ons ondersoek die moontlike uitkomst as drie muntstukke opgeskiet word. Hier onder is 'n boomdiagram wat jou kan help om die verskillende uitkomst uit te pluus. Voltooi die diagram deur die ontbrekende inligting in te vul.



5. (a) Dink jy die agt verskillende uitkomst in vraag 4 is ewe waarskynlik?

 (b) Wat is die waarskynlikheid vir elkeen van die agt uitkomst?
 (c) Wat is die waarskynlikheid dat twee keer kruis en een munt op munt sal val?

6. In vraag 6 op bladsy 183 is jy gevra om die verskillende getalle neer te skryf wat gevorm kan word uit die simbole 3 en 5. Dink aan al die vierletterkodes wat jy kan vorm uit slegs twee letters, P en Q. Enige letter kan meer as een keer in die kode gebruik word. Dink eers hoe jy te werk sal gaan om op 'n sistematiese manier al die moontlikede te kry en probeer dan om 'n boomdiagram op te stel om jou te help.
 (a) Teken 'n boomdiagram in jou oefeningboek om jou te help om die probleem op te los. Maak 'n lys van al die uitkomst.

- (b) As die kodes gevrom word deur die letters lukraak (ewekansig) te kies, wat is die waarskynlikheid dat die kode uit dieselfde letter sal bestaan wat vier keer gebruik is?
.....

- (c) Wat is die waarskynlikheid dat die kode uit twee P's en twee Q's sal bestaan?
.....

As 'n vrou swanger is, kan die baba 'n seuntjie of 'n dogtertjie wees. As ons die aanname maak dat die twee moontlikhede ewe waarskynlik is, is die waarskynlikheid van 'n seuntjie $\frac{1}{2}$ en die waarskynlikheid van 'n dogtertjie is $\frac{1}{2}$.

7. (a) Voltooi hierdie tweerigting tabel om die moontlike uitkomst van die geslag van twee kinders in 'n gesin te wys

	Seun	Meisie

- (b) Maak 'n lys van al die moontlikhede.
.....

- (c) Wat is die waarskynlikheid dat die twee kinders in die gesin van dieselfde geslag sal wees?
.....

- (d) Wat is die waarskynlikheid dat die oudtse kind 'n seun sal wees en die volgende kind 'n dogtertjie?
.....

8. 'n Sekere vrou het een kind, 'n seuntjie. Sy verwag nou 'n tweede baba. Wat is die waarskynlikheid dat dit weer 'n seun sal wees, as ons aanneem dat die moontlikheid van 'n seuntjie of 'n dogtertjie ewe waarskynlik is?
.....

Die geboorte van 'n seuntjie of 'n dogtertjie is dalk nie ewe waarskynlik nie. Waarskynlikhede kan egter slegs bereken en gebruik word om voorspellings te maak as daar aangeneem word dat uitkomst ewekansig is.

9. (a) 'n Vrou trou en beplan om 'n baba in een jaar en weer een in die volgende jaar te hê. Wat is die waarskynlikheid dat albei babas dogtertjies sal wees?
.....

- (b) 'n Vrou wil graag in die eerste drie jaar na haar troue drie babas hê. Wat is die waarskynlikheid dat sy 'n seuntjie in die eerste jaar en dogtertjies in die tweede en derde jaar sal hê?
.....